

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ -

05/09/2025

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 Ω.

ΘΕΜΑ 1 (i) (1 μ.): Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{y}{1+x^5} dx dy$,
όπου $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1 \}$.

(ii) (1,5 μ.): Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D y \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} dx dy$,
όπου $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x, x \geq 0, y \geq 0 \}$.

ΘΕΜΑ 2 : Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = \left(9x^8 \ln(5y^2 + 3) + 5z^3, \frac{10x^9 y}{5y^2 + 3} + 4z, 15xz^2 + 4y - 6\pi \sin(\pi z) \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) (1,5 μ.) Με αποκλειστική χρήση επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$ στο $\mathbb{R}^3$.

(ii) (0,5 μ.) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \vec{F}$, όπου
 $\gamma(t) = (t^3 + 1, t^2 + 2, t^3), \quad t \in [0, 1]$.

ΘΕΜΑ 3 (1,5 μ.): Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} dy,$$

όπου γ η θετικά προσανατολισμένη έλλειψη $5x^2 + 7y^2 = 12$.

ΘΕΜΑ 4 (2 μ.): Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (\sin(x^2), yz - e^y, \sin(y^2) - x), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Με χρήση του θεωρήματος Stokes, να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$,
όπου C το αρνητικά προσανατολισμένο σύνορο του τμήματος της επιφάνειας του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 9$ που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $y + z = 4$.

ΘΕΜΑ 5 (2 μ.): Με κατάλληλη χρήση του Θ. Gauss, να υπολογίσετε τη ροή του διανυσματικού πεδίου

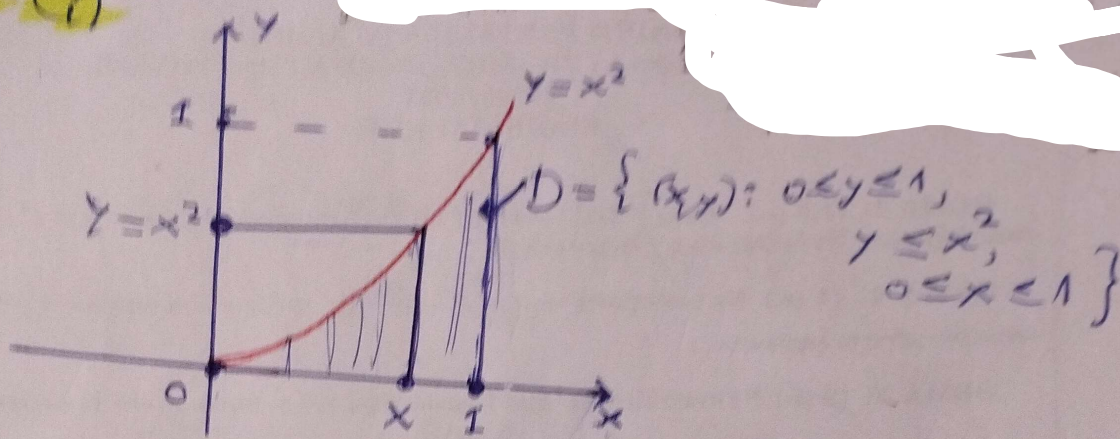
$$\vec{F} = (x^3/3 + xy^2 + e^{z^2}, x^3 + y^3 + \cos(z^2), 2 + 3zx^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

μέσω της ανοικτής επιφάνειας S με ίχνος

$$S^* : z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0.$$

①

Q. 1 (i)

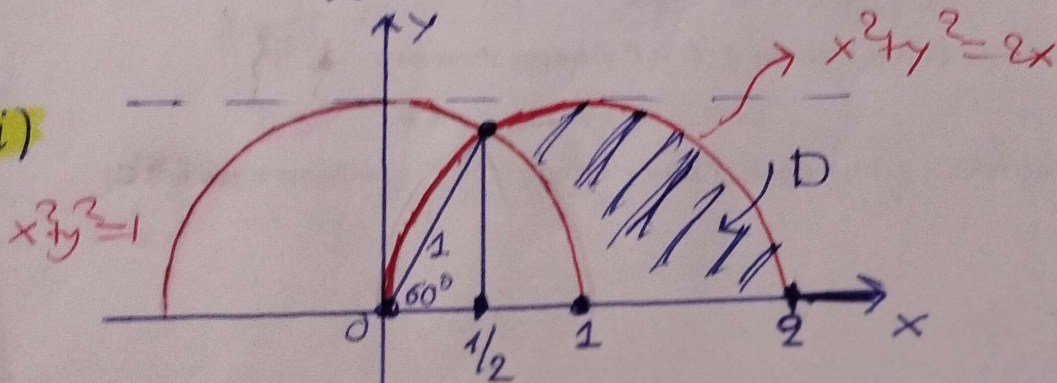


$$\iint_D \frac{y}{1+x^5} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{y}{1+x^5} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^5} \cdot \frac{x^4}{2} dx = \frac{1}{10} \ln(1+x^5) \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{\ln 2}{10}$$

(ii)



$x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$
 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$

$\Rightarrow$

$1 \leq r^2 \leq 2r \cos \theta$

$\Rightarrow$

$1 \leq r \leq 2 \cos \theta$ (i)

$0 \leq \theta \leq \pi/3$ (ii)

(2)

ansce

$$\iint_D \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\pi/3} \left(\int_1^{2\cos\phi} r \sin\phi \frac{e^r}{r^2} r dr \right) d\phi$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left(\int_1^{2\cos\phi} e^r dr \right) \sin\phi d\phi$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sin\phi (e^{2\cos\phi} - e) d\phi$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sin\phi e^{2\cos\phi} d\phi - e \int_0^{\pi/3} \sin\phi d\phi$$

$$= -\frac{1}{2} e^{2\cos\phi} \Big|_0^{\pi/3} + e \cos\phi \Big|_0^{\pi/3}$$

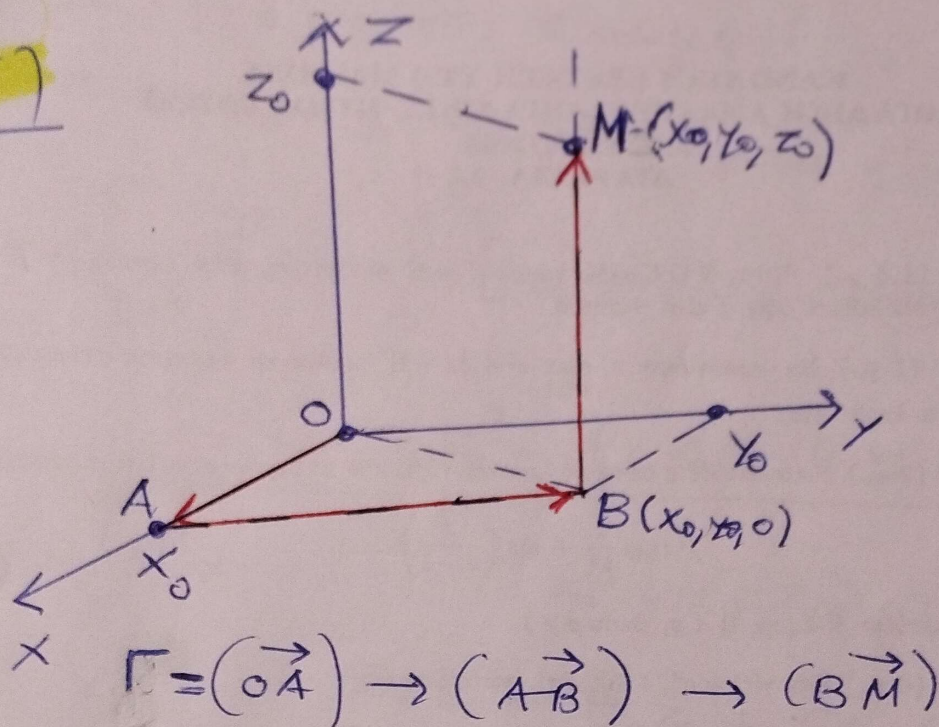
$$= -\frac{1}{2} (e_1 - e^2) + e \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - e.$$

0.2

(1)

(3)



$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\vec{OA}} \vec{F} + \int_{\vec{AB}} \vec{F} + \int_{\vec{BM}} \vec{F}$$

- $\Gamma_a (x, y, z) \in \vec{OA}$, exemple $y = z = 0$
 $\Rightarrow dy = dz = 0$ et $0 \leq x \leq x_0$

$$\Rightarrow \int_{\vec{OA}} \vec{F} = \ln 3 \int_0^{x_0} 9x^8 dx = \ln 3 \cdot x_0^9$$

- $\Gamma_a (x, y, z) \in \vec{AB}$, exemple $x = x_0, z = 0$
 $\Rightarrow dx = dz = 0$ et $0 \leq y \leq y_0$

$$\Rightarrow \int_{\vec{AB}} \vec{F} = \int_0^{y_0} \frac{10x_0^9 y}{5y^2 + 3} dy$$

$$= x_0^9 [\ln(5y^2 + 3) - \ln 3] \quad (0,5)$$

④

• Sia $(x, y, z) \in \vec{BM}$, e'ou $\vec{F}$

$$x=x_0, y=y_0 \Rightarrow dx=dy=0 \text{ e } 0 \leq z \leq z_0$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{BM}} \vec{F} = \int_0^{z_0} [15x_0 z^2 + 4y_0 - 6\pi \sin(\pi z)] dz$$

$$= 5x_0 z_0^3 + 4y_0 z_0 + 6 \cos(\pi z_0) \quad (6,5)$$

$$\text{Adesso, } \int_{\Gamma} \vec{F} = \left(x_0^9 \ln(5y_0^2+3) + 5x_0 z_0^3 + 4y_0 z_0 + 6 \cos(\pi z_0) \right) \Big|_{(-6)}^{(6,2)}$$

$\Rightarrow$ la funzione scalare φ e' data da

$$\varphi(x, y, z) = x^9 \ln(5y^2+3) + 5xz^3 + 4yz + 6 \cos(\pi z)$$

$$(ii) \int_{\gamma} \vec{F} = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0))$$

$$= \varphi(2, 3, 1) - \varphi(1, 2, 0)$$

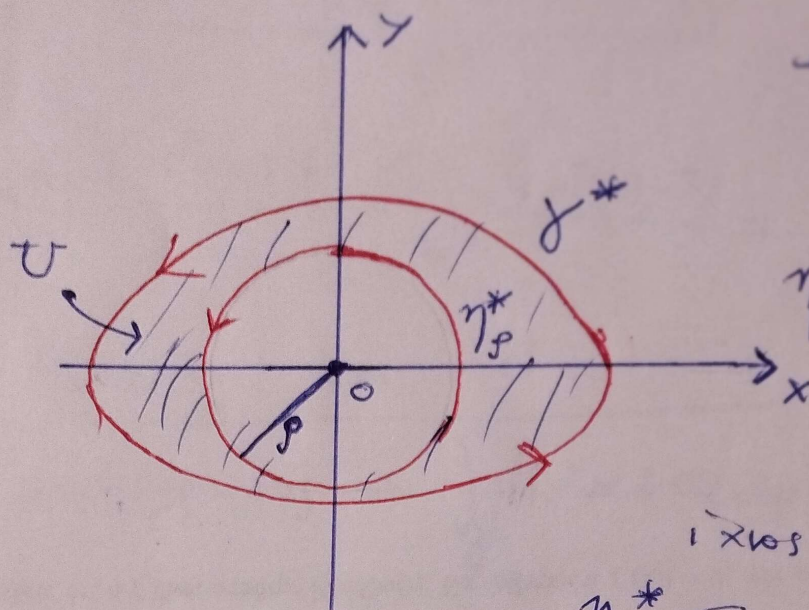
$$= [2^9 \ln(5 \cdot 3^2 + 3) + 5 \cdot 2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 6 \cos(\pi) - 6] - [1^9 \ln(5 \cdot 2^2 + 3) - 6]$$

$$= 2^9 \ln 48 + 10 + 12 - 6 - 12$$

$$= 2^9 \ln 48 - \ln 23 + 10$$

Θ.3.

(5)



Επιλέγουμε
 $p > 0$ ώστε
 0 να είναι
 εντός

$$\eta_p(t) = (p \cos t, p \sin t)$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

να είναι

ίσιος

$$\eta_p^* \subset \text{int} \gamma^*$$

Θετούμε $P = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$, $Q = -\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}$

Οι P, Q είναι υλοί του C^1 στο χώρο με συντεταγμένες x, y . Επιπλέον, αν $\phi = (x^2 + y^2)^2$,

έχουμε $\phi_x = 4x(x^2 + y^2)$, $\phi_y = 4y(x^2 + y^2)$,

$$P_y = x^2 \cdot \frac{\phi - y \phi_y}{\phi^2} = x^2 \cdot \frac{(x^2 + y^2)^2 - y \cdot 4y(x^2 + y^2)}{\phi^2}$$

$$= x^2 \cdot \frac{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 4y^2)}{\phi^2} = \frac{x^2(x^2 - 3y^2)}{\phi^{3/2}}$$

$$Q_x = -\frac{3x^2 \phi - x^3 \phi_x}{\phi^2} = -\frac{x \phi_x - 3\phi}{\phi^2}$$

$$= x^2 \frac{4x^2(x^2+y^2) - 3(x^2+y^2)^2}{\rho^2} \quad (6)$$

$$= x^2 \frac{(x^2+y^2)(4x^2 - 3x^2 - 3y^2)}{\rho^2} = \frac{x^2(x^2 - 3y^2)}{\rho^{3/2}}$$

Ans, $P_y = Q_x = 0$ so U .

Ans: $\oint_C P dx + Q dy \Rightarrow \int_C (P dx + Q dy) = \int_C (P dx + Q dy)$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2 \cos^2 t \cdot \rho \sin t}{\rho^4} (-\rho \sin t) - \right.$$

$$\left. - \frac{\rho^3 \cos^3 t}{\rho^4} \rho \cos t \right] dt$$

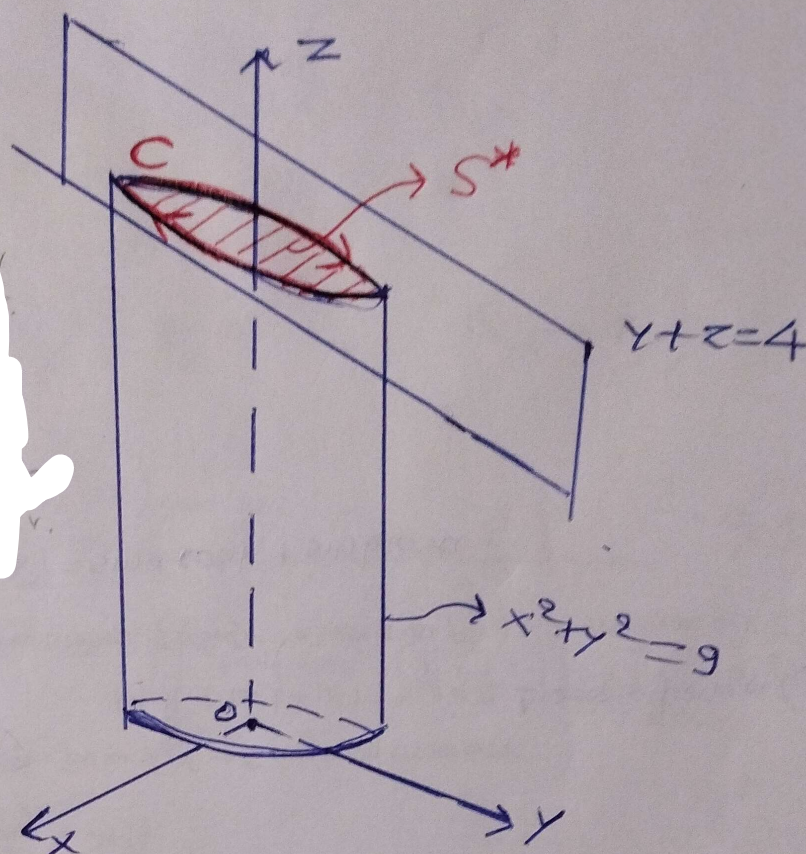
$$= - \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin^2 t + \cos^4 t) dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt$$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + \cos(2t)] dt = -\pi.$$

Θ. 4

7



Θεωρούμε την επιφάνεια S και S^* όπως στο σχήμα.

$$S^*: \begin{cases} y+z=4 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Η C είναι το δεξιό προσαν. σύνορο της S .

$$S(u, v) = (u, v, 4-v), \quad (u, v) \in D,$$

$$D = \{ (u, v) : u^2 + v^2 \leq 9 \}$$

$$S_u \times S_v = (0, 1, 1)$$

$$(S_u \times S_v) \cdot S(u, v) = 4 > 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}(u, v) = S_u \times S_v = (0, 1, 1).$$

$$\text{Επιπλέον, } \vec{F} = (P, Q, R),$$

$$P = \sin(x^2), \quad Q = yz - e^y, \quad R = \sin(y^2) - x$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

(8)

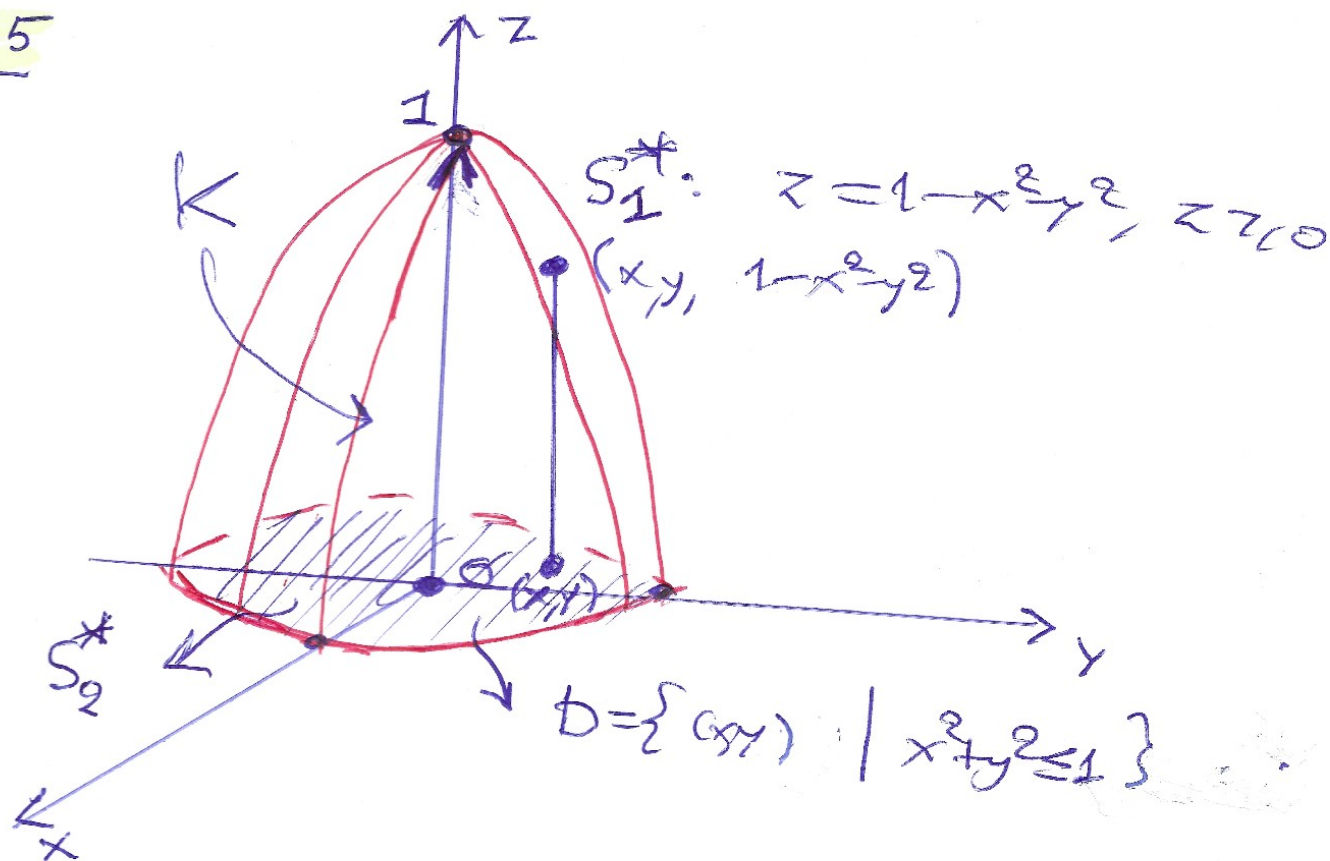
$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

$$= (2y \cos(yz) - z, 1, 0)$$

$\Rightarrow$ Stokes $\int_C \vec{F} = \iint_D \text{rot } \vec{F} (S(y,z)) \cdot \vec{n}^2(y,z) dy dz$

$$= \iint_D 1 dy dz = |D| = 2\pi.$$

Q.5



Θεωρούμε την κλειστή επιφάνεια S με $S = S_1^* \cup S_2^*$ (9)

$$\operatorname{div} \vec{F} = x^2 + y^2 + 3y^2 + 3x^2$$

$$= 4(x^2 + y^2)$$

4. Για την περιοχή S ισχύει με

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = 4 \iiint_K (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

$$= 4 \iint_D \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

$$= 4 \iint_D (x^2 + y^2) (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy$$

$x = \rho \cos \varphi$
 $y = \rho \sin \varphi$

$$4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho^2) \rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$= 8\pi \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho - \int_0^1 \rho^5 \, d\rho \right)$$

$$= 8\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}.$$

10

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} \propto \frac{\partial S_2}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

$$S_2(0,0) = (0,0,0)$$

$\Rightarrow$ η position S_2 location
 $\rho_c \rightarrow \left(\frac{u^3}{3} + uv^2, \frac{v^3}{3} + u^2v \right)$

$$= -2 \iint_D du dv \stackrel{|D|}{=} -2\pi$$

$$\Rightarrow \text{Điểm cực tiểu } S_1 = (\text{Điểm cực tiểu } S) -$$

$$- (\text{Điểm cực tiểu } S_2) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - (-2\pi) = \frac{8\pi}{3}$$