ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
ΣΕΜΦΕ - Ε.Μ.Π.
02/07/2024
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 Ω.

ΘΕΜΑ 1 (2,5 μ.): Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int\int_D \frac{(x+2y)^3}{(\ 2x^2+5y^2+2xy\ )^{3/2}}dxdy,$$

όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+5y^2+2xy\leq 1,\ 1\leq 2x+4y\leq 2\}$.
[*Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιήσετε το μετασχηματισμό $u=x+2y,\ v=x-y$.]

ΘΕΜΑ 2 (1,5 μ.): Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I=\oint_\gamma \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\,dx+\frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}\,dy\ ,$$

όπου γ η θετικά προσανατολισμένη έλλειψη $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

ΘΕΜΑ 3 (2,5 μ.): Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(\ x^2e^z-2xye^{y^2},\ e^{y^2},\ z-2xe^z\ \right),\quad x,y,z\ \in\ \mathbb{R}.$$

Με χρήση του θεωρήματος του Gauss, να υπολογίσετε τη ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της επιφάνειας που είναι το σύνορο του στερεού

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\leq z,\quad x^2+y^2+z^2\leq 2z\ \}.$$

ΘΕΜΑ 4 (3,5 μ.): Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Stokes για το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x,y,z)=(\ y^2,\ z^2,\ x^2\ ),\quad x,y,z\ \in\ \mathbb{R}$$

και το τμήμα της επιφάνειας του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $z=0,\ z=x+1$.

Για τα θέματα 1, 4, δίνεται:

$$\int\cos^3\varphi d\varphi=\sin\varphi\ -\ \frac{1}{3}\sin^3\varphi.$$

Θ.1: Θέτουμε $u = x+2y$, $v = x-y$.

Η Ιακωβιανή του αντίστροφου μετασχηματισμού είναι

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -1/3$$

$$\Rightarrow |J| = 1/3.$$

Επιπλέον, $2x^2+5y^2+2xy =$

$$= (x^2+4xy+4y^2) + (x^2-2xy+y^2)$$

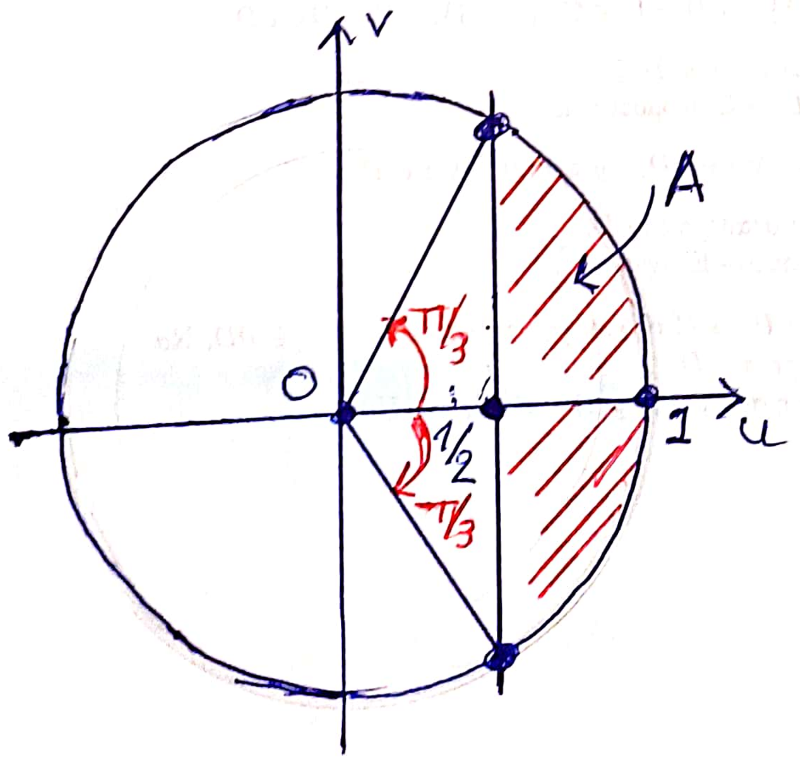
$$= (x+2y)^2 + (x-y)^2 = u^2+v^2.$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \frac{1}{3} \iint_A \frac{u^3}{(u^2+v^2)^{3/2}} \, du\,dv,$$

όπου $A = \{(u,v): u^2+v^2 \le 1,\ 1 \le 2u \le 2\}$

$= \{(u,v): u^2+v^2 \le 1,\ u \ge \frac{1}{2},\ u \le 1\}$



Πολικές συντεταγμ.

$u = r\cos\varphi$

$v = r\sin\varphi$

$$\boxed{-\pi/3 \le \varphi \le \pi/3}$$

$u \ge 1/2 \Leftrightarrow$

$r\cos\varphi \ge 1/2 \Leftrightarrow$

$$\boxed{r \ge \frac{1}{2\cos\varphi}}$$

(2)

$u^2+v^2 \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{r \leq 1}$

Η ανισότητα $u \leq 1$ ικανοποιείται

αφού $r\cos\varphi \leq \cos\varphi \leq 1$.

Τώρα έχουμε

$$I = \frac{1}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(\int_{\frac{1}{2\cos\varphi}}^{1} \frac{r^3\cos^3\varphi}{(r^2)^{3/2}}\, r\,dr\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3\varphi\left(\int_{\frac{1}{2\cos\varphi}}^{1} r\,dr\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3\varphi \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=\frac{1}{2\cos\varphi}}^{1} d\varphi$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3\varphi\left(1-\frac{1}{4\cos^2\varphi}\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^3\varphi - \frac{1}{24}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos\varphi\, d\varphi$$

(3)

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/3} \cos^3\varphi \, d\varphi - \frac{1}{12}\int_0^{\pi/3} \cos\varphi \, d\varphi$$

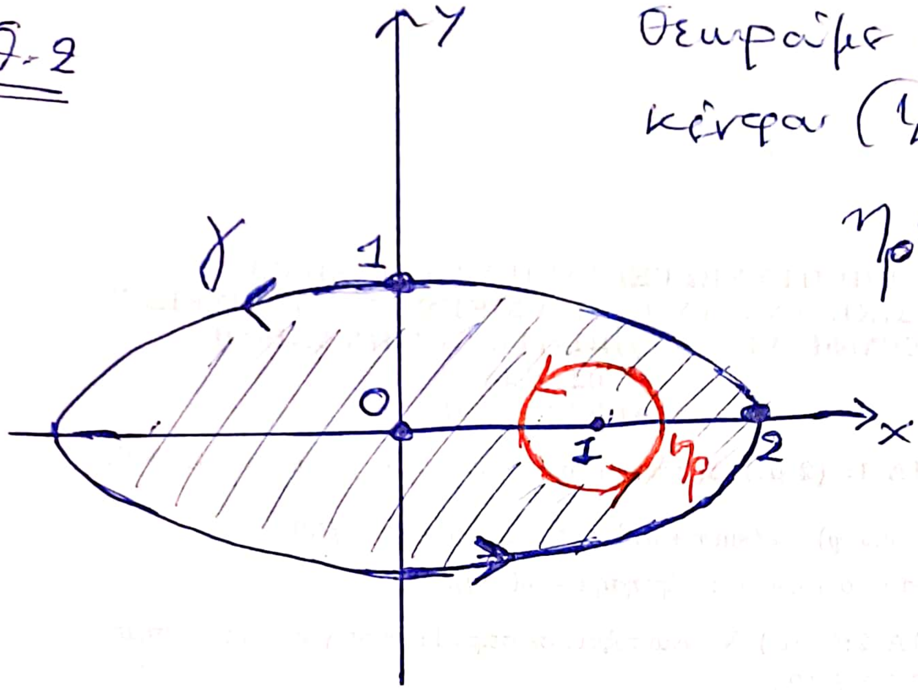
$$= \frac{1}{3}\left(\sin\varphi \Big|_0^{\pi/3} - \frac{1}{3}\sin^3\varphi \Big|_0^{\pi/3}\right) - \frac{1}{12}\sin\varphi \Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{4}\sin\varphi \Big|_0^{\pi/3} - \frac{1}{9}\sin^3\varphi \Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{9}\,\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{24} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{12}}$$

Θ-2



Θεωρούμε κύκλο η_ρ (4) κέντρου $(1,0)$ ώστε $\eta_\rho \subset \operatorname{int}\gamma$ με ακτίνα $\rho>0$

$$P=\frac{y}{(x-1)^2+y^2},\quad Q=\frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\varphi=(x-1)^2+y^2,\quad \varphi_x=2(x-1)$$
$$\varphi_y=2y$$

$$P_y=\frac{\varphi-y\varphi_y}{\varphi^2}=\frac{\varphi-2y^2}{\varphi^2},$$

$$Q_x=\frac{-\varphi-(1-x)\varphi_x}{\varphi^2}=\frac{-\varphi+2(x-1)^2}{\varphi^2}$$
$$=\frac{-\varphi+2(\varphi-y^2)}{\varphi^2}$$
$$=\frac{\varphi-2y^2}{\varphi^2}$$

$\Rightarrow P_y=Q_x$ στο χωρίο μεταξύ των γ, η_ρ

Από την Αρχή της Παραμόρφωσης, (5)

$$I = \int_{\gamma} (Pdx + Qdy) = \int_{\eta} (Pdx + Qdy).$$

$$\eta_{\rho}(t) = (x(t), y(t)), \quad x(t) = 1 + \rho\cos t$$
$$y(t) = \rho\sin t$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho\sin t(-\rho\sin t)}{\rho^2} + \frac{(-\rho\cos t)\rho\cos t}{\rho^2} \right] dt$$

$$= -2\pi.$$

<u>Θ.3.</u> $\operatorname{div}\vec{F} = \cancel{2xe^{z}} - \cancel{2ye^{y^2}} + \cancel{2ye^{y^2}} + 1 - \cancel{2xe^{z}} = 1$

$$\text{Ροή} = \iiint_K \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz = \iiint_K dxdydz:$$

Σφαιρικές συντεταγμένες:

$x = r\cos\varphi\sin\theta$ | $x^2+y^2+z^2 \le 2z$

$y = r\sin\varphi\sin\theta$ | ή $r^2 \le 2r\cos\theta$

$z = r\cos\theta$ | ή $\boxed{r \le 2\cos\theta}$

Επιπλέον, $\sqrt{x^2+y^2} \le z$

ή $r\sin\theta \le r\cos\theta$ ή $\tan\theta \le 1$

ή $\boxed{0 \le \theta \le \pi/4}$

και $\boxed{0 \le \varphi \le 2\pi}$

Η ζητούμενη ροή ισούται με

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\cos\theta} r^2\sin\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin\theta \, \frac{8}{3}\cos^3\theta \, d\theta$$

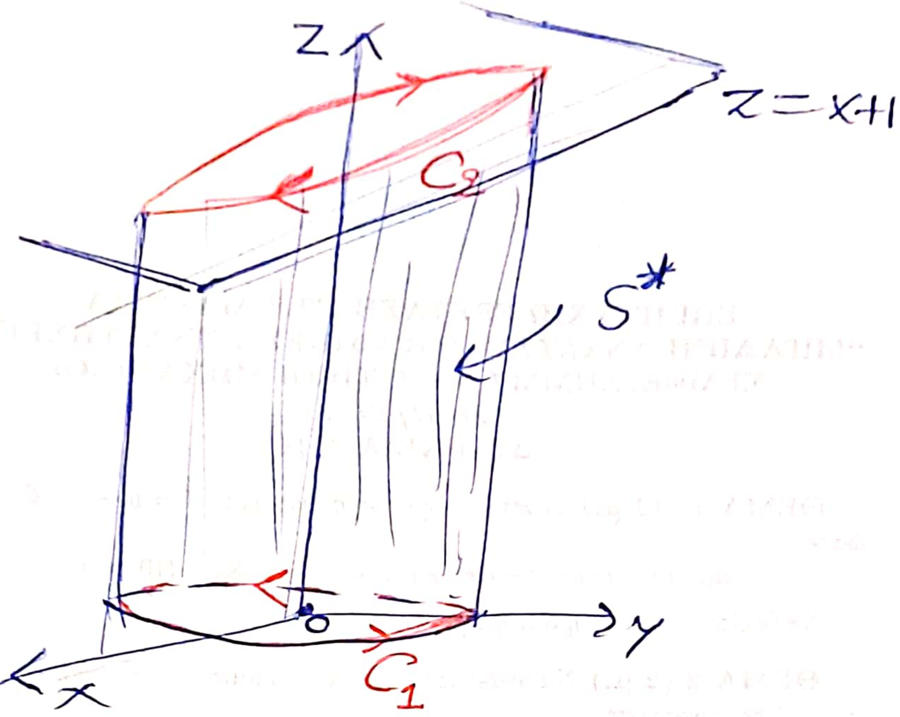
$$= \frac{16\pi}{3}\int_0^{\pi/4} \cos^3\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{16\pi}{3}\, \frac{1}{4}\cos^4\theta \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - 1\right] = \dots = \pi$$

Θ.4

(I)

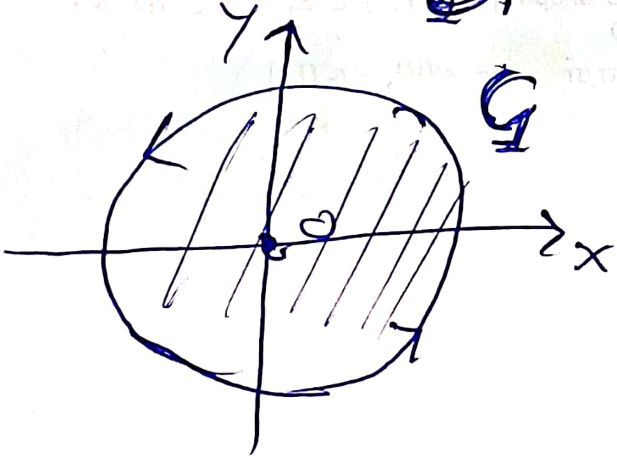


Το σύνορο της επιφάνειας S είναι $C_1 \cup C_2 = C$, όπου C_1, C_2 οι κύκλοι με τους προσανατολισμούς του σχήματος.

Είναι $\int_C \vec{F} = \int_{C_1} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{F}$

$$\to \int_{C_1} \vec{F} = \int_{C_1} \left(y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz \right) \overset{(z=0)}{=}$$

$$= \int_{C_1} y^2 dx =$$



$$\overset{(\text{Θ. Green})}{=} -2 \iint_{x^2+y^2 \le 1} y \, dx\,dy$$

$$\overset{(\text{πολικές})}{=} -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$= -2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi}_{0} \cdot \int_0^1 r^2 dr = 0$$

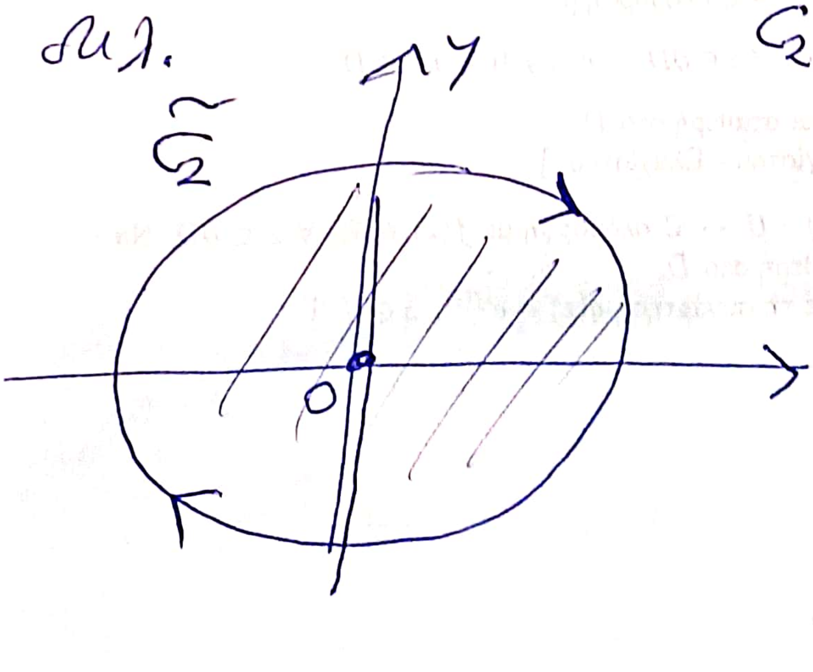
$$\rightarrow \int_{C_2} \vec{F} = \int_{C_2} \left(y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz \right)$$

$$\overset{(z=x+1)}{=} \int_{\tilde{C}_2} y^2 dx + (x+1)^2 dy + x^2 dx$$

$$= \int_{\tilde{C}_2} (y^2+x^2) dx + (x+1)^2 dy,$$

όπου $\tilde{C}_2$ η προβολή της C_2 στο xy-επίπεδο

δηλ.



$\tilde{C}_2$ ο αρνητικά προσανατολισμένος κύκλος $x^2+y^2=1$

Άρα, $\displaystyle\int_{C_2} \vec{F} \overset{(\Theta.\ Green)}{=}$

$$= -\iint_{(x^2+y^2\le 1)} \left[2(x+1)-2y\right] dx\,dy$$

$$= 2\iint_{(x^2+y^2\le 1)} (y-x-1)\, dx\,dy$$

$$= 2\iint_{(x^2+y^2\le 1)} (y-x)\, dx\,dy - 2\underbrace{\iint_{(x^2+y^2\le 1)} dx\,dy}_{\pi}$$

ή, $\displaystyle\iint_{(x^2+y^2\le 1)} (y-x)\, dx\,dy \overset{(\pi o\lambda\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma)}{=}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\, dr\, d\varphi$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)\, d\varphi}}_{0} \cdot \int_0^1 r^2\, dr = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} \vec{F} = -2\pi$$

ΓΕΝΙΚΑ:

$$\int_C \vec{F} = 0 - 2\pi = \boxed{-2\pi}$$

(II) Υπολογισμός ροής του $\operatorname{rot}\vec{F}$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2z, -2x, -2y) = -2(z, x, y).$$

Παραμέτρηση της επιφάνειας S με

S^*: $x^2+y^2=1$, $0 \le z \le x+1$:

$S(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$, $(\varphi, z) \in \Delta$, όπου

$\Delta = \{ (\varphi, z) / \varphi \in [0, 2\pi], 0 \le z \le \cos\varphi + 1 \}$

$$S_\varphi \times S_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$S(\varphi, z) \cdot (S_\varphi \times S_z) = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ το $S_\varphi \times S_z$ "δείχνει" εξωτερικά του S^* αν σχεδιαστεί με αρχή πάνω στο S^* $\Rightarrow$ $n(\varphi, z) = S(\varphi, z) =$

$= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$

Ροή του $rot\vec{F}$ διαμέσου της S = (11)

$$= \iint_\Delta rot\vec{F}(S(\varphi, z)) \cdot n(\varphi, z)\, d\varphi dz$$

$$= -2 \iint_\Delta (z, \cos\varphi, \sin\varphi) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\, d\varphi dz$$

$$= -2 \iint_\Delta (z\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\, d\varphi dz$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{1+\cos\varphi} (z\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\, dz \right] d\varphi$$

$$= -\int_0^{2\pi} \cos\varphi \; z^2 \Big|_0^{1+\cos\varphi} - 2\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \underbrace{-\int_0^{2\pi} \cos\varphi (1+\cos\varphi)^2 d\varphi}_{I} \underbrace{- 2\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi}_{J}$$

$$I = \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi}}_{0} + \int_0^{2\pi} 2\cos^2\varphi\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} [1+\cos(2\varphi)]\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\, d\varphi$$

$$=$$

(12)

$$= 2\pi + \cancel{\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^2\varphi\right]\Big|_0^{2\pi}} = 2\pi,$$

$$J \overset{u=\cos\varphi}{=} \int_1^1 (1+u)\,u\,(-du) = 0$$

$$\Rightarrow \text{ροή}(\mathrm{rot}\vec{F}) = -\underline{\underline{2\pi}}$$

(Επαληθεύσαμε!)