ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
ΣΕΜΦΕ - Ε.Μ.Π.
17/02/2022
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 Ω.

ΘΕΜΑ 1 (2 μ.): Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, όπου D το χωρίο που βρίσκεται στο α′ τεταρτημόριο και φράσσεται από τις καμπύλες

$$x^2+y^2=2x, \quad x^2+y^2=4x, \quad y=x, \quad y=0.$$

ΘΕΜΑ 2 (2,5 μ.): Εφαρμόζοντας κατάλληλα το Θ. Green, να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma P\,dx+Q\,dy$, όπου

$$P=3x^2ye^{x^3}\ -\ y^3/3, \quad Q=e^{x^3}\ -\ 2y\sin(y^2)\ +\ x^3/3$$

και $\gamma(t)=\sqrt{\pi}(\cos t,\ \sin t), \quad t\in[-\pi/2,\ \pi/2]$.

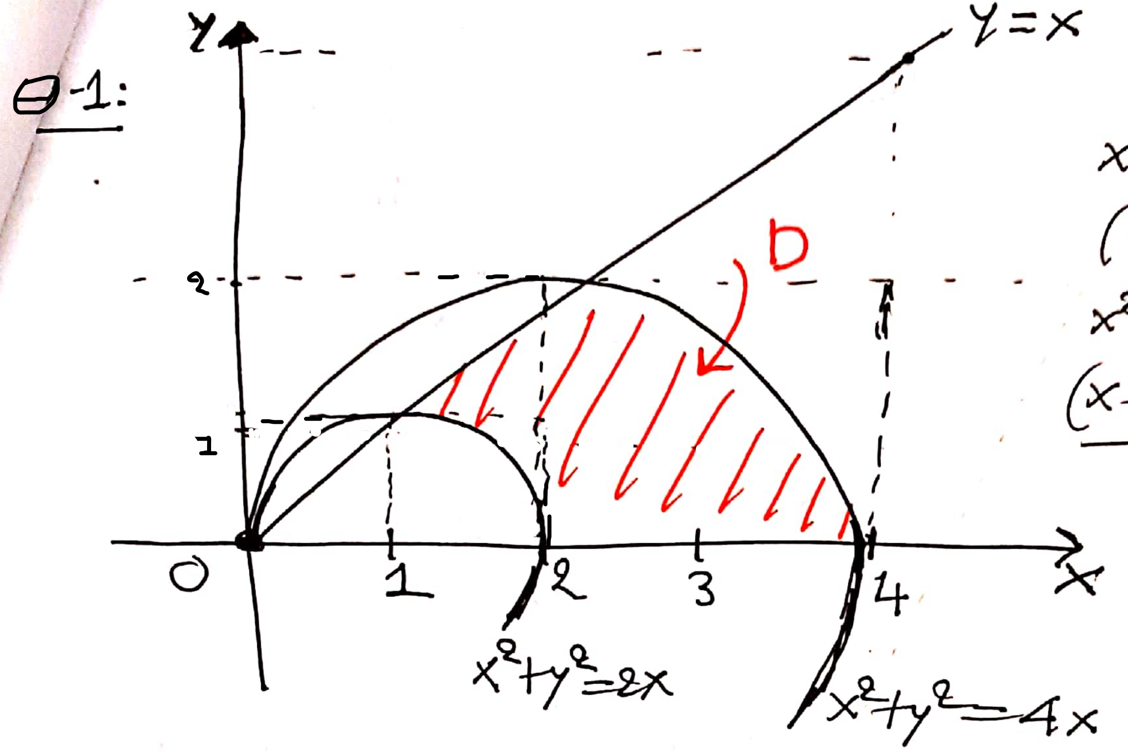
ΘΕΜΑ 3 (2 μ.): Με χρήση του θεωρήματος του Gauss, να υπολογίσετε τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x,y,z)=(x^3,y^3,z^3)$ διαμέσου της επιφάνειας που είναι το σύνορο του στερεού

$$K=\{\ (x,y,z): x^2+y^2+z^2\ \leq\ 2z\ \}.$$

ΘΕΜΑ 4 (3,5 μ.): Να επαληθεύσετε το θεώρημα Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z)=(y,z-2,x+1)$ και την επιφάνεια S, όπου S^* είναι το τμήμα της επιφάνειας του παραβολοειδούς $2z=x^2+y^2$ που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $x+z=1$.

(1)

Θ-1:



$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1,$

$x^2+y^2=4x \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4$

$$\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{array} \Big| \; \xRightarrow{(x,y)\in D} \quad 2x \le x^2+y^2 \le 4x$$

$$\Rightarrow \quad 2r\cos\varphi \le r^2 \le 4r\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi$$

γ' $\varphi \in [0, \pi/4]$.

Το διπλό ολοκλ. γράφεται

$$\int_0^{\pi/4} \left(\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r^2 dr \right) d\varphi$$

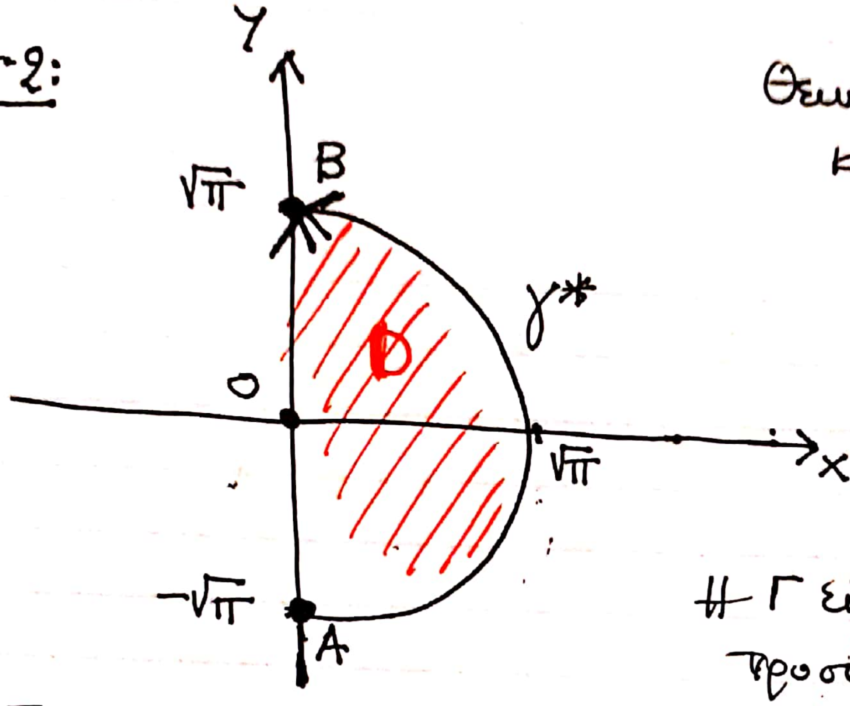
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{4^3\cos^3\varphi - 2^3\cos^3\varphi}{3} d\varphi = \frac{56}{3}\int_0^{\pi/4} \cos^3\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{56}{3}\int_0^{\pi/4} (1-\sin^2\varphi)\, d(\sin\varphi) \overset{u=\sin\varphi}{=} \frac{56}{3}\int_0^{1/\sqrt{2}} (1-u^2) du$$

$$= \frac{56}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\right] = \frac{56}{3\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 2}\right) =$$

$$= \frac{56}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{6} = \ldots$$

Θ-2:



Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\Gamma = \gamma - \vec{AB}$, όπου $A(0,-\sqrt{\pi})$, $B(0,\sqrt{\pi})$ κ' θέτουμε $D = \operatorname{int}\gamma^*$.

Η Γ είναι θετικά προσανατολισμένη κ' οι P, Q είναι κλάσης C^1 στο D

[Θ-Green] $\Rightarrow$

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left[(3x^2 e^{x^3} + x^2) - (3x^2 e^{x^3} - y^2) \right] dx\,dy$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy \overset{\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi}}{=}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{\pi}} r^3\,dr \right) d\varphi = \pi \frac{(\sqrt{\pi})^4}{4} = \frac{\pi^3}{4}.$$

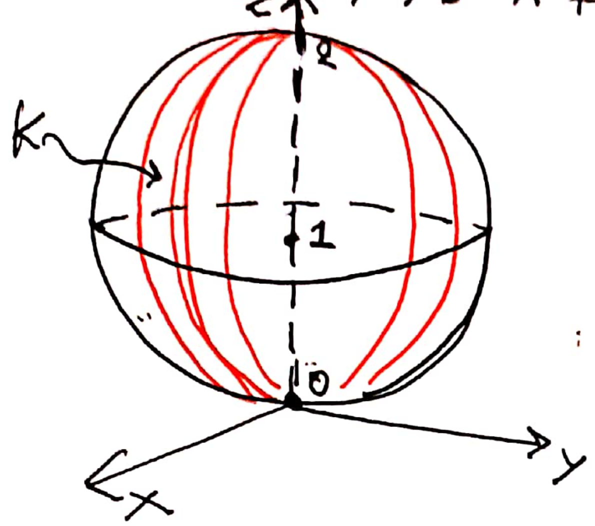
Ταυτόχρονα, $\displaystyle\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) - \int_{\vec{AB}} P\,dx + Q\,dy$

$$\Rightarrow \int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \frac{\pi^3}{4} + \int_{\vec{AB}} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \frac{\pi^3}{4} + \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} Q(0,y)\,dy = \frac{\pi^3}{4} + \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} [1 - 2y\sin(y^2)]\,dy$$

$$= \frac{\pi^3}{4} + 2\sqrt{\pi} + \underbrace{\cos(y^2)\Big|_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}}_{0} = \boxed{\frac{\pi^3}{4} + 2\sqrt{\pi}.}$$

Θ-3: $K=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1\}$, $S \overset{*}{=} \partial K$



Ροή του $\vec{F}$ μέσω της $S=$

$$=\iiint_K \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

$$=3\iiint_K (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

Σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\left.\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\varphi\\ y&=r\sin\theta\sin\varphi\\ z&=r\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x^2+y^2&=r^2\sin^2\theta\\ x^2+y^2+z^2&=r^2 \end{aligned}\right.$$

Για $(x,y,z)\in K$, έχουμε $x^2+y^2+z^2\leq 2z$

$$\Leftrightarrow r^2\leq 2r\cos\theta \Rightarrow \boxed{r\leq 2\cos\theta}$$

Επειδή $\cos\theta\geq 0$, πρέπει $\underline{\theta\in[0,\pi/2]}$, ενώ $\underline{\varphi\in[0,2\pi]}$.

Ιακωβιανή $= r^2\sin\theta$.

Τελικά, η ζητούμενη ροή ισούται με

$$3\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\cos\theta} r^2 r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=6\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\frac{2^5\cos^5\theta}{5}\,d\theta=\frac{6\pi}{5}\cdot 2^5\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{\pi\cdot 2^5}{5}\cos^6\theta\Big|_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{32}{5}\pi}.$$

Scanned with CamScanner

④

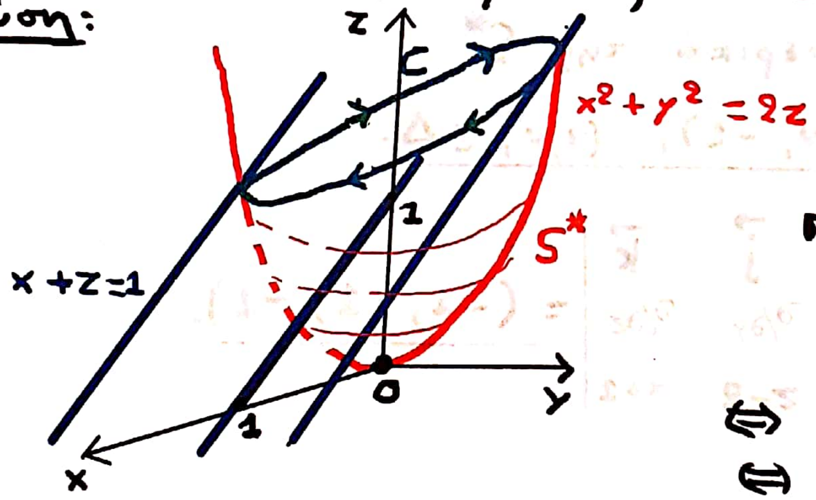
Θ.4: Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διαν. πεδίο

$$\vec{F} = (y,\ z-2,\ x+1)$$

κ' την επιφάνεια

$$x^2+y^2=2z, \qquad z \leq 1-x.$$

Λύση:



$S: \Delta \to \mathbb{R}^3$

$$S(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2+v^2}{2}\right)$$

Για $(u,v) \in \Delta$, πρέπει

$$\frac{u^2+v^2}{2} \leq 1-u$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2+2u+v^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad (u+1)^2+v^2 \leq 3,$$

οπότε $\Delta = \{(u,v) : (u+1)^2 + v^2 \leq 3\}$.

$S_u \times S_v = (-u, -v, 1)$, $(S_u \times S_v)(0,0) = (0,0,1)$.

Το $(0,0,1)$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(0,0) = (0,0,0)$ "δείχνει" στο εσωτερικό της S^*

$\Rightarrow$ $\underline{\vec{n}(u,v) = (u, v, -1), \quad (u,v) \in \Delta}$.

Επιπλέον,

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z-2 & x+1 \end{vmatrix} = \underline{(-1,-1,-1)}.$$

- Συνεπώς, η ροή του $rot\vec{F}$ διαμέσου της S είναι

$$\iint_\Delta rot\vec{F}(S(u,v))\cdot\vec{n}(u,v)\,du\,dv = \iint_\Delta (-u-v+1)\,du\,dv =$$

$$= -\iint_\Delta (u+v)\,du\,dv + \underbrace{\iint_\Delta du\,dv}_{3\pi}.$$

$\Delta = \{(u,v) : (u+1)^2 + v^2 \le 3\}$

$u = -1 + r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi, \quad 0 \le r \le \sqrt{3}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\Rightarrow \iint_\Delta (u+v)\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (-1 + r\cos\varphi + r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= -2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r\,dr + \underbrace{\int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi}_{0} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} r^2\,dr$$

$$= -\pi r^2 \Big|_0^{\sqrt{3}} = -3\pi.$$

Άρα, η ροή του $\vec{F}$ μέσω της S είναι

$$3\pi + 3\pi = \underline{\underline{6\pi}}.$$

Το κύκλος C της S^* είναι η τομή των επιφανειών

$$2z = x^2 + y^2, \qquad x + z = 1,$$

<u>προσανατολισμένη όπως στο σχήμα.</u>

Η C ως <u>επίπεδη</u> καμπύλη είναι <u>αρνητικά προσανατολ.</u>

C: $\quad x^2 + y^2 = 2(1-x), \qquad z = 1-x$

$\Leftrightarrow \quad \underline{(x+1)^2 + y^2 = 3, \qquad z = 1-x}$

Παραμέτρηση της $(-C)$:

$x = -1 + \sqrt{3}\cos t, \quad y = \sqrt{3}\sin t, \quad z = 1 - x = 2 - \sqrt{3}\cos t,$

$t \in [0, 2\pi]$

$\gamma(t) = (-1 + \sqrt{3}\cos t, \ \sqrt{3}\sin t, \ 2 - \sqrt{3}\cos t)$

$\gamma'(t) = \sqrt{3}\,(-\sin t, \ \cos t, \ \sin t)$

$\Rightarrow \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\sqrt{3}\sin t, \ -\sqrt{3}\cos t, \ \sqrt{3}\cos t) \cdot$

$\cdot \sqrt{3}\,(-\sin t, \ \cos t, \ \sin t) = 3\,(-\sin^2 t - \cos^2 t + \sin t \cos t)$

$= -3 + \frac{3}{2}\sin(2t), \qquad t \in [0, 2\pi]$

$\rightarrow \int_C \vec{F} = -\int_{-C} \vec{F} = 3\int_0^{2\pi} dt + \frac{3}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(2t)\, dt}_{0} = 6\pi$