ΕΠΑΝΑΛ. ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
ΣΕΜΦΕ - Ε.Μ.Π. - 24/09/2024
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 Ω.

ΘΕΜΑ 1 (2 μ.): Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int\int_D (x^2-y^2)^5 x^6 y^6 (x^2+y^2)dxdy,$$

όπου D το επίπεδο χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες

$$x^2-y^2=1, \quad x^2-y^2=2, \quad xy=3/2\ , \quad xy=2.$$

ΘΕΜΑ 2 (1,5 μ.): Έστω $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\ \}$ και $u,v : D\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, κλάσης C^1 στο $\mathrm{int}(D)$, τέτοιες ώστε

$$u(x,y)=1, \quad v(x,y)=y, \quad \forall\ (x,y)\in\partial D.$$

Θέτουμε $\vec{F}=(v,u)$, $\vec{G}=(u_x-u_y\ , v_x-v_y)$. Να δείξετε ότι $\displaystyle\int\int_D \vec{F}\cdot\vec{G}=-\pi$.

ΘΕΜΑ 3 (2 μ.): Δίνεται στο χώρο το συντηρητικό διανυσματικό πεδίο $\vec{F}=(P,Q,R)$, όπου

$$P=ye^{xy}\cos z+2x\sin(yz)+x, \quad Q=xe^{xy}\cos z+zx^2\cos(yz)-e^y,$$

και

$$R=-e^{xy}\sin z+yx^2\cos(yz)+2z.$$

Να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$.

ΘΕΜΑ 4 (2 μ.): Εάν $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1\ \}$, να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\int\int\int_K \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}\ .$$

[*Υπόδειξη:* Σφαιρικές συντεταγμένες.]

ΘΕΜΑ 5 (2,5 μ.): Δίνονται οι επιφάνειες $S_1,\ S_2$ με αντίστοιχα ίχνη

$$S_1^*: x^2+y^2=1, \quad 0\leq z\leq 1, \quad S_2^*: x^2+y^2+(z-1)^2=1, \quad z\geq 1.$$

Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για την επιφάνεια S με ίχνος $S^*=S_1^*\cup S_2^*$ και για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}=(xz+x, yz+y, z)$.

Θ-1 Θεωρούμε το μετασχηματισμό 1

$S : D \to \mathbb{R}^2$ με $S(x,y) = (\underbrace{x^2-y^2}_{u}, \underbrace{xy}_{v})$.

Ο S είναι 1-1 (χωρίς απόδειξη!) κ'

$$J_S = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2+y^2) \neq 0$$

$\forall (x,y) \in D$. Επιπλέον,

$$S(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / 1 \le u \le 2, \ \tfrac{3}{2} \le v \le 2\} = D'.$$

Εάν $T = S^{-1} : D' \to D$, τότε

$$J_T = \frac{1}{J_S} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

κ' το ολοκλ. γράφεται

$$\iint_{D'} u^5 v^6 (x^2+y^2) J_T \, du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{D'} u^5 v^6 \, du\,dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u^5 du \cdot \int_{3/2}^2 v^6 dv$$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{2^6-1}{6} \cdot \frac{2^7-(3/2)^7}{7}.$$

Θ-2

$\vec{F}\cdot\vec{G} = v(u_x-u_y)+u(v_x-v_y)$

$= (vu_x+uv_x)-(vu_y+uv_y)$

$= \frac{\partial}{\partial x}(uv)-\frac{\partial}{\partial y}(uv)$

$\Rightarrow \iint_D \vec{F}\cdot\vec{G} = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(uv)-\frac{\partial}{\partial y}(uv)\right] \overset{[\Theta\text{-Green}]}{=}$

$= \int_{\partial D}(uv\,dx+uv\,dy) \overset{[\text{υπόθεση}]}{=}$

$= \int_{\partial D}(y\,dx+y\,dy) \overset{(\text{Green})}{=} \iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(y)-\frac{\partial}{\partial y}(y)\right]$

$= -\iint_D dx\,dy = -\text{Εμβ}(D) = -\pi$

(η) Μια παραμέτρηση του θετικά προσανατολ. συνόρου $\partial D: x^2+y^2=1$ είναι
$x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi]$,
οπότε

$\iint_D \vec{F}\cdot\vec{G} = \int_0^{2\pi}[\sin t(-\sin t)+\sin t\cos t]\,dt$

$= -\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt+\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt$

$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1-\cos(2t)]\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2t)\,dt$

$= \dots = -\pi.$

Θ.4

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\varphi \in [0, 2\pi] \\ &\theta \in [0, \pi] \end{aligned}$$

$$J = -r^2 \sin\theta$$

$\forall (x,y,z) \in K,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 1$

Το ολοκλ. γράφεται

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r \Bigg(\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\, d\theta}_{I_r} \Bigg) dr$$

$$I_r = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{(r^2-4r\cos\theta+4)'_\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}\ \Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2+4r+4} - \sqrt{r^2-4r+4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{(r+2)^2} - \sqrt{(r-2)^2}\right]$$

$$|r-2| = \begin{cases} r-2, & r \geq 2 \\ 2-r, & r < 2 \end{cases}$$

$r \leq 1$

$$= \frac{1}{2}\left[(r+2) - (2-r)\right] = r$$

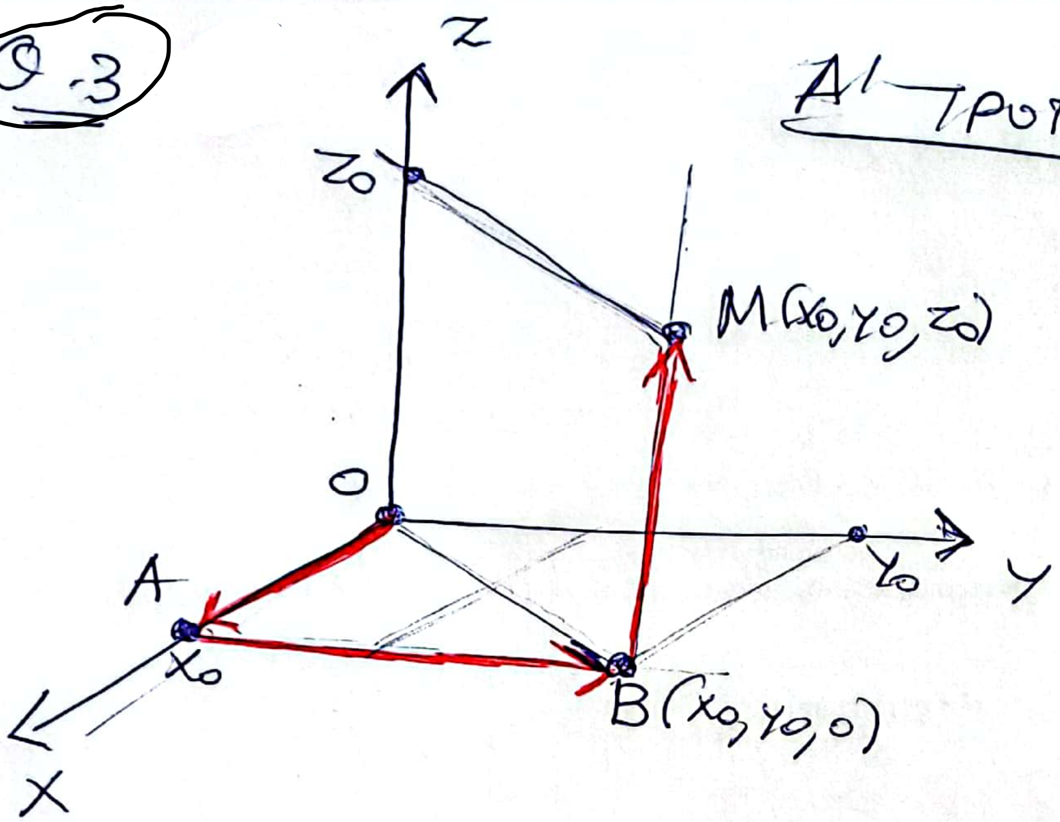
⇒ το αρχικό ολοκλ. γράφεται

$$2\pi \int_0^1 r^2 \, dr = \boxed{2\pi/3}.$$

Θ. 3, 5

Θ.3

Α' ΤΡΟΠΟΣ



Έστω $M(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε το μονοπάτι

$\Gamma:\ \vec{OA}\to\vec{AB}\to\vec{BM}$.

- Στο $\vec{OA}$, έχουμε $y=z=0$, $dy=dz=0$, $P=x \Rightarrow \int_{\vec{OA}}\vec{F}=\int_0^{x_0}x\,dx=\boxed{x_0^2/2}$.

- Στο $\vec{AB}$, $x=x_0$, $z=0$, $dx=dz=0$, $Q=x_0e^{x_0y}-e^y \Rightarrow \int_{\vec{AB}}\vec{F}=\int_0^{y_0}x_0e^{x_0y}dy-$

$$-\int_0^{y_0}e^ydy = e^{x_0y}\Big|_{y=0}^{y=y_0}-e^y\Big|_{y=0}^{y=y_0}$$

$$=e^{x_0y_0}-1-e^{y_0}+1=\boxed{e^{x_0y_0}-e^{y_0}}$$

• Στο $\vec{BM}$, έχουμε $x=x_0,\ y=y_0,\ dx=dy=0$,

$$R = -e^{x_0y_0}\sin z + y_0x_0^2\cos(y_0z) + 2z$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{BM}} \vec{F} = -e^{x_0y_0}\int_0^{z_0}\sin z\,dz + y_0x_0^2\int_0^{z_0}\cos(y_0z)\,dz + \int_0^{z_0} 2z\,dz =$$

$$= e^{x_0y_0}\cos z\Big|_{z=0}^{z=z_0} + x_0^2\sin(y_0z)\Big|_{z=0}^{z=z_0} + z^2\Big|_{z=0}^{z=z_0} =$$

$$= e^{x_0y_0}[\cos(z_0)-1] + x_0^2\sin(y_0z_0) + z_0^2$$

Άρα,
$$\int_\Gamma \vec{F} = \frac{x_0^2}{2} + \cancel{e^{x_0y_0}} - e^{y_0} + e^{x_0y_0}\cos(z_0) - \cancel{e^{x_0y_0}} + x_0^2\sin(y_0z_0) + z_0^2 =$$

$$= \frac{x_0^2}{2} - e^{y_0} + e^{x_0y_0}\cos(z_0) + x_0^2\sin(y_0z_0) + z_0^2$$

• Στο $\overrightarrow{BM}$, έχουμε $x = x_0, y = y_0, dx = dy = 0$,

$$k = -e^{x_0 y_0}\sin z + y_0 x_0^2 \cos(y_0 z) + 2z$$

$$\Rightarrow \int_{\overrightarrow{BM}} \vec{F} = -e^{x_0 y_0}\int_0^{z_0} \sin z\, dz + y_0 x_0^2 \int_0^{z_0} \cos(y_0 z)\, dz + \int_0^{z_0} 2z\, dz =$$

$$= e^{x_0 y_0}\cos z \Big|_{z=0}^{z=z_0} + x_0^2 \sin(y_0 z)\Big|_{z=0}^{z=z_0} + z^2\Big|_{z=0}^{z=z_0} =$$

$$= \boxed{e^{x_0 y_0}[\cos(z_0) - 1] + x_0^2 \sin(y_0 z_0) + z_0^2}$$

Άρα, $$\int_\Gamma \vec{F} = \frac{x_0^2}{2} + \cancel{e^{x_0 y_0}} - e^{y_0} + e^{x_0 y_0}\cos(z_0) - \cancel{e^{x_0 y_0}} + x_0^2 \sin(y_0 z_0) + z_0^2 =$$

$$= \frac{x_0^2}{2} - e^{y_0} + e^{x_0 y_0}\cos(z_0) + x_0^2 \sin(y_0 z_0) + z_0^2$$

10

$\Rightarrow$ μία συνάρτηση δυναμικού είναι η

$$\varphi(x,y,z)=\frac{x^2}{2}-e^y+e^{xy}\cos z+x^2\sin(yz)+z^2.$$

$\longrightarrow$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Β' τρόπος

Έστω φ μια συνάρτηση δυναμικού για την $\vec{F}$. Τότε,

$$\varphi_x = P = y e^{xy}\cos z + 2x\sin(yz) + x$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi = e^{xy}\cos z + x^2\sin(yz) + \frac{x^2}{2} + c(y,z)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \varphi_y = \underline{xe^{xy}\cos z + zx^2\cos(yz)} + \frac{\partial c}{\partial y}$$

ενώ $\varphi_y = Q = \underline{xe^{xy}\cos z + zx^2\cos(yz)} - e^y$,

οπότε

$$\frac{\partial c}{\partial y} = -e^y$$

$$\Rightarrow c(y,z) = -e^y + c_1(z)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{\varphi = e^{xy}\cos z + x^2\sin(yz) + \frac{x^2}{2} - e^y + c_1(z)}. \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \varphi_z = \underline{-e^{xy}\sin z + yx^2\cos(yz)} + c_1'(z)$$

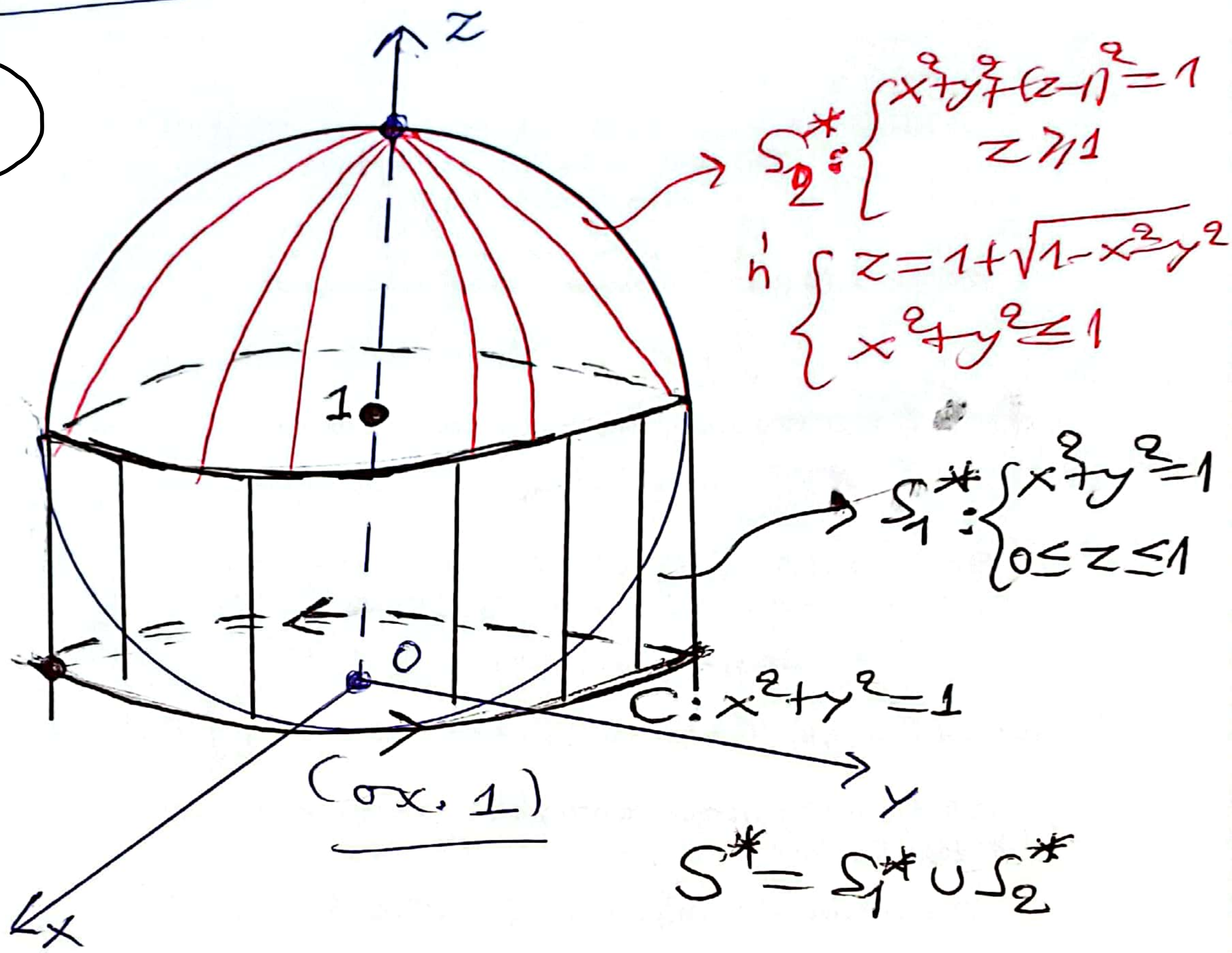
επί $\varphi_z = R = \underline{-e^{xy}\sin z + yx^2\cos(yz)} + 2z$

$$\Rightarrow c_1'(z) = 2z \Rightarrow c_1(z) = z^2 + c_2$$

$c_2 \in \mathbb{R}$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \varphi = e^{xy}\cos z + x^2\sin(yz) + \frac{x^2}{2} - e^y + z^2 + C_2$$

Θ.5



(σχ. 1)

$$S^* = S_1^* \cup S_2^*$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xz+x & yz+y & z \end{vmatrix} = (-y, x, 0).$$

· Ροή μέσω της S_2 :

$S_2 : \Delta_2 \to \mathbb{R}^3$, $\Delta_2 = \{(u,v) \mid u^2+v^2 \leq 1\}$

$$S_2(u,v) = (u, v, \underbrace{1+\sqrt{1-u^2-v^2}}_{f(u,v)})$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (-f_u, -f_v, 1)$$

$= \left(\frac{u}{g}, \frac{v}{g}, 1\right)$, όπου $g(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}$.

Είναι $S_2(u,v) \cdot \left(\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v}\right) =$

$= (u\, v,\ 1+g) \cdot \left(\frac{u}{g}, \frac{v}{g}, 1\right)$

$= \frac{u^2+v^2}{g} + 1+g = \frac{u^2+v^2+g+g^2}{g}$

$= \frac{u^2+v^2+g+1-u^2-v^2}{g} = 1 + \frac{1}{g} > 0$

$\Rightarrow$ το $\left(\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v}\right)$ "δείχνει" εξωτερικά, αν σχεδιασθεί με αρχή πάνω στην S_2^*

$\Rightarrow \vec{n}_2(u,v) = (u/g, v/g, 1)$

$\operatorname{rot}\vec{F}(S_2(u,v)) \cdot \vec{n}_2(u\,v) =$

$\operatorname{rot}\vec{F}(u, v, 1+g) \cdot (u/g, v/g, 1)$

$(-v, u, 0) \cdot (u/g, v/g, 1) = 0$

$\Rightarrow$ (Ροή του $rot\vec{F}$ μέσω της S_2) $=$ (14)

$$= \iint_{\Delta_2} rot\vec{F} \cdot \vec{n_2} = 0.$$

$\longrightarrow$ Ροή μέσω της S_1:

$S_1 : \Delta_1 \to \mathbb{R}^3$, $\Delta_1 = \{(\varphi, z) : 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le z \le 1\}$

$S_1(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S_1}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S_1}{\partial z}\right) \cdot S_1(\varphi, z) = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ το $\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S_1}{\partial z}$ "δείχνει" εξωτερικά

αν σχεδιαστεί με αρχή πάνω στο S_1^*

$$\Rightarrow \vec{n_1}(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$\Rightarrow rot\vec{F}(S_1(\varphi, z)) \cdot \vec{n_1}(\varphi, z) =$$

$$= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = 0$$

$\Rightarrow$

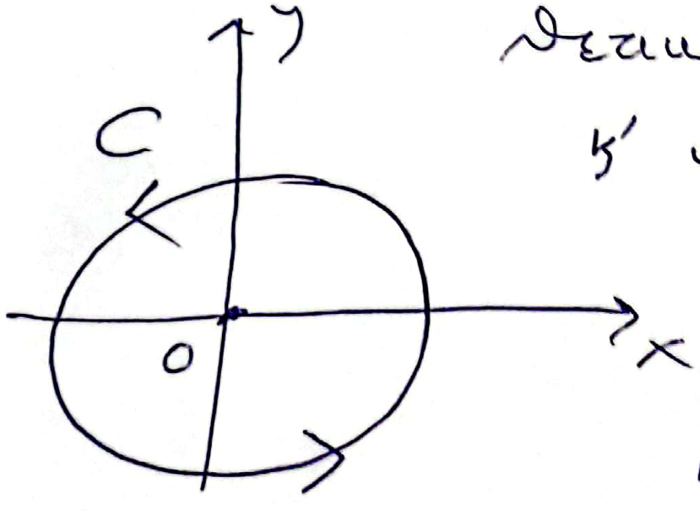
Σαρώθηκε με το CamScanner

$\Rightarrow$ (Ροή του $\text{rot}\vec{F}$ μέσω της S_1) $=$

$$= \iint_{\Delta_1} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n_1} = 0$$

Επομένως, (συνολική ροή του $\text{rot}\vec{F}$ μέσω της $S = S_1 \cup S_2$) $= 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$.

Το σύνορο της ανοιχτής επιφάνειας S είναι ο κύκλος $C: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ , z=0 \end{cases}$ με θετικό προσανατολισμό ως προς την S, όπως στο σχήμα. [Η C είναι θετικά προσανατολισμένη κ' ως καμπύλη του xy-επιπέδου.]



$$\vec{F}\Big|_C = (x, y, 0)$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} = \int_C (x\,dx + y\,dy) \overset{(\text{Green})}{=}$$

$$= \iint_{(x^2+y^2\leq 1)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right] dx\,dy = \underline{\underline{0}}.$$

<u>ΕΠΑΛΗΘΕΥΤΗΚΕ</u>!