

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΗΑΗΝ -ΒΑΝΑΧΗ

I. Θετικά υπογραμμικά συναρτησιακά.

Ορισμός I.1. Έστω X γραμμ. χώρος και $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτησιακό.

Το p λέγεται **θετικό υπογραμμικό** ανν:

(i) $p(x) \geq 0, \quad \forall x \in X.$

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X.$

(iii) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall \lambda \geq 0, \forall x \in X.$

[Ειδικότερα, $p(0) = 0.$]

Πρόταση I.2: Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) p συνεχές στο 0.

(ii) p συνεχές

(iii) $\exists V \in \mathcal{N}_0$ ώστε $p(V)$ φραγμένο.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

II. Αναλυτική μορφή Θ. Hahn-Banach -Συνέπειες.

Θεώρημα II.1: Έστω X γραμμικός χώρος, Y γραμμικός υπόχωρος του X , $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό και $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική, ώστε

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Y.$$

Τότε, $\exists \tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική, ώστε

$$\tilde{f}|_Y = f, \quad \tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Συμβολισμός: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Θέτουμε

$$X^* = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ φραγμένο γραμμικό}\}.$$

Ο X^* είναι γραμμικός χώρος και ονομάζεται **δυϊκός ή συζυγής** του X .

Η

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| = 1\}, \quad f \in X^*,$$

ορίζει νόρμα στον X^* .

Πρόταση II.2:

Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμ. υπόχωρος του X και $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό. Τότε, $\exists \tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό ώστε

$$\tilde{f}|_Y = f, \quad \|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Πρόταση II.3: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $x_0 \in X$. Τότε,

$$\|x_0\| = \max\{|f(x_0)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

Πόρισμα II.4: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα ώστε $X \neq \{0\}$. Τότε, $X^* \neq \{0\}$ και ο X^* χωρίζει σημεία.

Πρόταση II.5: Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός γραμμ. υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$. Τότε, $\exists f \in X^*$ ώστε

$$\|f\| = 1, \quad f|_Y = 0, \quad f(x_0) = d(x_0, Y).$$

Η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**} .

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $x \in X$. Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησιακό

$$e(x) : X^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad e(x)(f) = f(x), \quad \forall f \in X^*.$$

Τότε,

$$e(x) \in X^{**}, \quad \|e(x)\| = \|x\|.$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} & \sup\{|e(x)(f)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} = \\ & = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} = \|x\|, \end{aligned}$$

λόγω της Πρότασης I.4.

Συνεπώς, ορίζεται η γραμμική ισομετρία

$$e : X \rightarrow X^{**}$$

με

$$e(x)(f) = f(x), \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in X^*.$$

Ο παραπάνω γραμμική ισομετρία ονομάζεται **κανονική εμφύτευση** του X στον X^* .

Παρατήρηση: Η $e(X) \subseteq X^{**}$ χωρίζει σημεία στον X^* .

III. Συναρτησιακό του Minkowski.

Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $A \subset X$ απορροφούν (άρα $0 \in A$). Τότε, $\forall x \in X$, το σύνολο

$$\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$$

είναι μη κενό.

Ορισμός III.1. Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $A \subset X$ απορροφούν και κυρτό. Το **συναρτησιακό του Minkowski** για το σύνολο A είναι η απεικόνιση

$$p_A : X \rightarrow \mathbb{R}_+$$

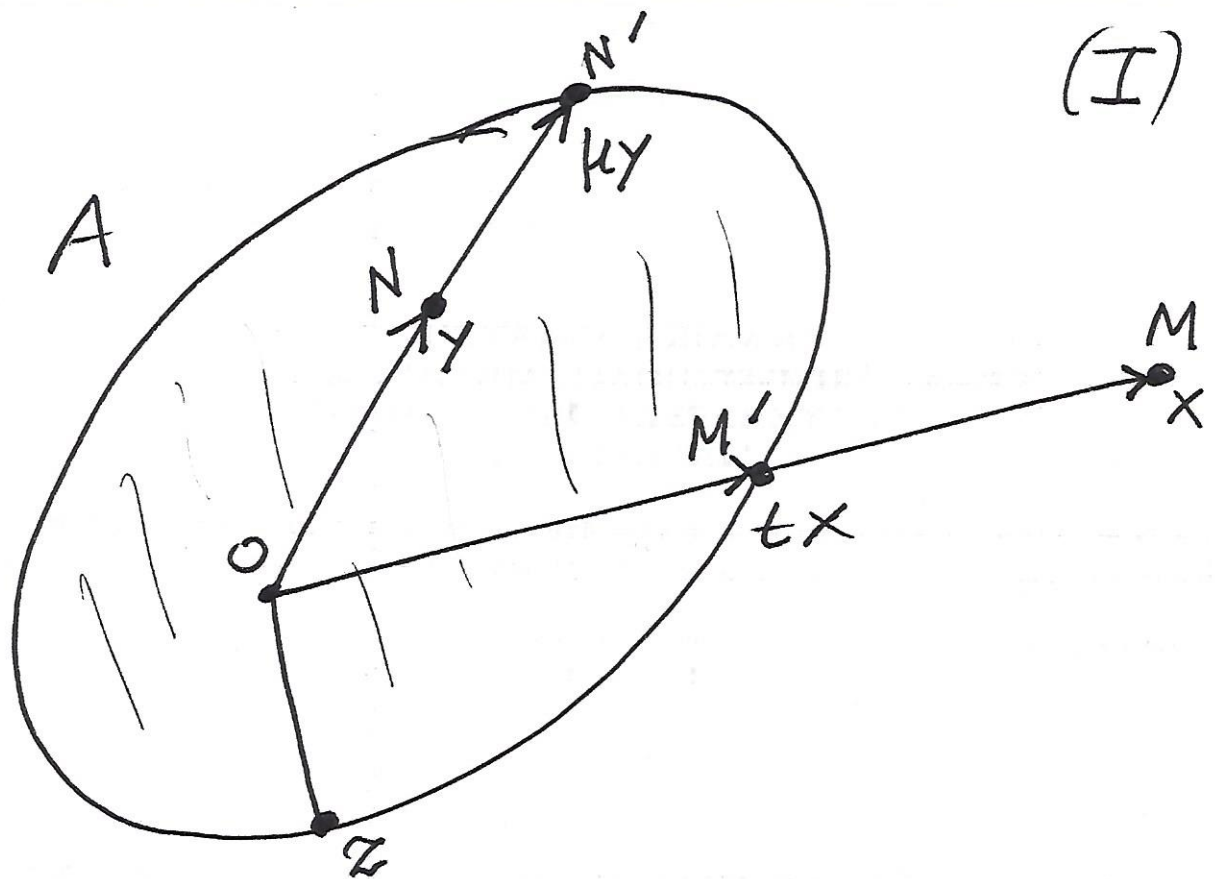
με

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}, \quad \forall x \in X.$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Το $p_A(x)$ “χονδρικά” ισούται με το πηλίκο $\frac{d(x, 0)}{d'_x}$, όπου

- $d(x, 0)$ η απόσταση του x από το 0
- d'_x η απόσταση από το 0 του πιο “απομακρυσμένου” σημείου του A στη διεύθυνση του x .



- $x \notin A \Rightarrow \frac{(OM)}{(OM')} > 1$

- $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \frac{(ON)}{(ON')} < 1$

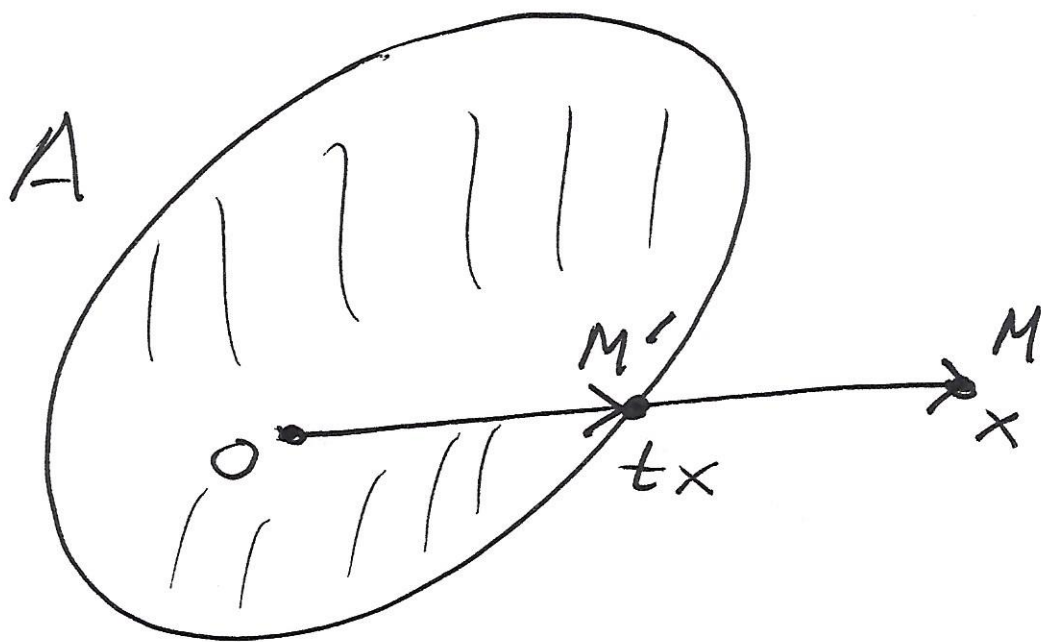
$$(OM) = d(x, O)$$

(OM') = η απόσταση από το O

του πιο "απομακρυσμένου" σημείου

του A στη διεύθυνση του x

(II)



$$\vec{OM'} = t \vec{OM}, \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(OM)}{(OM')} = 1/t.$$

$$t = \sup \{ s > 0 \mid sx \in A \}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} = \inf \left\{ \frac{1}{s} \mid s > 0, sx \in A \right\}$$

$$= \inf \left\{ \frac{1}{s} \mid s > 0, x \in \frac{1}{s}A \right\}$$

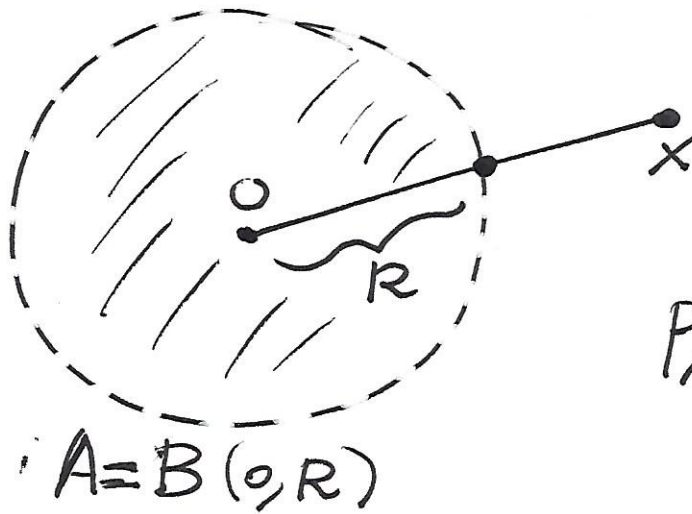
$$\boxed{\frac{(OM)}{(OM')} = \inf \{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda A \}}$$

(III)

Παραδείγματα

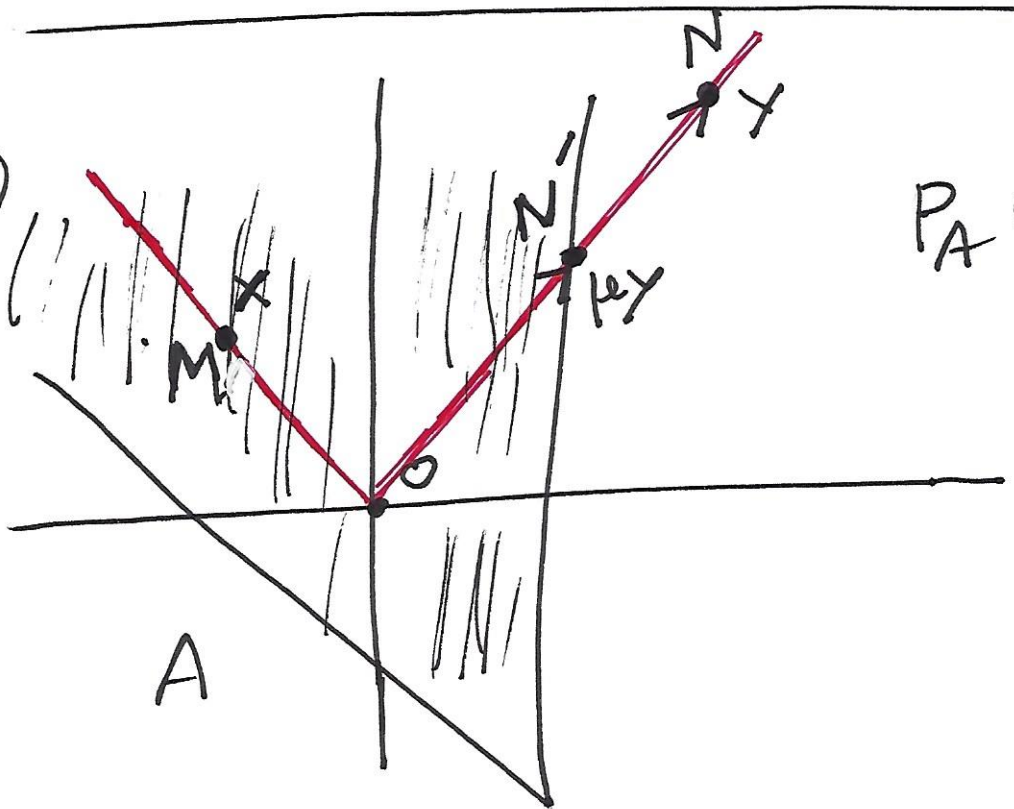
(i)

(X, ||·||)



$$P_A(x) = \frac{\|x\|}{R}$$

(ii)



$$P_A(y) = \frac{1}{\mu}$$

Η απόσταση από το O του πιο
"απομακρυσμένου" σημείου του A στη
διεύθυνση του x είναι ∞
 $\Rightarrow P_A(x) = \frac{\|OM\|}{\infty} = 0.$

(IV)

- Στων ορισμούς

$$P_A(x) = \inf \{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda A \}$$

το "inf" δεν είναι εν γένει
"min".

Π.χ. $A = B(0, 1)$ $P_A(x) = \|x\|$

Εάν $\lambda > 0$ με $x \in \lambda A$, τότε

$$\| \frac{1}{\lambda} x \| < 1 \Rightarrow \|x\| < \lambda$$

$$\Rightarrow P_A(x) < \lambda!$$

- Εάν $P_A(x) = 0$, δεν έπεται
εν γένει ότι $x = 0$

(βλ. παραδ. (ii), τριώ).

Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $A \subset X$ απορροφούν και κυρτό.

$$p_A : X \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}, \quad \forall x \in X.$$

Πρόταση III.1: Το p_A είναι θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό.

Απόδειξη: (μόνο για την υποπροσθετικότητα).

Έστω $x, y \in A$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists \lambda > 0, \mu > 0$ ώστε $x \in \lambda A, \lambda < p_A(x) + \varepsilon/2, y \in \mu A, \mu < p_A(y) + \varepsilon/2$.

Έχουμε

$$x+y \in \lambda A + \mu A = (\lambda + \mu) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} A + \frac{\mu}{\lambda + \mu} A \right) \subset (\lambda + \mu) A.$$

(σημ. ότι A κυρτό!).

Επομένως, $p_A(x+y) \leq \lambda + \mu < p_A(x) + p_A(y) + \varepsilon$ για τυχαίο $\varepsilon > 0$.

Άρα, $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$. □

Θέτουμε

$$(p_A < 1) = \{x : p_A(x) < 1\}, \quad (p_A \leq 1) = \{x : p_A(x) \leq 1\}.$$

Πρόταση III.2: Ισχύει

$$(p_A < 1) \subset A \subset (p_A \leq 1).$$

(Άσκηση.)

Πρόταση III.3: Εάν $0 \in A^\circ$, τότε:

(i) το p_A είναι συνεχές.

(ii) $A^\circ = (p_A < 1)$, $\bar{A} = (p_A \leq 1)$.

Απόδειξη: (i) Το p_A είναι υπογραμμικό και φραγμένο σε περιοχή του 0, άρα συνεχές.

(ii) **Ισχυρισμός:**

Αν $G \subset X$ ανοικτό και $x_0 \in G$, τότε $\exists 0 < s < 1 < t$ ώστε $sx_0, tx_0 \in G$.

[Πράγματι, η απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X, \quad \varphi(t) = tx_0,$$

είναι συνεχής και $1 \in \varphi^{-1}(G) =$ ανοικτό στον \mathbb{R} .

Άρα, $\exists \delta > 0$ με $\varphi((1 - \delta, 1 + \delta)) \subset G$.

Επιλέγουμε $s \in (1 - \delta, 1)$, $t \in (1, 1 + \delta)$.]

Έστω $x_0 \in A^\circ$, $y_0 \in X \setminus \bar{A}$. Επιλέγουμε $s \in (0, 1)$, $t > 1$ ώστε

$$tx_0 \in A^\circ \subset A, \quad sy_0 \in X \setminus \bar{A} \subset X \setminus A.$$

Πρότ. III.2 $\implies p_A(x_0) \leq 1/t < 1$, $p_A(y_0) \geq 1/s > 1$.

Άρα, $A^\circ \subset (p_A < 1)$, $X \setminus \bar{A} \subset (p_A > 1) \implies (p_A \leq 1) \subset \bar{A}$.

Επειδή $(p_A < 1)$ ανοικτό και $(p_A \leq 1)$ κλειστό, το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση III.2 \square

Πρόταση III.4: Εάν $0 \in A^\circ$, τότε

$$p_A = p_{A^\circ} = p_{\overline{A}} .$$

Απόδειξη: $A^\circ \subset A \subset \overline{A} \implies p_{\overline{A}} \leq p_A \leq p_{A^\circ}$.

Ας υποθέσουμε ότι $p_A(x) < p_{A^\circ}(x)$, για κάποιο $x \in X$.

Επιλέγουμε $s > 0$ με $p_A(x) < s < p_{A^\circ}(x)$.

Τότε, λόγω των Πρωτ. III.2, III.3,

$$p_A\left(\frac{1}{s}x\right) < 1 \implies \frac{1}{s}x \in A^\circ \implies p_{A^\circ}\left(\frac{1}{s}x\right) \leq 1 \implies p_{A^\circ}(x) \leq s,$$

άτοπο!

Άρα, $p_A = p_{A^\circ}$.

Όμοια, $p_A = p_{\overline{A}}$ (άσκηση!). □

Πόρισμα III.5: Έστω C κυρτό με $C^\circ \neq \emptyset$. Τότε:

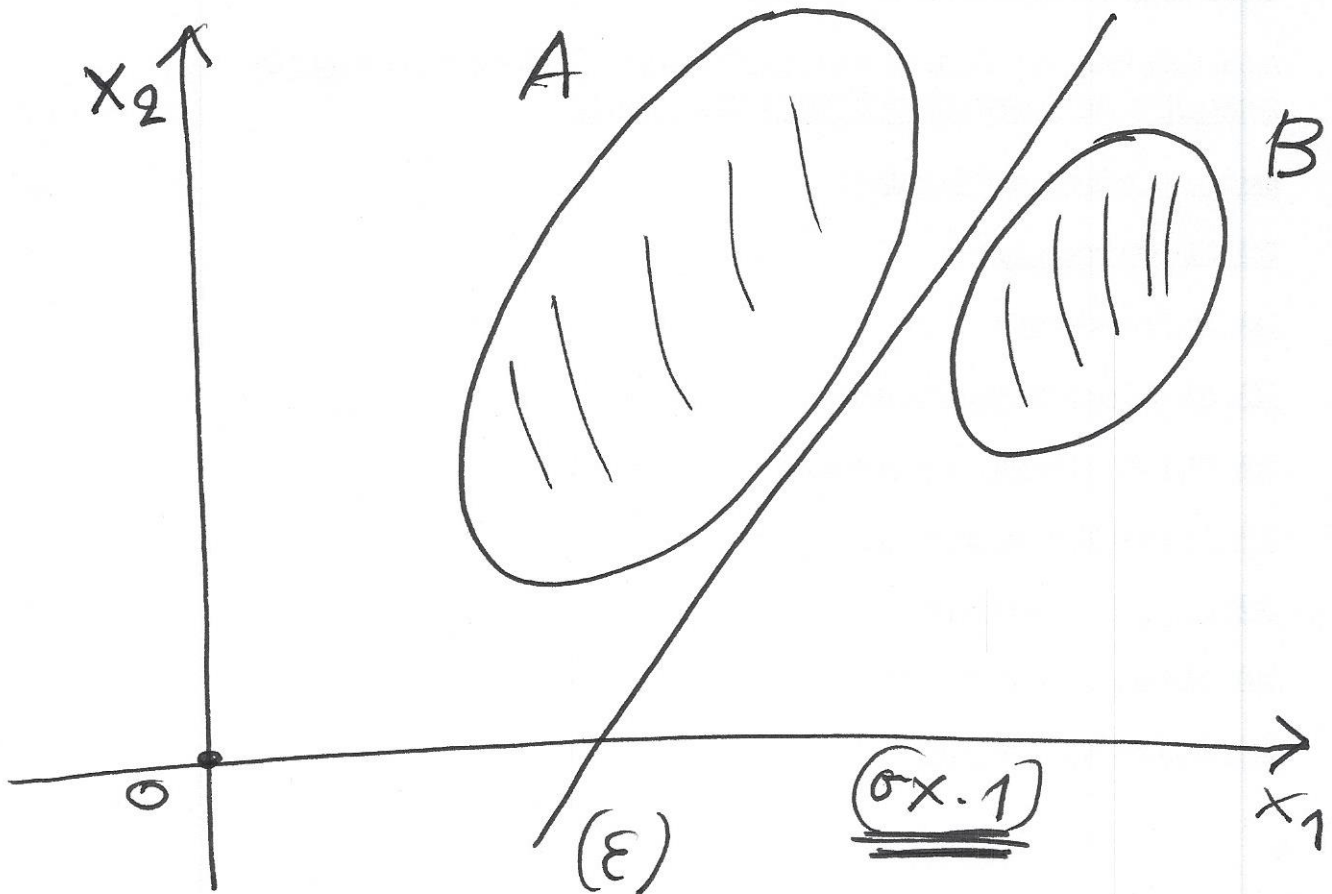
(i) $\overline{C^\circ} = \overline{C}$, $(\overline{C})^\circ = C^\circ$.

(ii) Εάν V ανοικτό κυρτό με $\overline{V} = \overline{C}$, ισχύει $V = C^\circ$.

Η απόδειξη βασίζεται στις Προτάσεις III.3, III.4. (άσκηση!)

Γεωμετρικά Θ. Η - Β

①



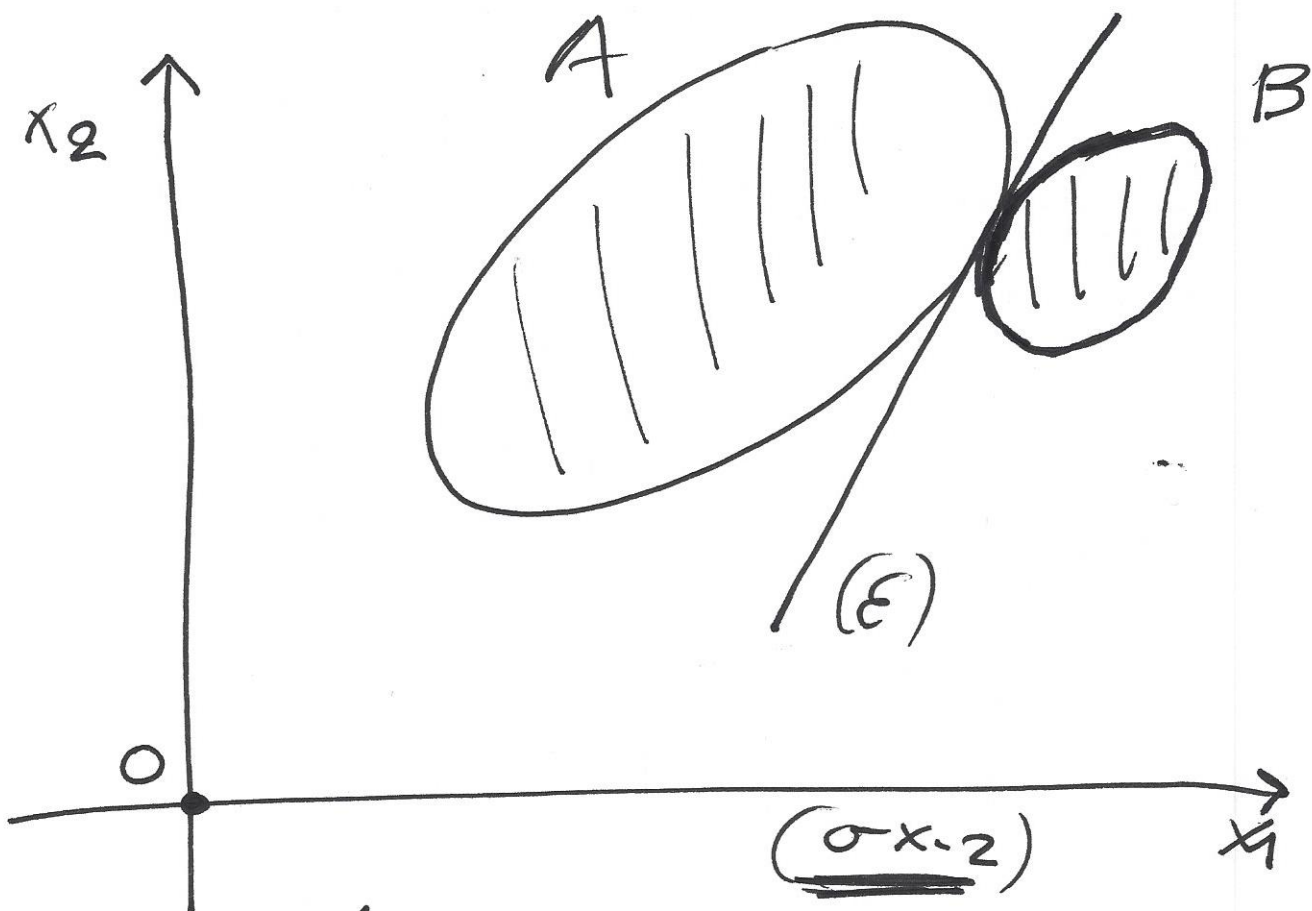
A, B κωτά $\subset \mathbb{R}^2$, $A \cap B = \emptyset$
 \exists ευθεία (E) που "διαχωρίζει"
γνήσια τα A, B , δηλ.

- A βρίσκεται αριστερά της (E)
- B " δεξιά " " "
- τα A, B δεν έχουν κοινά σημεία με την (E) .

Εάν $(E) : a_1 x_1 + a_2 x_2 = \lambda$ (2)
($\lambda \in \mathbb{R}, a_1 > 0$), τότε στο (σ.κ.1),

$$A \subset \{ (x_1, x_2) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 < \lambda \}$$

$$B \subset \{ (x_1, x_2) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 > \lambda \}$$



A, B ταυτά, $A^\circ \cap B = \emptyset$

$$A \subset \{ (x_1, x_2) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq \lambda \}$$

$$B \subset \{ (x_1, x_2) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq \lambda \}$$

3

Εάν $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

τότε f γραμμικό (συνεχές)

συναρτησιακό 5/

→ (σχ. 1) $A \subset (f < \lambda), B \subset (f > \lambda)$

οπότε $(f < \lambda) = f^{-1}((-\infty, \lambda))$

$(f > \lambda) = f^{-1}(\lambda, +\infty)$

→ (σχ. 2) $A \subset (f \leq \lambda), B \subset (f \geq \lambda)$

οπότε $(f \leq \lambda) = f^{-1}((-\infty, \lambda])$

$(f \geq \lambda) = f^{-1}([\lambda, +\infty))$

IV. Γεωμετρικά (διαχωριστικά) **Θ. Hahn - Banach.**

Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος. Θέτουμε

$$X^* = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ γραμμικό, συνεχές}\}.$$

Πρόταση IV.1: Έστω $A \subset X$ κυρτό με $0 \in A^\circ$, $x_0 \notin A^\circ$.
Τότε, $\exists f \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε

$$\sup f(A) \leq f(x_0).$$

Απόδειξη: Πρόταση III.3 $\Rightarrow p_A(x_0) \geq 1$.

Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό $g : \langle x_0 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(tx_0) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- $\forall t \geq 0, g(tx_0) = t \leq tp_A(x_0) = p_A(tx_0)$.
- $\forall t < 0, g(tx_0) = t < 0 \leq p_A(tx_0)$.

Επομένως, $g(y) \leq p_A(y), \quad \forall y \in \langle x_0 \rangle$.

Αναλυτικό Θ. Hahn-Banach $\Rightarrow \exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό
ώστε

$$f|_{\langle x_0 \rangle} = g, \quad f(x) \leq p_A(x), \quad \forall x \in X.$$

Ειδικότερα, $f(x_0) = g(x_0) = 1$.

Υπενθ.: Πρόταση III.2 $\Rightarrow A \subset (p_A \leq 1)$.

Επιλέγουμε $V \in \mathcal{N}_0$ **ισορροπημένο** με $V \subset A^\circ$.

Έχουμε

$$\pm f(V) = f(V) \subset f(A) \subset [-\infty, 1] \Rightarrow \sup_{v \in V} |f(v)| \leq 1$$

$\Rightarrow f$ φραγμένο σε περιοχή του 0 $\Rightarrow f \in X^*$.

Τέλος, $\forall x \in A$,

$$f(x) \leq p_A(x) \leq 1 = f(x_0).$$

□

Πρόταση IV.2: Έστω $A \subset X$ κυρτό με $A^\circ \neq \emptyset$ και $x_0 \notin A^\circ$. Τότε, $\exists f \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε

$$\sup f(A) \leq f(x_0).$$

Για την απόδειξη, επιλέγουμε $a \in A^\circ$ κι εφαρμόζουμε την Πρόταση IV.1 για " A " = $A - a$, " x_0 " = $x_0 - a$.

Οι λεπτομέρειες ως άσκηση.

Για τη συνέχεια, υπενθυμίζουμε το παρακάτω

Πόρισμα III.5: Έστω C κυρτό με $C^\circ \neq \emptyset$. Τότε:

(i) $\overline{C^\circ} = \overline{C}$, $(\overline{C})^\circ = C^\circ$.

(ii) Εάν V ανοικτό κυρτό με $\overline{V} = \overline{C}$, ισχύει $V = C^\circ$.

Θεώρημα: IV.3 (1η μορφή γεωμετρικού Θ. Hahn-Banach): Έστω $A, B \subset X$ κυρτά τέτοια ώστε

$$A^\circ \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad A^\circ \cap B = \emptyset.$$

Τότε, $\exists f \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε $\sup f(A) \leq \inf f(B)$.

Απόδειξη: Θέτουμε $V = A^\circ - B$, $C = A - B$. Τότε,

- V, C είναι κυρτά, μη κενά και το V είναι ανοικτό.
- $0 \notin V$.

Επιπλέον, Πρόρισμα III.5(i) $\Rightarrow \overline{A^\circ} = \overline{A}$.

Έχουμε

$$V \subset C \subset \overline{A} - \overline{B} = \overline{A^\circ} - \overline{B} \subset \overline{A^\circ - B} = \overline{V}$$

$$\Rightarrow \overline{C} = \overline{V} \Rightarrow C^\circ = V \text{ [βλ. Πρόρισμα III.5(ii)]}$$

$$\Rightarrow 0 \notin C^\circ.$$

Πρόταση IV.2 $\Rightarrow \exists f \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε

$$\sup f(C) \leq f(0) = 0 \Leftrightarrow \sup f(A - B) \leq 0.$$

Λόγω γραμμικότητας της f , προκύπτει ότι

$$\sup f(A) \leq \inf f(B).$$

□

Ορισμός IV.4 Ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος λέγεται **τοπικά κυρτός** αν έχει μια βάση περιοχών του 0 που αποτελείται από κυρτά σύνολα.

Παραδείγματα:

(α) Ένας χώρος με νόρμα είναι τοπικά κυρτός τ.γ.χ.

(β) Έστω X γραμμικός χώρος, $\Phi \subset X^\#$ που χωρίζει σημεία και \mathcal{T}_Φ η ασθενής τοπολογία που επάγει η Φ .

Τότε, ο (X, \mathcal{T}_Φ) είναι τοπικά κυρτός τ.γ.χ.

Πράγματι, μια βάση περιοχών του 0 αποτελείται από πεπερασμένες τομές συνόλων της μορφής

$$f^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)), \quad f \in \Phi, \quad \varepsilon > 0,$$

τα οποία είναι προφανώς κυρτά.

Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος.

Λήμμα IV.5: $\forall V \in \mathcal{N}_0, \exists W \in \mathcal{N}_0$ κυρτό, ώστε

$$W + W \subset V.$$

Άσκηση!

Λήμμα IV.6: Εάν K συμπαγές και F κλειστό με $K \cap F = \emptyset$, τότε $\exists V \in \mathcal{N}_0$ κυρτό ώστε $(K + V) \cap F = \emptyset$.

Άσκηση! [Υπόδ.: $\forall x \in K, \exists W_x \in \mathcal{N}_0$ κυρτό, ώστε

$$(x + W_x + W_x) \cap F = \emptyset.$$

Η $\{x + W_x\}_{x \in K}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του K .]

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ γε ακριβώς, $f \neq 0$

Λήμμα IV.7: (για τυχαίο τ.γ.χ.!)

$\forall f \in X^* \setminus \{0\}$, η f είναι ανοικτή.

Απόδειξη: Είναι $f(X) = \mathbb{R} \Rightarrow \exists z \in X$ με $f(z) = 1$.

Έστω $V \in \mathcal{N}_0 \Rightarrow V$ απορροφούν, οπότε $\exists \delta > 0$ με $(-\delta, \delta) \cdot z \subset V$.

Τότε, $(-\delta, \delta) \subset f(V) \Rightarrow 0 \in (f(V))^\circ$.

Εάν $G \subset X$ ανοικτό μη κενό και $x \in G$, εφαρμόζουμε το παραπάνω για $V = G - x$. \square

(+) Η υπόθεση "K συμπαγές" δεν μπορεί να παραλειφθεί.
 Π.χ. $X = \mathbb{R}^2$, $K = \{(x, y) : y \geq \frac{1}{x}, x > 0\}$, $F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$
 K, F κλειστά κυρτά ξένα κ' K όχι συμπαγές. Τα K, F δεν διαχωρίζονται γνήσια με ευθεία.



Θεώρημα: IV.8: (2η μορφή γεωμετρικού Θ. Hahn-Banach):

Έστω K, F κυρτά, μη κενά, ώστε $K \cap F = \emptyset$, K συμπαγές και F κλειστό. Τότε, $\exists f \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε

$$\max f(K) < \inf f(F).$$

Απόδειξη: Λήμμα IV.6 $\Rightarrow \exists V \in \mathcal{N}_0$ κυρτό ώστε

$$(K + V) \cap F = \emptyset.$$

Το $H = K + V$ είναι ανοικτό, κυρτό, μη κενό, οπότε

Θεώρημα IV.3 $\Rightarrow \exists f \in X^* \setminus \{0\}$ με

$$\sup f(H) \leq \inf f(F) = \lambda.$$

Τότε, $f(H)$ ανοικτό λόγω πρὸτ. IV-7

$$f(H) \subset (-\infty, \lambda] \Rightarrow f(H) \subset (-\infty, \lambda) \Rightarrow f(K) \subset (-\infty, \lambda).$$

Επειδή K συμπαγές και f συνεχής, υπάρχει το $\max f(K)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\max f(K) < \lambda$. (+) \square