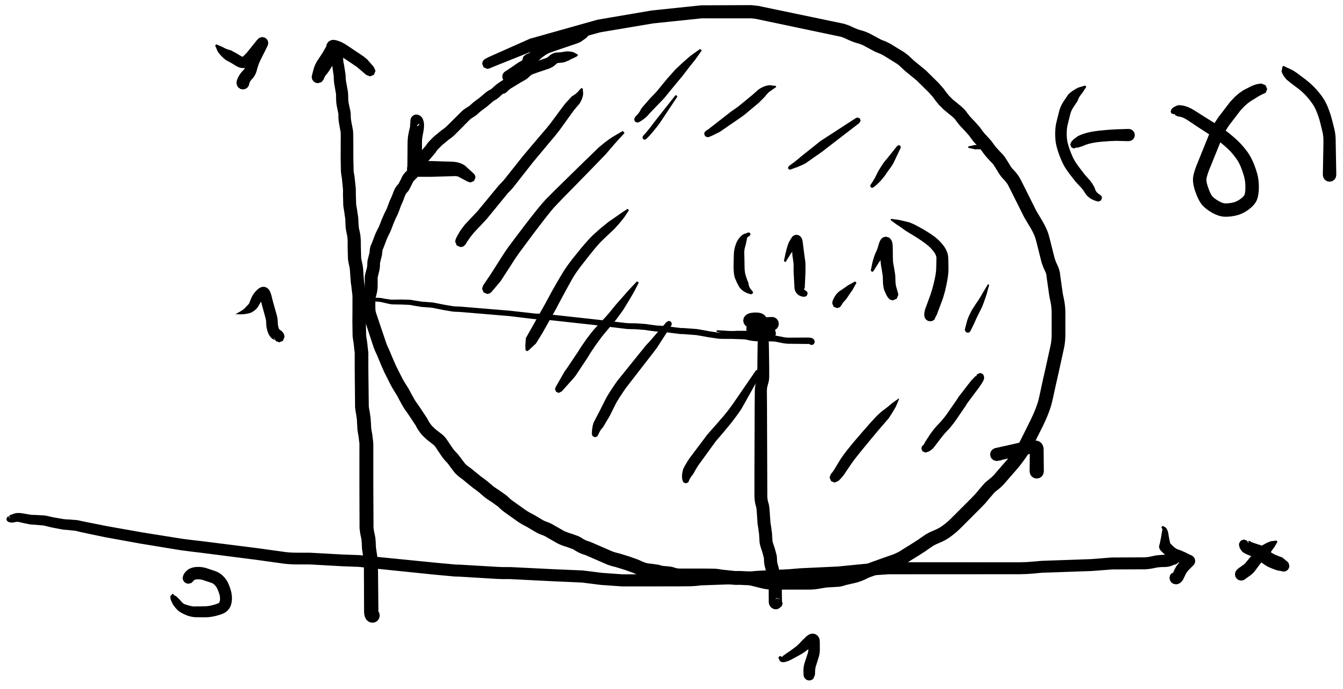
Άσκ. 21, φυλλ. επικαμπύλια

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = ;\qquad P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

γ: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ (αρνητ. προσανατολ.)

$(-\gamma)(t) = (1+\cos t,\ 1+\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$



$P_y = Q_x$ στο $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

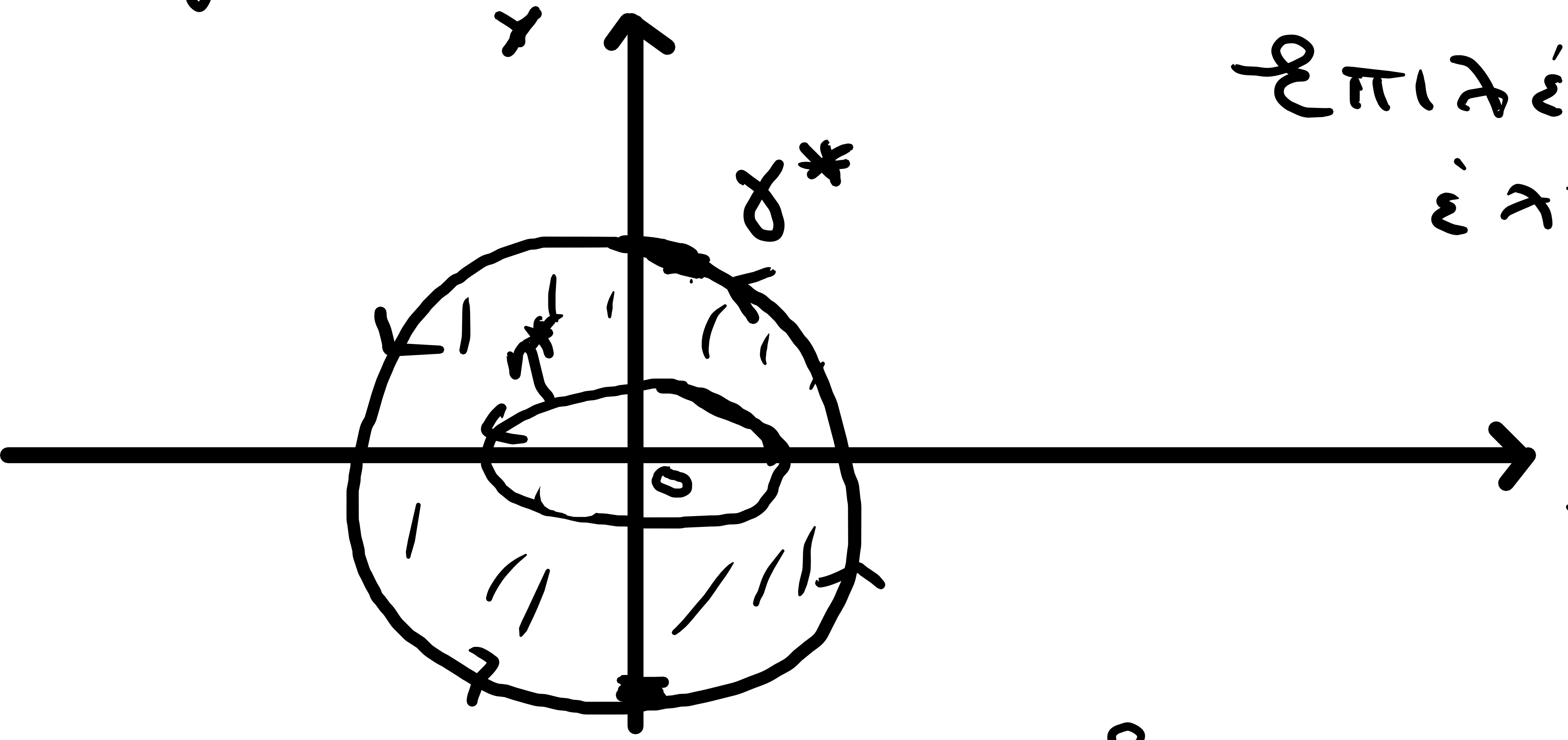
P, Q C^1 στο εσωτερικό της γ

Θ. Green $\Longrightarrow$ $\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = 0$

(18), φυλλ. επιπλέον.

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = ?, \quad P = -\frac{y}{4x^2+9y^2}, \quad Q = \frac{x}{4x^2+9y^2}$$

$\gamma: x^2+y^2=1$, θετικά προσαν.



Επιλέγω $\rho>0$ ώστε η έλλειψη

$\eta: 4x^2+9y^2=\rho^2$

να βρίσκεται στο εσωτερικό της γ.

(η θετικά προσαν.)

$\eta: x=\frac{\rho}{2}\cos t, \quad y=\frac{\rho}{3}\sin t, \quad t\in[0,2\pi]$

P, Q C^1 κ' $P_y = Q_x$ στο χωρίο μεταξύ των

γ^*, η^*

Δεξιά

Θεώρ(ημα)

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \int_\eta (P\,dx + Q\,dy)$$

$$= \int_\eta \left(-\frac{y}{4x^2+9y^2}\,dx + \frac{x}{4x^2+9y^2}\,dy \right)$$

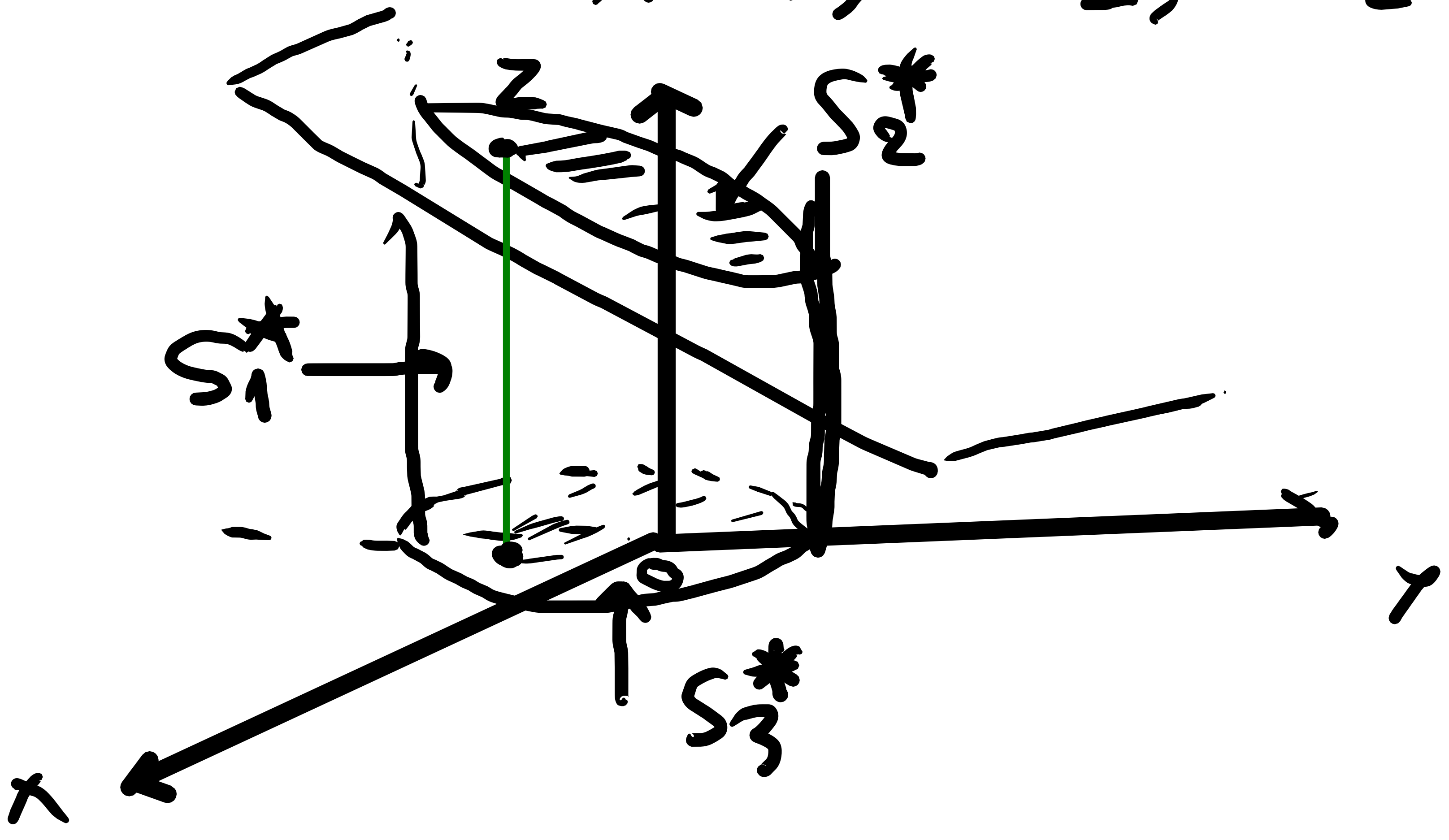
$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\frac{\rho}{3}\sin t}{\rho^2}\left(-\frac{\rho}{2}\right)\sin t + \frac{\frac{\rho}{2}\cos t}{\rho^2}\,\frac{\rho}{3}\cos t \right) dt$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} dt = \pi/3$$

Άσκ. 1, φυλλάδιο Gauss

Επαλήθ. του Θ. Gauss για $\vec{F} = (x, y, z)$ κ' το στερεό K που φράσσεται από

$x^2+y^2=1, \quad z=0, \quad z=x+2$



$$\iiint_K \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz =$$

$$= 3\iiint_K dxdydz$$

$$= 3\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_0^{x+2} dz\right)dxdy =$$

$$= 3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (x+2-0)\,dx\,dy \quad = 3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x\,dx\,dy + 6\underbrace{\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy}_{\pi}$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\varphi\, r\,dr\,d\varphi + 6\pi$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi}}_{0} \cdot \int_0^1 r^2\,dr + 6\pi = 6\pi$$

Θα δ.ο. η ροή του $\vec{F}$ μέσω της S ισούται με 6π, όπου $S^* = S_1^* \cup S_2^* \cup S_3^*$.

- $S_1(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\underline{z \in ?}$

$0 \leq z \leq x+2 \iff 0 \leq z \leq \cos\varphi + 2$

$$\Delta = \{ (\varphi, z) : \varphi \in [0, 2\pi], \quad 0 \leq z \leq \cos\varphi + 2 \}$$

$$\underline{S_1 : \Delta \to \mathbb{R}^3, \quad S_1(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)}$$

$\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S_1}{\partial z} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ (δείχνει προς τα έξω)

$$\Rightarrow \vec{n}(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

<u>Ροή του $\vec{F}$ μέσω της</u> $S_1 = \iint_{\Delta} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\varphi\, dz =$

$$= \iint_{\Delta} (\cos\varphi, \sin\varphi, z)\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\, d\varphi\, dz$$

$$= \iint_{\Delta} d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\cos\varphi + 2} dz \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + 2)\, d\varphi = 4\pi$$

$$S_2 : \Delta_2 \to \mathbb{R}^3, \quad S_2(u,v) = (u, v, \underbrace{u+2}_{f(u,v)})$$

$$\Delta_2 = \{(u,v) : u^2+v^2 \le 1\}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (-f_u, -f_v, 1) = (-1, 0, 1)$$

$$S_2(0,0) = (0,0,2)$$

$(-1, 0, 1)\cdot(0,0,2) = 2 > 0 \Rightarrow$ δείχνει προς τα έξω

$$\Rightarrow \vec{n}(u,v) = (-1, 0, 1)$$

$\Rightarrow$ <u>Ροή του $\vec{F}$</u> μέσω της S_2 ισούται με

$$\iint_{\Delta_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\, du\, dv = \iint_{\Delta_2} (u, v, u+2)\cdot(-1, 0, 1)\, du\, dv$$

$$= \iint_{\Delta_2} (-u + u + 2)\, du\, dv = 2\iint_{\Delta_2} du\, dv =$$

$$= 2\pi$$

$S_3 : \Delta_3 \to \mathbb{R}^3 \qquad S_3(u,v) = (u,v,0)$

$\Delta_3 = \{(u,v) : u^2+v^2 \le 1\}$

$\frac{\partial S_3}{\partial u} \times \frac{\partial S_3}{\partial v} = (0,0,1)$ $\quad S_3(0,0) = (0,0,0)$

$\to$ δείχνει έξω

Ροή του $\vec{F}$ μέσω της S_3:

$$\iint_{\Delta_3} \vec{F}\cdot\vec{n}\, du\, dv = \iint_{\Delta_3} (u,v,0)\cdot(0,0,1)$$

$$= \boxed{0!}$$

Συνολική ροή $= 4\pi + 2\pi + 0 = \underline{\underline{6\pi}}$

Επαληθεύεται!