Ασκήσεις στο Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα

1) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C xy$ όπου C είναι το τμήμα της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ στο 1ο τεταρτημόριο.

2) Ομοίως το $\int_C (x^2+y^2)$, όπου C η περιφέρεια κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $R>0$

3) $\int_C (xy+z)$, C η καμπύλη με εξίσωση $\vec{\gamma}(t)=(t-\sin t, 2, \cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$.

4) $\int_{\vec{\gamma}} 2xy\,dx + x^2 dy$, όπου $\vec{\gamma}(t)=(t,t^3)$, $t\in[0,1]$

5) $\int_{\vec{\gamma}} x\,dy - y\,dx$, $\vec{\gamma}$ η θετικά προσανατολισμένη έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$

6) $\int_{\vec{\gamma}} (3x^2-6yz)dx+(2y+3xz)dy+(1-4xyz^2)dz$, όπου $\vec{\gamma}(t)=(t,t^2,t^3)$, $t\in[0,1]$.

7) $\int_{\vec{\gamma}} zx^2 dx + z^2y^2 dy + z^3xy\,dz$, $\vec{\gamma}$ η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με εξίσωση: $x^2+y^2=9$, $z=3$.

8) Κάνοντας χρήση του Θ. Green υπολογίστε το $\int_C (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$ όπου C η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που προκύπτει από τα τμήματα των παραβολών $y=x^2$, $x=y^2$ από το $(0,0)$ στο $(1,1)$.

9) $\int_C e^{2} dx + \sin(\pi x)dy$, όπου C η κλειστή, θετικά προσανατολισμένη, πολυγωνική καμπύλη με κορυφές στα σημεία $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$.

10) Επαληθεύστε το Θ. Green με το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y)=(x^2y, xy)$ και το χωρίο του επιπέδου που φράσσουν οι καμπύλες με εξισώσεις $y=8-4x$, $x+y=5$, $x=0$, $y=0$

11) Υπολογίστε το $\int_C (1-y^2)dx + (xy-5)dy$ όπου C η αρνητικά προσανατολισμένη καμπύλη της οποίας το ίχνος είναι η ένωση των γραφημάτων των $y=x^2-2x$, $y=0$ για $x\in[0,2]$

12) Δείξτε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{F}(x,y)=(2x\cos(x^2)-ye^x, 4-e^x)$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου στο $\mathbb{R}^2$ και βρείτε μία συνάρτηση δυναμικό για το $\vec{F}$.

13) Όμοια για το $\vec{F}(x,y)=(4x^3y^3-3y^2+5, 3x^4y^2-6xy-4)$

14) Δείξτε ότι το δ.π. $\vec{F}(x,y)=\left((x+y+1)e^x-e^y, e^x-(x+y+1)e^y\right)$ είναι συντηρητικό και βρείτε μία συνάρτηση δυναμικό για το $\vec{F}$.

15) Δείξτε ότι το $\vec{F}(x,y,z)=(y, z\cos(yz)+x, y\cos(yz))$ είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^3$ και υπολογίστε το $\int_{\vec{\gamma}}\vec{F}$ για <u>κάθε</u> καμπύλη $\vec{\gamma}$ του $\mathbb{R}^3$ με αρχή το $(1,1,1)$ και πέρας το $(1,2,3)$.

16) Όμοια για το $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$

17) Υπολογίστε το $\int_C 2xy^2z\,dx+2x^2yz\,dy+(x^2y^2-2z)dz$ όπου C η καμπύλη "γάτος"

C

18) Υπολογίστε το $\int_{\vec{\gamma}} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}dx-\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}dy$ όπου $\vec{\gamma}$ η θετικά προσανατολισμένη έλλειψη $5x^2+7y^2=12$.

19) $\int_C \frac{-y}{4x^2+9y^2}\,dx + \frac{x}{4x^2+9y^2}\,dy$, C η θετικά προσανατολ. περιφέρεια $x^2+y^2=1$

20) $\int_C \left[\frac{y}{(x-1)^2+y^2}+2y\right]dx + \left[\frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}+2x\right]dy$, όπου C η θετικά προσανατολισμένη έλλειψη $200x^2+300y^2=400$.

21) $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, όπου C η αρνητικά προσανατολισμένη περιφέρεια $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

22) Θεωρούμε τις θετικά προσανατολισμένες περιφέρειες κύκλων: $C_1: (x-2)^2+y^2=9$. $C_2: (x+2)^2+y^2=9$. $C_3: x^2+y^2=25$. Επίσης το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y)$ είναι C^1 στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (-4,0), (4,0)\}$. Δίνεται ότι $\int_{C_1} \vec{F} = 11$, $\int_{C_2} \vec{F} = 9$, $\int_{C_3} \vec{F} = 13$. Υπολογίστε το $\int_C \vec{F}$ όπου C ο θετ. προσ. κύκλος $x^2+y^2=1$.