ΔΙΚΤΥΑ

Ορισμός 1: Έστω $\Lambda \neq \emptyset$ κ' $(\preceq)$ μια διμελής σχέση στο Λ. Η $(\preceq)$ λέγεται <u>προδιάταξη</u> ανν είναι <u>ανακλαστική</u> κ' <u>μεταβατική</u> δηλ.

- $\lambda \preceq \lambda, \ \forall \lambda \in \Lambda$
- αν $\lambda_1 \preceq \lambda_2, \ \lambda_2 \preceq \lambda_3$, τότε $\lambda_1 \preceq \lambda_3$.

<u>Π.χ.</u> Στο $\mathbb{C}$, ορίζουμε

$$z \preceq w \Leftrightarrow |z| \leq |w|.$$

Η $(\preceq)$ είναι <u>προδιάταξη</u>.

<u>Π.χ.</u> Η διαιρετότητα στο $\mathbb{Z}$ είναι

Ορισμός 2: Έστω $(\Lambda, \preceq)$ προδιατεταγμένο σύνολο. Το $(\Lambda, \preceq)$ λέγεται <u>κατευθυνόμενο</u> ανν $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$,

$$\exists \lambda_3 \in \Lambda \ | \ \lambda_1 \preceq \lambda_3, \ \lambda_2 \preceq \lambda_3$$

<u>Παραδείγματα:</u>

(i) $(\mathbb{N}, \leq)$ με τη συνηθισμένη διάταξη είναι κατευθυνόμενο, αφού:
$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, αν $n_3 = \max(n_1, n_2)$,
τότε $n_1 \leq n_3, \ n_2 \leq n_3$

<u>(ii)</u> Έστω X τοπολογικός χώρος, $x \in X$ κ' $\mathcal{B}_x$ βάση περιοχών του x.

$\forall\, U, W \in \mathcal{B}_x$, ορίζουμε

$$U \preceq W \Leftrightarrow U \supseteq W.$$

Τότε, $(\mathcal{B}_x, \preceq)$ κατευθυνόμενο.

Πράγματι· αν $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_x$, τότε

$\exists\, U_3 \in \mathcal{B}_x \,/\quad U_3 \subset U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow\quad U_1 \supset U_3$ κ' $U_2 \supset U_3$

$\Rightarrow\quad U_1 \preceq U_3,\ U_2 \preceq U_3.$

<u>Ορισμός 3:</u>

Έστω X σύνολο. <u>Δίκτυο</u> στο X είναι μια συνάρτηση

$$x : \Lambda \to X$$

όπου Λ κάποιο κατευθυνόμενο σύνολο.

<u>Σχόλιο:</u> Μια ακολουθία είναι δίκτυο με $(\Lambda, \preceq) = (\mathbb{N}, \leq)$.

<u>Ορισμός 4:</u> Έστω $x:(\Lambda, \preceq) \to X$ δίκτυο στο X. $\forall \lambda \in \Lambda$, το $x(\lambda)$ ονομάζεται <u>λ—όρος του δικτύου</u> και γράφουμε $x_\lambda = x(\lambda)$.

Ένα δίκτυο στο X συμβολίζεται με

$$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

όπου Λ κατευθυνόμενο σύνολο και $x_\lambda \in X$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

<u>Ορισμός 5:</u> Έστω X τοπολογικός χώρος, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ δίκτυο στο X κ' $x \in X$.

Θα λέμε ότι το $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ <u>συγκλίνει</u> στο x (γράφουμε $\underline{x_\lambda \to x}$) ανν $\forall$ περιοχή U του x, $\exists\, \lambda_0 \in \Lambda \,|\, x_\lambda \in U$, $\forall \lambda \succeq \lambda_0$.

<u>Σχόλιο:</u> Σε αντίθεση με τη σύγκλιση μιας ακολουθίας, ενδέχεται ένα δίκτυο να συγκλίνει στο x κ' <u>άπειροι όροι</u> του δικτύου να βρίσκονται <u>εκτός</u> κάποιας περιοχής του x.

<u>Παράδειγμα:</u> Το $(\mathbb{Z}, \leq)$, όπου $(\leq)$ η συνήθης διάταξη, είναι κατευθυνόμενο. Θεωρούμε το δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$

με $$x_\lambda = \begin{cases} \lambda, & \lambda \leq 0 \\ 1/\lambda, & \lambda > 0 \end{cases}.$$

Τότε, $x_\lambda \to 0$ ως προς τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$ αλλά $x_\lambda \notin (-1, 1)$, $\forall \lambda < 0$.

Παρατηρούμε επίσης το $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}}$ <u>δεν</u> είναι φραγμένο.

<u>Πρόταση 1:</u> Έστω X τοπολογικός χώρος κ' $A \subseteq X$, $x \in X$. Τότε, $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists$ δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} /$ $x_\lambda \in A, \forall \lambda \in \Lambda$ και $x_\lambda \to x$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Θεωρούμε το σύνολο $\Lambda = \mathcal{n}_x$ όλων των περιοχών του x εφοδιασμένο με τη διάταξη ($\preceq$):

$\forall\ U, W \in \Lambda,\ U \preceq W$ αν $U \supseteq W$.

Τότε, $(\Lambda, \preceq)$ κατευθυνόμενο (διότι $\forall\ U, W \in \Lambda = \mathcal{n}_x$, ισχύει $U \cap W \in \Lambda = \mathcal{n}_x$).

Αφού $x \in \bar{A}$, έχουμε ότι $\forall\ U \in \Lambda = \mathcal{n}_x$, $U \cap A \neq \phi$, δηλ. $\exists\ x_U \in U \cap A$.

Τότε, το δίκτυο $(x_U)_{U \in \Lambda}$ συγκλίνει στο x. Πράγματι, αν $W \in \mathcal{n}_x$, τότε $\forall\ U \in \mathcal{n}_x$ με $U \succeq W$ έχουμε

$x_U \in U \subseteq W$.

[Δηλ. αν $\lambda_0 = W$, τότε $\forall \lambda \in \Lambda$ με $\lambda \succeq \lambda_0$, ισχύει $x_\lambda \in W$.]

($\Leftarrow$) Έστω $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset A$ δίκτυο με

$$x_\lambda \to x.$$

Τότε, $\forall\, U$ περιοχή του x, $\exists\, \lambda_0 \mid \forall \lambda \in \Lambda$

με $\lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in U$. Ειδικότερα,

$$x_{\lambda_0} \in U \cap A \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset.$$

$\boxtimes$

<u>Πρόταση 2</u>: Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $f: X \to Y$ κ' $x_0 \in X$. Τότε, f συνεχής στο x_0 <u>ανν</u>

$\forall$ δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ με $x_\lambda \to x_0$, έχουμε $f(x_\lambda) \to f(x_0)$.

<u>Απόδειξη</u>: ($\Rightarrow$) Έστω $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ με $x_\lambda \to x_0$ κ' V περιοχή του $f(x_0)$ στον Y.

(f συνεχής στο x_0) $\Rightarrow \exists\, U$ περιοχή του x_0 στον X με $f(U) \subset V$. Αφού $x_\lambda \to x_0$, $\exists\, \lambda_0 \in \Lambda \mid \forall \lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in U$

$\Rightarrow f(x_\lambda) \in f(U) \subset V$, $\forall \lambda \geq \lambda_0$.

Άρα, $f(x_\lambda) \to f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι η f <u>δεν</u> είναι συνεχής στο x_0. Τότε, $\exists\, V$ περιοχή του $f(x_0)$ στον Y ώστε

$$\forall\, U \in \mathcal{N}_{x_0},\quad f(U) \not\subseteq V$$

δηλ. $\exists\, x_U \in U \,|\, f(x_U) \notin V$,

[όπου $\mathcal{N}_{x_0}$ το σύνολο των περιοχών του x_0.]

Το $(\mathcal{N}_{x_0}, \preceq)$ είναι κατευθυνόμενο με τη διάταξη $(\preceq)$: $\forall\, U, W \in \mathcal{N}_{x_0}$,

$$U \preceq W \iff U \supseteq W.$$

Το δίκτυο $(x_U)_{U \in \mathcal{N}_{x_0}}$ συγκλίνει στο x_0 $\xRightarrow{\text{Υπόθεση}}$ $f(x_U) \to f(x_0)$

$\Longrightarrow \exists\, U_0 \in \mathcal{N}_{x_0} \,|\, f(x_{U_0}) \in V$ (ΑΤΟΠΟ!).

$\boxtimes$

<u>Πρόταση 3:</u> Έστω X τοπολ.-γραμμ. χώρος κ' $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}^{(+)}$ δίκτυα στον X, $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν $x_\lambda \to x$, $y_\lambda \to y$, τότε

$$\alpha x_\lambda + \beta y_\lambda \to \alpha x + \beta y.$$

<u>Απόδειξη:</u> Άμεσο από Πρότ. 2 κ' τη συνέχεια των πράξεων. $\boxtimes$

<u>Σύγκλιση στην τοπολογία γινόμενο</u>

Έστω $S \neq \emptyset$, Y τοπολογικός χώρος κ' $E = Y^S = \{\rho : S \to Y \mid \rho \text{ συνάρτηση}\}$.

$\forall x \in S$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\delta_x : E \to Y$$

με $\quad \delta_x(\rho) = \rho(x), \ \forall \rho \in E.$

Η <u>τοπολογία-γινόμενο</u> τ στο E είναι η μικρότερη τοπολογία στο E για την →

(+) Λ <u>κοινό</u> κατευθυνόμενο σύνολο.

οποία ισχύει

$$\delta_x \text{ συνεχής }, \ \forall x \in S.$$

Μια **υποβάση** για την τ είναι η

$$\mathcal{J} = \{ \delta_x^{-1}(H) \mid H \text{ ανοικτό} \subset Y \}.$$

Πρόταση 4: Έστω $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset E$ δίκτυο κ' $\rho \in E$. Τότε,

$$\rho_\lambda \xrightarrow{\tau} \rho \quad \text{ανν} \quad \forall x \in S, \ \rho_\lambda(x) \to \rho(x).$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Άμεσο, από τη συνέχεια των $\delta_x : (E, \tau) \to Y$, $x \in S$ κ' την Πρόταση 2.

($\Leftarrow$) Έστω $G \in \tau$ με $\rho \in G$. Τότε, $\exists \ x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geq 1)$ στο S κ'

$H_1, H_2, \dots, H_n \subset Y$ ανοικτά $\mid$

$$\rho \in \bigcap_{j=1}^{n} \delta_{x_j}^{-1}(H_j) \subset G.$$

Λόγω της υπόθεσης, $\forall j$, $\rho_\lambda(x_j) \to \rho(x_j)$

$\Rightarrow \exists \ \lambda_j \in \Lambda \mid \ \forall \lambda \geq \lambda_j, \ \rho_\lambda(x_j) \in H_j$

(σημ. ότι $\forall j$, $\rho(x_j) \in H_j$).

Εφ' όσον $(\Lambda, \leq)$ κατευθυνόμενο,

$\exists \lambda_0 \in \Lambda \mid \lambda_0 \geq \lambda_j, \ 1 \leq j \leq n.$

Τότε, $\forall \lambda \geq \lambda_0, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

ισχύει $\quad p_\lambda(x_j) \in H_j$

$$\Rightarrow \delta_{x_j}(p_\lambda) \in H_j \Rightarrow p_\lambda \in \delta_{x_j}^{-1}(H_j)$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \geq \lambda_0,$$

$$p_\lambda \in \bigcap_{j=1}^{n} \delta_{x_j}^{-1}(H_j) \subset G.$$

Άρα, $p_\lambda \xrightarrow{\tau} p$. $\boxtimes$

<u>Πρόταση 5:</u> Έστω X γραμμικός χώρος κ' $\Phi \subset X^\#$ που χωρίζει σημεία κ' τ_Φ η τοπολογία που επάγεται στον X από την Φ. Έστω $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ δίκτυο κ' $x \in X$.

Τότε, $x_\lambda \xrightarrow{\tau_\Phi} x$ ανν $\forall f \in \Phi$,

$$f(x_\lambda) \to f(x).$$

(<u>Απόδειξη:</u> Άσκηση!)