Υποδιαφορικό κυρτής συνάρτησης

Έστω X χώρος με νόρμα κ' $\varphi : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση.

$\mathrm{epi}\,\varphi = \{(u,\lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \le \lambda\}$ – επιγράφημα της φ.

Πρόταση 1: Έστω $\varphi : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση.

(i) Εάν $(u_0, \lambda_0) \in \mathrm{Int}(\mathrm{epi}\,\varphi)$, τότε $\varphi(u_0) < \lambda_0$.

(ii) Εάν $\varphi(u_0) < \lambda_0$ κ' φ συνεχής στο u_0, τότε $(u_0, \lambda_0) \in \mathrm{Int}(\mathrm{epi}\,\varphi)$.

(iii) Εάν φ συνεχής, τότε

$$\mathrm{Int}(\mathrm{epi}\,\varphi) = \{(u,\lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) < \lambda\}.$$

Απόδειξη: (i) $\exists\, \delta > 0$ ώστε $\forall (u,\lambda) \in X \times \mathbb{R}$ με

$$\|u - u_0\| < \delta, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta,$$

έχουμε

$$\varphi(u) \le \lambda.$$

Θέτουμε $u = u_0$, $\lambda = \lambda_0 - \frac{\delta}{2}$. Τότε, $\|u - u_0\| = 0 < \delta$ κ' $|\lambda - \lambda_0| = \delta/2 < \delta$, οπότε

$$\varphi(u_0) \le \lambda < \lambda_0.$$

(ii) Επιλέγω $\varepsilon > 0$ με $\varphi(u_0) + \varepsilon < \lambda_0$. Λόγω συνέχειας της φ στο u_0, $\exists\, \delta > 0$ ώστε

$$\|u - u_0\| < \delta \Rightarrow \varphi(u) < \varphi(u_0) + \varepsilon.$$

Επιλέγω $0 < \eta < \lambda_0 - \varphi(u_0) - \varepsilon$. Τότε, για $\|u - u_0\| < \delta$, $|\lambda - \lambda_0| < \eta$, έχουμε

$$\varphi(u) < \varphi(u_0) + \varepsilon < \lambda_0 - \eta < \lambda$$

δηλ. $(u,\lambda) \in \mathrm{epi}\,\varphi$.

(iii) Άμεσο, από (i), (ii).

$\boxtimes$

Διαχωριστικά Θεωρήματα Hahn–Banach

- **(H-B-V1)** Έστω $A, B \subseteq X$ κυρτά, μη κενά, με
$$Int(A) \neq \emptyset, \qquad Int(A) \cap B = \emptyset.$$
Τότε, $\exists\, x^* \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε $\sup_A x^* \le \inf_B x^*$.

- **(H-B-V2)** Έστω $A, B \subseteq X$ κυρτά, μη κενά με A κλειστό, B συμπαγές κ' $A \cap B = \emptyset$.
Τότε, $\exists\, x^* \in X^*$ ώστε
$$\sup_A x^* < \inf_B x^*.$$

Πρόταση 2: Έστω $\varphi : X \to \mathbb{R}$ κυρτή. Εάν φ συνεχής στο $u_0 \in X$, τότε $\partial\varphi(u_0) \neq \emptyset$, δηλ.
$\exists\, x^* \in X^* \mid \forall u \in X,\ \varphi(u) \ge \varphi(u_0) + \langle x^*, u - u_0 \rangle$.

Απόδειξη:

Από Πρότ. 1 (i), $(u_0, \varphi(u_0)) \notin Int(epi\varphi)$.
Επιπλέον, επειδή φ συνεχής στο u_0, από Πρότ. 1 (ii) έχουμε
$$Int(epi\varphi) \neq \emptyset.$$
Εφαρμόζοντας το (H-B-V1) για
$$A = epi\varphi, \qquad B = \{(u_0, \varphi(u_0))\}$$
παίρνουμε $\Phi \in (X \times \mathbb{R})^*$ ώστε $\Phi \neq 0$ κ'
$$\boxed{\sup_A \Phi \le \Phi(u_0, \varphi(u_0)).} \qquad (1)$$

Θέτουμε $z^* : X \to \mathbb{R}$, $\langle z^*, u \rangle = \Phi(u, 0)$ κ' $k_0 = \Phi(0, 1)$. Τότε, $\forall (u, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$,
$$\Phi(u, \lambda) = \langle z^*, u \rangle + \lambda k_0$$
Τώρα η (1) δίνει: $\forall (u, \lambda) \in epi\varphi$,
$$\langle z^*, u \rangle + \lambda k_0 \le \langle z^*, u_0 \rangle + k_0 \varphi(u_0), \qquad (2)$$

Ειδικότερα,

$$\langle z^*, u\rangle + k_0\varphi(u) \leq \langle z^*, u_0\rangle + k_0\varphi(u_0), \quad \forall u\in X. \quad (3)$$

Αν ήταν $k_0=0$, η (3) θα έδινε $\langle z^*, u-u_0\rangle \leq 0$, $\forall u\in X$
$\Rightarrow$ $z^*=0$. Τότε όμως κ' $\Phi\equiv 0$ (Άτοπο).

Άρα, $k_0\neq 0$.

Τώρα στην (2) θέτουμε $u=u_0$ κ' επιλέγουμε $\lambda > \varphi(u_0)$ κ' παίρνουμε

$$k_0\lambda \leq k_0\varphi(u_0) \Rightarrow k_0[\lambda-\varphi(u_0)]\leq 0$$
$$\Rightarrow \boxed{k_0<0}.$$

Η (3) τώρα δίνει $\forall u\in X$,

$$\langle \tfrac{1}{k_0}z^*, u\rangle + \varphi(u) \geq \langle \tfrac{1}{k_0}z^*, u_0\rangle + \varphi(u_0)$$

$$\Rightarrow \varphi(u) \geq \langle \tfrac{1}{k_0}z^*, u_0-u\rangle + \varphi(u_0).$$

Θέτοντας $x^* = -\frac{1}{k_0}z^*$, παίρνουμε τελικά

$$\varphi(u)\geq \langle x^*, u-u_0\rangle + \varphi(u_0), \quad \forall u\in X,$$

δηλ. $x^*\in\partial\varphi(u_0)$. $\boxtimes$

<u>Πρόταση 3:</u> Έστω $\varphi: X\to\mathbb{R}$ <u>κυρτή</u> κ' <u>κάτω ημισυνεχής</u>. Τότε, $\exists\, x^*\in X^*$ κ' $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\varphi(u)\geq \langle x^*, u\rangle + \mu, \quad \forall u\in X.$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $u_0\in X$ κ' $\lambda_0<\varphi(u_0)$. Το $A=\mathrm{epi}\,\varphi$ είναι <u>κυρτό</u>, <u>κλειστό</u> (διότι φ κυρτή, κάτω ημισυνεχής) κ' το $B=\{(u_0,\lambda_0)\}$ συμπαγές κυρτό με

$$A\cap B=\emptyset.$$

Από (H-B-V2), $\exists\, \Phi\in(X\times\mathbb{R})^*$ ώστε

$$\sup_A \Phi < \Phi(u_0,\lambda_0).$$

Όπως κ' στην απόδ. της Πρότ. 2,
$\exists\ z^* \in X^*$ κ' $k_0 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\boxed{\langle z^*, u\rangle + k_0\lambda < \langle z^*, u_0\rangle + k_0\lambda_0, \ \forall (u,\lambda) \in \operatorname{epi}\varphi} \quad (4)$$

Ειδικότερα,

$$\boxed{\langle z^*, u\rangle + k_0\varphi(u) < \langle z^*, u_0\rangle + k_0\lambda_0, \ \forall u \in X.} \quad (5)$$

Θέτω $u = u_0$ στην (5) κ' παίρνω

$$k_0[\varphi(u_0) - \lambda_0] < 0 \xrightarrow{\varphi(u_0) > \lambda_0} k_0 < 0.$$

Τώρα η (5) δίνει $\forall u \in X$,

$$\langle \tfrac{1}{k_0} z^*, u\rangle + \varphi(u) > \langle \tfrac{1}{k_0} z^*, u_0\rangle + \lambda_0$$

(ή)

$$\varphi(u) > \langle -\tfrac{1}{k_0} z^*, u\rangle + \langle \tfrac{1}{k_0} z^*, u_0\rangle + \lambda_0.$$

Αν θέσουμε $x^* = -\frac{1}{k_0} z^*$, $\mu = \langle \frac{1}{k_0} z^*, u_0\rangle + \lambda_0$,
τότε

$$\varphi(u) > \langle x^*, u\rangle + \mu, \quad \forall u \in X. \quad \boxtimes$$

Σχόλιο: Η Πρόταση 3 δεν σχετίζεται με το υποδιαφορικό της φ σε κάποιο σημείο.
Μας "λέει" απλώς ότι αν $\varphi: X \to \mathbb{R}$ κυρτή κάτω ημισυνεχής, τότε υπάρχει "ευθεία" "κάτω" από το γράφημα της φ.

Η Πρόταση 2 λέει κάτι καλύτερο αλλά για φ συνεχή στο u_0: υπάρχει ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(u_0, \varphi(u_0))$ κ' βρίσκεται "κάτω" από το γράφημα της φ