ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ STOKES

Έστω $S : \Delta \to \mathbb{R}^3$ C^2-επιφάνεια, δηλ.

$$\Delta \ni (u,v) \longmapsto S(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big),$$

όπου

$$x(\cdot,\cdot),\ y(\cdot,\cdot),\ z(\cdot,\cdot) : \Delta \to \mathbb{R} \text{ κλάσης } C^2$$

κ'

$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος.

$$S_u \times S_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (E_x, -E_y, E_z), \text{ όπου}$$

$$E_x = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \qquad E_y = \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \qquad E_z = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Λήμμα 1: $\forall (u,v) \in \Delta$,

$$x_v S_u - x_u S_v = -(0, E_z, E_y), \quad y_v S_u - y_u S_v = (E_z, 0, -E_x),$$

$$z_v S_u - z_u S_v = (E_y, E_x, 0).$$

Απόδειξη: $x_v S_u - x_u S_v = x_v (x_u, y_u, z_u) - x_u (x_v, y_v, z_v)$

$$= (0, x_v y_u - x_u y_v, x_v z_u - x_u z_v)$$

$$= \left(0, \begin{vmatrix} x_v & y_v \\ x_u & y_u \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_v & z_v \\ x_u & z_u \end{vmatrix}\right)$$

$$= (0, -E_z, -E_y).$$

Όμοια τα υπόλοιπα. $\boxtimes$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό με $S(\Delta) \subseteq \Omega$.

<u>Λήμμα 2:</u> Έστω $P : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1. Τότε,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[P(S(u,v))\right] = \nabla P \cdot S_u, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left[P(S(u,v))\right] = \nabla P \cdot S_v.$$

<u>Απόδειξη:</u> Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[P(S(u,v))\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\right] = P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u$$

$$= \nabla P \cdot S_u,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[P(S(u,v))\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left[P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\right] = P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v$$

$$= \nabla P \cdot S_v.$$

$\boxtimes$

Λήμμα 3: Έστω $\vec{F}=(P,Q,R): \Omega \to \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1.

Τότε, $\frac{\partial}{\partial u}\left[\vec{F}(S(u,v))\cdot S_v\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\vec{F}(S(u,v))\cdot S_u\right] = \left[\operatorname{rot}\vec{F}(S(u,v))\right]\cdot(S_u \times S_v)$.

Απόδειξη: Επειδή $\frac{\partial}{\partial u}(S_v) = S_{vu} = S_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}(S_u)$ (σημ. S κλάσης C^2), το α΄ μέλος γράφεται

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\vec{F}(S(u,v))\right]\cdot S_v - \frac{\partial}{\partial v}\left[\vec{F}(S(u,v))\right]\cdot S_u \overset{(\text{Λήμμα 2})}{=}$$

$$= (\nabla P\cdot S_u, \nabla Q\cdot S_u, \nabla R\cdot S_u)\cdot(x_v, y_v, z_v) -$$

$$-(\nabla P\cdot S_v, \nabla Q\cdot S_v, \nabla R\cdot S_v)\cdot(x_u, y_u, z_u) =$$

$$= \nabla P\cdot(x_v S_u - x_u S_v) + \nabla Q\cdot(y_v S_u - y_u S_v) + \nabla R\cdot(z_v S_u - z_u S_v)$$

(λήμμα 1)

$$= -\nabla P\cdot(0, E_z, E_y) + \nabla Q\cdot(E_z, 0, -E_x) + \nabla R\cdot(E_y, E_x, 0)$$

$$= -P_y E_z - P_z E_y + Q_x E_z - Q_z E_x + R_x E_y + R_y E_x$$

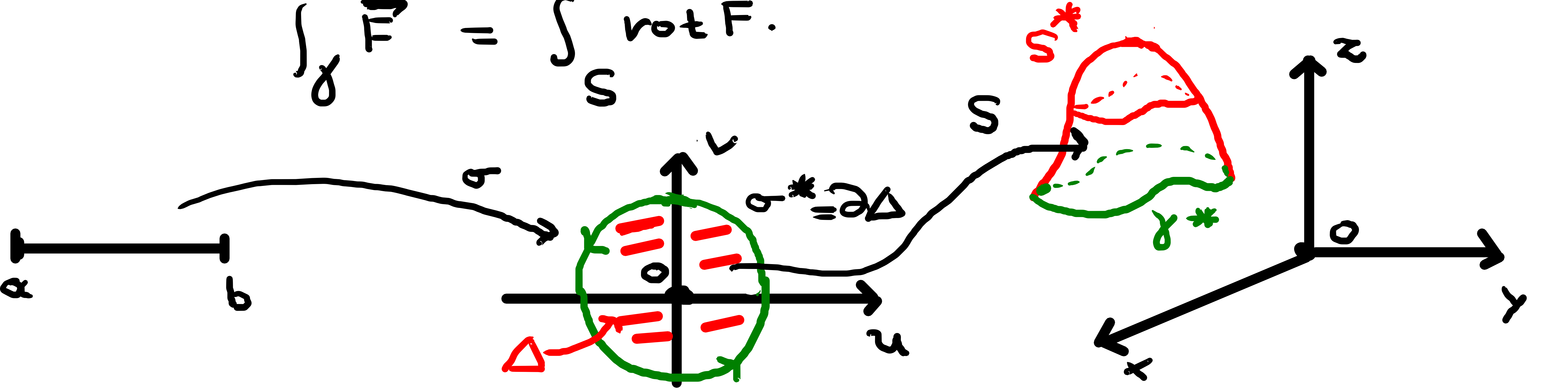
$$= (R_y - Q_z)E_x - (P_z - R_x)E_y + (Q_x - P_y)E_z$$

$$= \underbrace{(R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)}_{\mathrm{rot}\,\vec{F}}\cdot\underbrace{(E_x, -E_y, E_z)}_{S_u \times S_v}. \qquad \boxtimes$$

Θεώρημα 4 (Stokes, V1):

Έστω $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ θετικά προσανατολισμένη κλειστή απλή λεία καμπύλη με $\sigma(\Delta)=\partial\Delta$ $(\subset\Delta)$ κ' $\vec{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ κλάσης C^1, όπου $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ ανοικτό με $S(\Delta)\subset\Omega$. Θέτουμε $\gamma(t)=S(\sigma(t))$, $t\in[a,b]$. Τότε,

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_S \operatorname{rot}\vec{F}.$$



Απόδειξη: Θέτουμε

$$\sigma(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in [a,b],$$

όπου $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1.

Τότε,

$$\gamma(t) = S(\sigma(t)) = (x(\sigma(t)), y(\sigma(t)), z(\sigma(t))), t \in [a,b].$$

Έχουμε

$$\frac{d}{dt}[x(\sigma(t))] = x_u u'(t) + x_v v'(t),$$

$$\frac{d}{dt}[y(\sigma(t))] = y_u u'(t) + y_v v'(t),$$

$$\frac{d}{dt}[z(\sigma(t))] = z_u u'(t) + z_v v'(t)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = \left(x_u u'(t) + x_v v'(t),\ y_u u'(t) + y_v v'(t),\ z_u u'(t) + z_v v'(t)\right)$$

$$= u'(t)\, S_u(\sigma(t)) + v'(t)\, S_v(\sigma(t)), \quad \forall t \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = u'(t)\left[\vec{F}(S(\sigma(t))) \cdot S_u(\sigma(t))\right] +$$

$$+ v'(t)\left[\vec{F}(S(\sigma(t))) \cdot S_v(\sigma(t))\right], \quad t \in [a,b].$$

Θέτουμε

$$A(u,v) = \vec{F}(S(u,v)) \cdot S_u, \quad B(u,v) = \vec{F}(S(u,v)) \cdot S_v, \quad (u,v) \in \Delta.$$

Τότε,

$$\vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = A(\sigma(t))u'(t) + B(\sigma(t))v'(t)$$

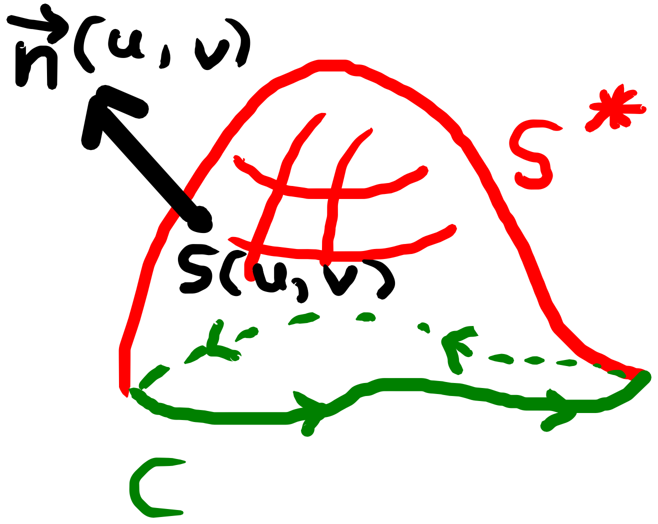
$$= \big(A(\sigma(t)),\ B(\sigma(t))\big)\cdot \sigma'(t),\ t\in[a,b]$$

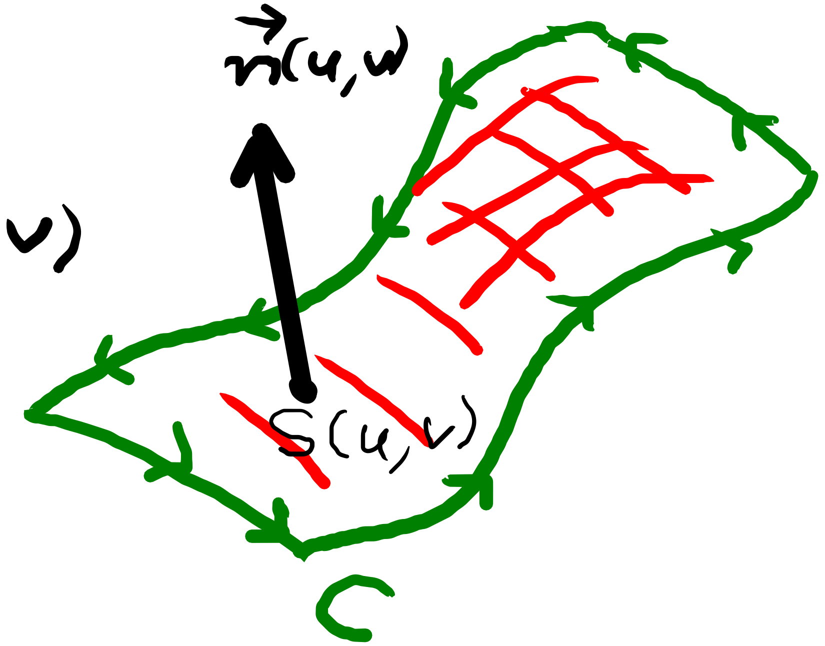
$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \big(A(\sigma(t)),B(\sigma(t))\big)\cdot\sigma'(t)\,dt$$

$$= \int_\sigma (A\,du + B\,dv) \overset{(\Theta.\ \text{Green!})}{=} \iint_\Delta (B_u - A_v)\,du\,dv$$

$$\overset{(\text{Λήμμα } 3)}{=} \iint_\Delta \operatorname{rot}\vec{F}(u,v)\cdot(S_u\times S_v)\,du\,dv = \int_S \operatorname{rot}\vec{F}. \quad \boxtimes$$

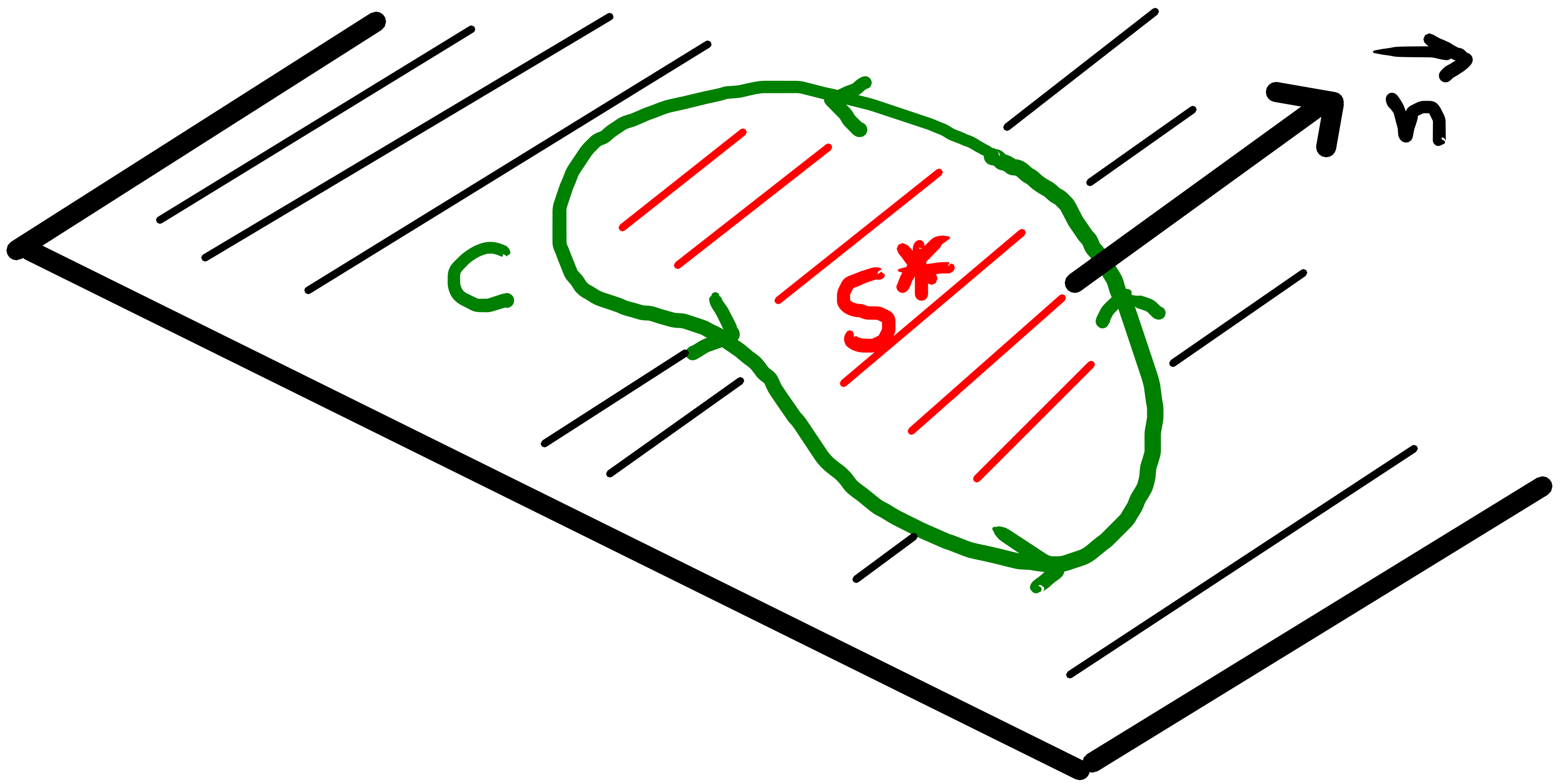
Ορισμός 5: Έστω S απλή κανονική ανοικτή επιφάνεια με χείλος (σύνορο) C. Θα λέμε ότι η C είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το διάνυσμα $\vec{n}(u,v)$ της εξωτερικής καθέτου, αν ικανοποιεί τον παρακάτω κανόνα: όταν κινούμαστε πάνω στη C με το κεφάλι μας να δείχνει την κατεύθυνση του $\vec{n}$, (+) έχουμε συνεχώς την εξωτερική όψη της S^* στα αριστερά μας.



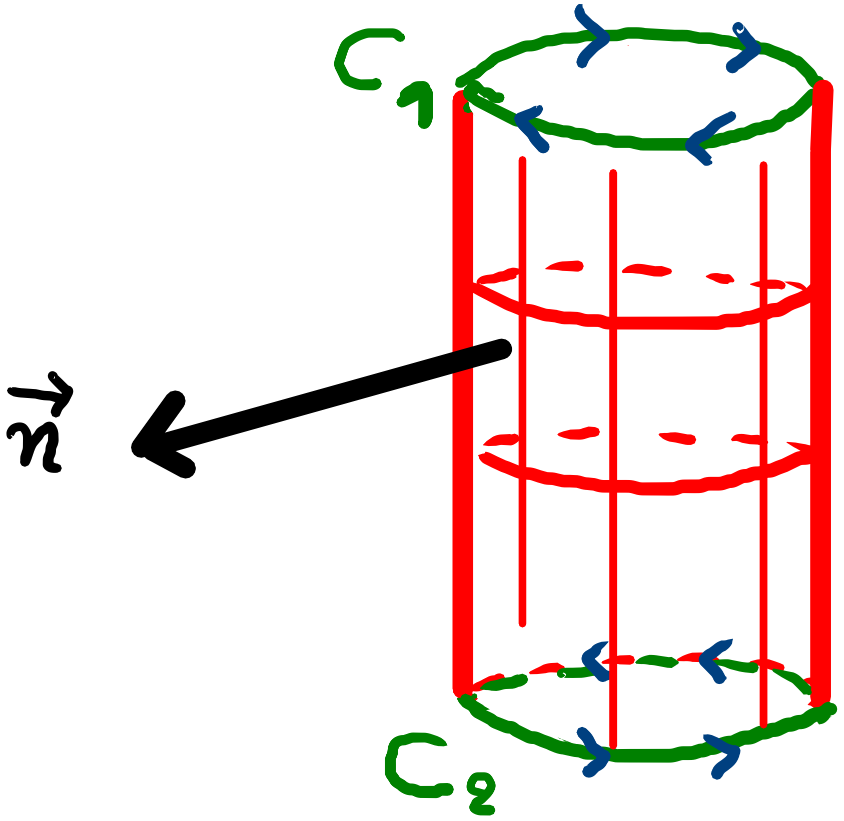


(+) Δηλ. έχουμε στα αριστερά μας το $\vec{n}(u,v)$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(u,v)$

Σχόλιο: Η επιφάνεια S ενδέχεται να είναι επίπεδη.



Εάν η S είναι ένωση πεπερ. πλήθους απλών κανονικών ανοικτών επιφανειών, προσανατολίζουμε θετικά κάθε χείλος ξεχωριστά.



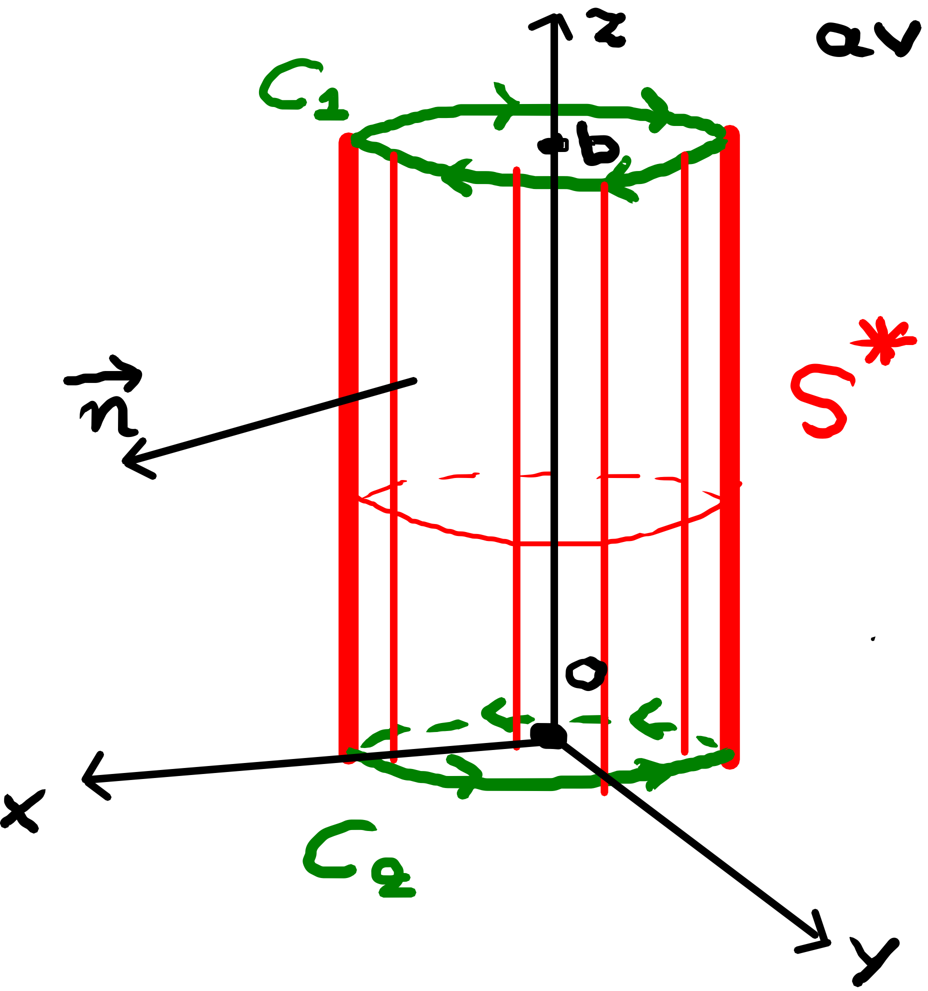
Θεώρημα 6 (Stokes, V2): Έστω $S:\Delta\to\mathbb{R}^3$ απλή κανονική ανοικτή επιφάνεια κλάσης C^2 με χείλος C που είναι θετικά προσανατολισμένο ως προς το διάνυσμα $\vec{n}$ της εξωτερικής καθέτου κ' $\vec{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ διαν. πεδίο κλάσης C^1, όπου $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ ανοικτό με $S^*\subset\Omega$.

Τότε, η ροή του $\operatorname{rot}\vec{F}$ μέσω της S είναι $\int_C \vec{F}$,

δηλ.

$$\iint_\Delta \operatorname{rot}\vec{F}(S(u,v))\cdot\vec{n}(u,v)\,du\,dv = \int_C \vec{F}.$$

Το Θ. Stokes ισχύει κ' για τμηματικά C^2 - απλές κανονικές ανοικτές επιφάνειες με θετικά προσανατολισμένα χείλη. Π.χ.



αν S^*: $x^2+y^2=1$, $0 \leq z \leq b\ (b>0)$, τότε

$$\iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v)\, du\, dv =$$

$$= \int_{C_1} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{F}.$$

- C_2: $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$
- $(-C_1)$: $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, b)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\Longrightarrow$

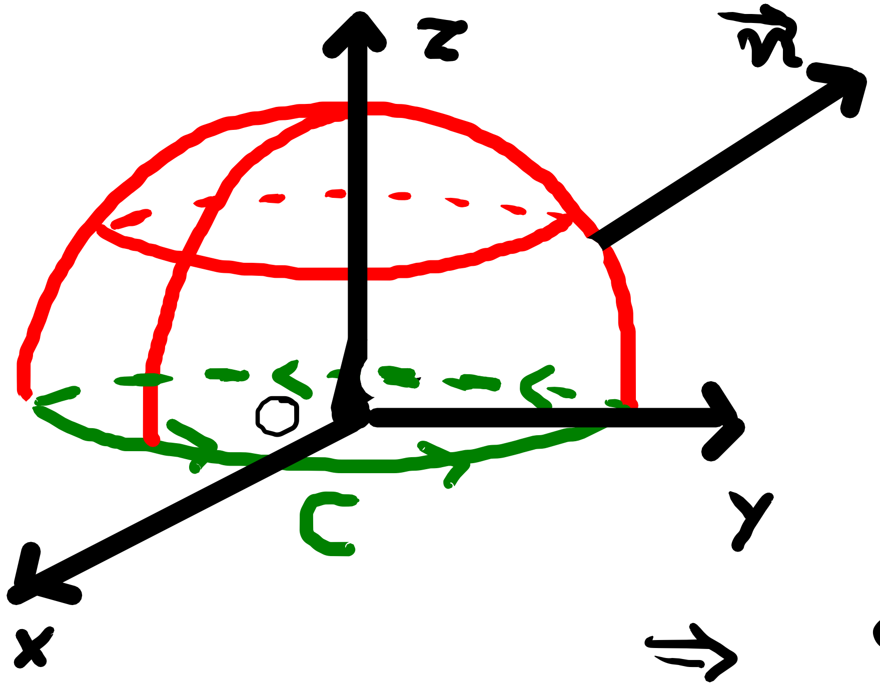
$\Longrightarrow$

$$\iint_{\Delta} \operatorname{rot}\vec{F}(S(u,v))\cdot\vec{n}(u,v)\,du\,dv = -\int_0^{2\pi}\vec{F}(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt + \int_0^{2\pi}\vec{F}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt.$$

<u>Παραδείγματα:</u>

(i) Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διαν. πεδίο $\vec{F}=(3y,-2x,xyz)$ κ' την επιφάνεια S με ίχνος το άνω ημισφαίριο ακτίνας 1 κ' κέντρου $(0,0,0)$.

<u>Λύση:</u>



$S:\Delta=[0,\pi/2]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$

$S(\theta,\varphi)=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$

$S_\theta\times S_\varphi=\dots=\sin\theta\, S(\theta,\varphi),\ 0<\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq\varphi\leq 2\pi$

$\Rightarrow$ $S_\theta\times S_\varphi$ ομόρροπο του διαν. θέσης $S(\theta,\varphi)$

άρα "δείχνει" προς τα έξω $\Rightarrow$ $\underline{\vec{n}(\theta,\varphi)=\sin\theta\, S(\theta,\varphi)}$, $0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$.

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 3y & -2x & xyz\end{vmatrix}=(xz,\ -yz,\ -5)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}(S(\theta,\varphi))=(\sin\theta\cos\varphi\cos\theta,\ -\sin\theta\sin\varphi\cos\theta,\ -5)\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F}(S(\theta,\varphi))\cdot\vec{n}(\theta,\varphi) = \;.\;.\;.\;.\; =$$

$$= \sin^3\theta\cos\theta\cos^2\varphi - \sin^3\theta\cos\theta\sin^2\varphi - 5\sin\theta\cos\theta$$

$$= \sin^3\theta\cos(2\varphi) - \frac{5}{2}\sin(2\theta), \quad \forall(\theta,\varphi)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]$$

$$\Rightarrow \iint_\Delta \operatorname{rot}\vec{F}(S(\theta,\varphi))\cdot\vec{n}(\theta,\varphi)\,d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(2\varphi)\,d\varphi}_{0} -$$

$$-\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)\,d\theta = -5\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \boxed{-5\pi}$$

Ταυτόχρονα, επειδή C θετικά προσανατολ. κύκλος του xy-επιπέδου, έχουμε $z=0$ κι'

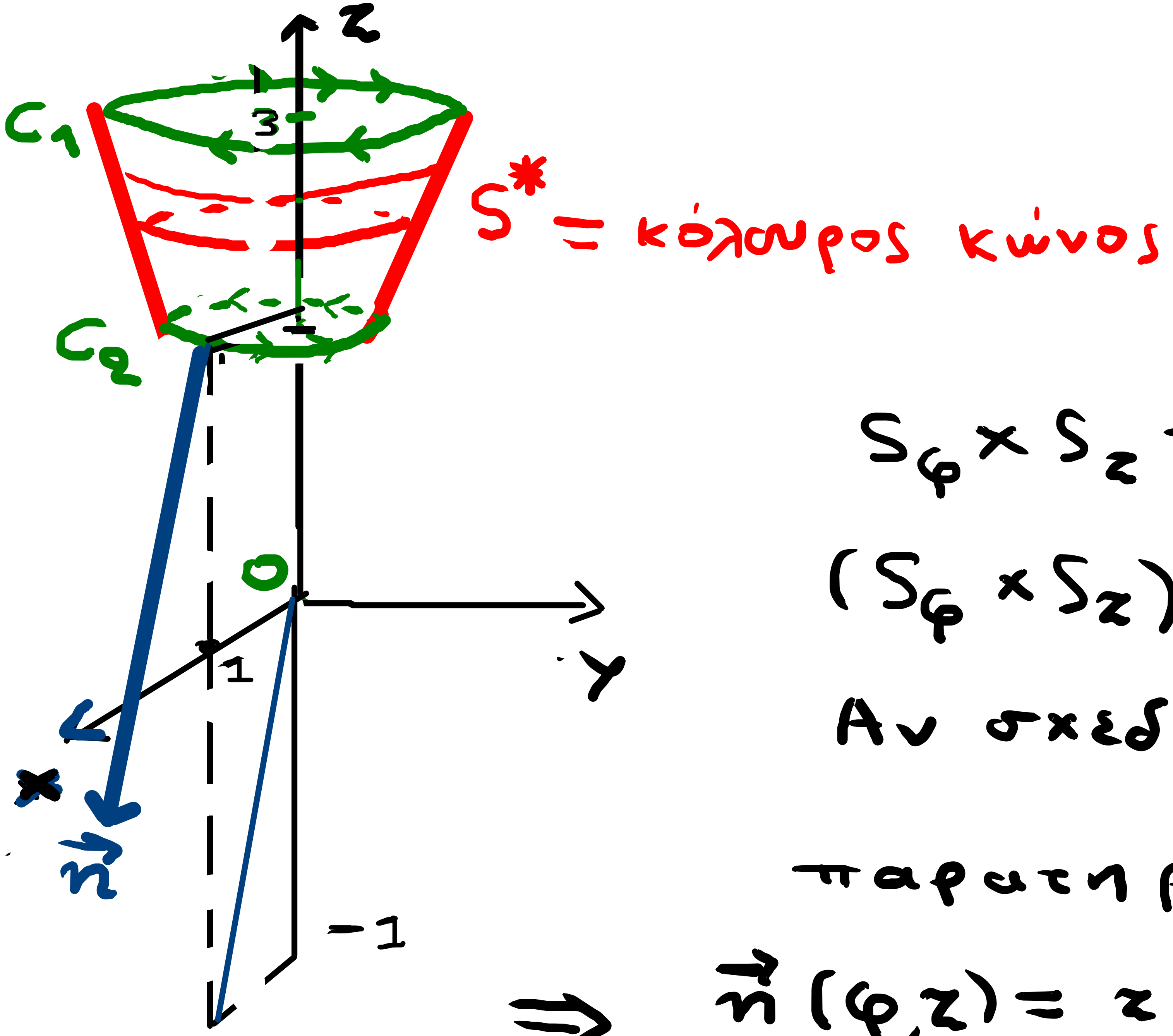
$$\int_C \vec{F} = \int_C (3y\,dx - 2x\,dy) \overset{(\Theta.\ \text{Green})}{=} \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} (-2-3)\,dx\,dy$$

$$= -5 \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} dx\,dy = \boxed{-5\pi.}$$

(2) Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διαν. πεδίο $\vec{F} = (yz, -xz, z^3)$ κ' για την επιφάνεια με ίχνος

$$S^*:\quad z = \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad 1 \leq z \leq 3.$$

<u>Λύση:</u>



$$S(\varphi, z) = z(\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$$

$$(\varphi, z) \in \Delta = [0, 2\pi] \times [1, 3],$$

$$S_\varphi \times S_z = z(\cos\varphi, \sin\varphi, -1), \quad (\varphi, z) \in \Delta$$

$$(S_\varphi \times S_z)(0,1) = (1, 0, -1), \quad S(0,1) = (1,0,1).$$

Αν σχεδιάσουμε το $(1,0,-1)$ με αρχή $(1,0,1)$ παρατηρούμε ότι "δείχνει" προς τα έξω

$$\Rightarrow \underline{\vec{n}(\varphi, z) = z(\cos\varphi, \sin\varphi, -1), \quad (\varphi, z) \in \Delta.}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & -xz & z^3 \end{vmatrix} = (x,\ y,\ -2z)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{F}(S(\varphi,z)) \cdot \vec{n}(\varphi,z) =$$

$$= (z\cos\varphi,\ z\sin\varphi,\ -2z) \cdot (z\cos\varphi,\ z\sin\varphi,\ -z) = 3z^2$$

$$\Rightarrow \iint_{\Delta} \operatorname{rot}\vec{F}(S(\varphi,z)) \cdot \vec{n}(\varphi,z)\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi}\int_1^3 3z^2\, d\varphi\, dz = 2\pi \cdot z^3 \Big|_1^3 = \underline{52\pi.}$$

Τα χείλη της S είναι οι κύκλοι C_1, C_2 προσανατολισμένοι όπως στο σχήμα.

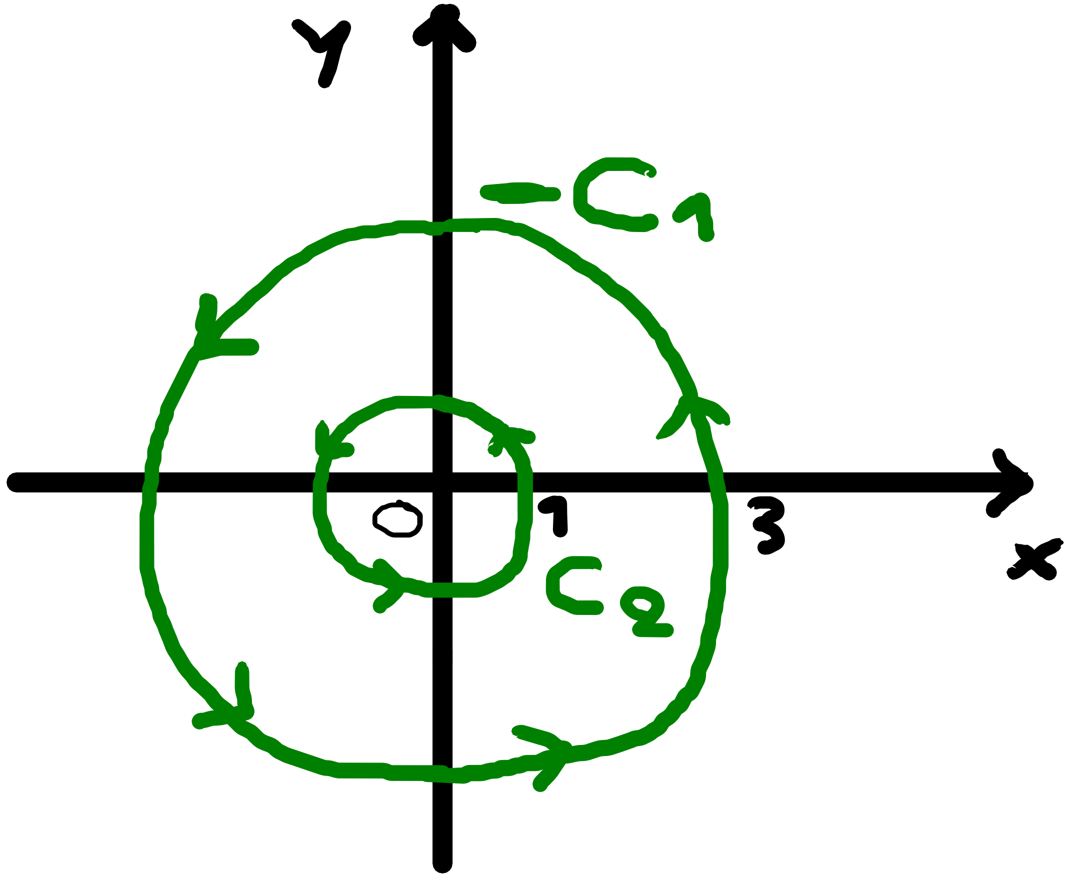
C_1: $\underline{x^2+y^2=1,\ z=1}$, C_2: $\underline{x^2+y^2=9,\ z=3}$ $\Rightarrow$

$$\int_{C_1}\vec{F} + \int_{C_2}\vec{F} = \int_{C_1}(yz\,dx - xz\,dy + z^3\,dz) + \int_{C_2}(yz\,dx - xz\,dy + z^3\,dz)$$

$$= \int_{C_1}(3y\,dx - 3x\,dy) + \int_{C_2}(y\,dx - x\,dy)$$

$$= -3\int_{-C_1}(y\,dx - x\,dy) + \int_{C_2}(y\,dx - x\,dy).$$

Οι $-C_1$, C_2 βρίσκονται σε επίπεδα // στο xy-επίπεδο κ' μάλιστα <u>θετικά προσανατολισμένες</u> αν τις δούμε ως καμπύλες του xy-επιπέδου.



Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε <u>το Θ. Green:</u>

$$\int_{-C_1}(y\,dx-x\,dy)=\iint_{x^2+y^2\le 9}(-1-1)\,dx\,dy=$$

$$=-2\cdot\pi\cdot 9=-18\pi,$$

$$\int_{C_2}(y\,dx-x\,dy)=\int_{x^2+y^2\le 1}(-1-1)\,dx\,dy=-2\cdot\pi\cdot 1^2=-2\pi$$

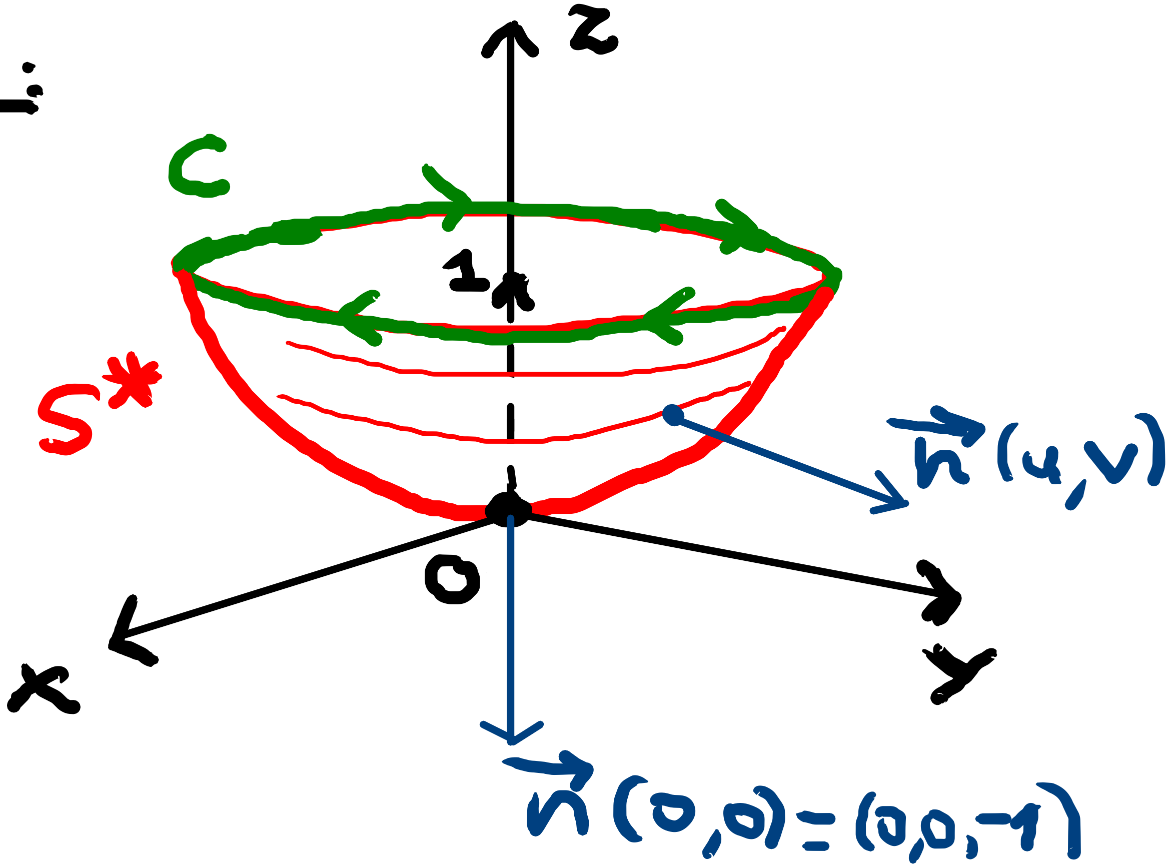
$$\Rightarrow \int_{C_1}\vec{F}+\int_{C_2}\vec{F}=-3\cdot(-18\pi)-2\pi=\underline{52\pi}.$$

(3) Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το πεδίο

$\vec{F} = \frac{1}{3}(z^3, x^3, y^3)$ κ' για την επιφάνεια S με

$S^*: z = x^2 + y^2, \quad 0 \le z \le 1.$

<u>Λύση:</u>



$S: \Delta \to \mathbb{R}^3, \ \Delta = \{(u,v): u^2+v^2 \le 1\}$

$S(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$

$S_u \times S_v = (-2u, -2v, 1)$

$(S_u \times S_v)(0,0) = (0,0,1)$

$S(0,0) = (0,0,0)$

Το $(0,0,1)$ με αρχή $(0,0,0)$ "δείχνει" στο εσωτερικό της $S^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\vec{n}(u,v) = -(S_u \times S_v) = (2u, 2v, -1), \ (u,v) \in \Delta.}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^3 & x^3 & y^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(3y^2, 3z^2, 3x^2)$$

$$= (y^2, z^2, x^2)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) = (v^2, (u^2+v^2)^2, u^2) \cdot (2u, 2v, -1)$$

$$= 2uv^2 + 2v(u^2+v^2)^2 - u^2$$

$$\Rightarrow (\text{ροή του } \vec{F} \text{ μέσω της } S) = \iint_{\Delta} \left[2uv^2 + 2v(u^2+v^2)^2 - u^2\right] du dv$$

$$\underline{\underline{u = r\cos\varphi}}$$
$$v = r\sin\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[2r\cos\varphi\, r^2 \sin^2\varphi + 2r\sin\varphi\, r^4 - r^2\cos^2\varphi \right] r\, dr\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^1 r^4\, dr + 2\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^1 r^6\, dr - \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cdot \int_0^1 r^3\, dr.$$

Αλλά $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\sin^3\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$,

$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi = \pi$, αφού $\int_0^{2\pi} \cos(2\varphi)\, d\varphi = 0$

$\Rightarrow$ η ροή ισούται με $-\pi \cdot \int_0^1 r^3\, dr = \boxed{-\pi/4.}$

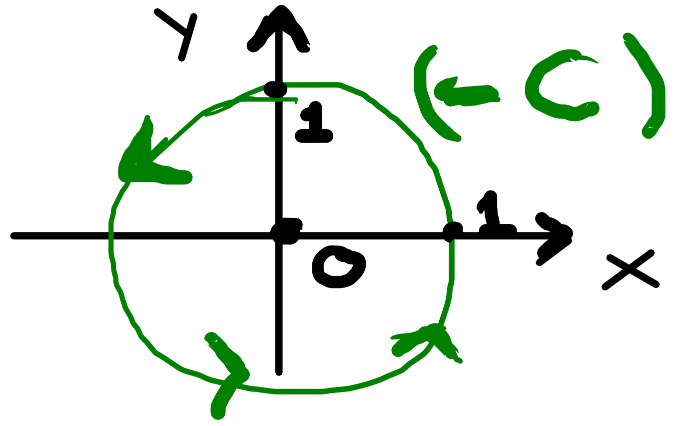
Το χείλος C της S προσανατολίζεται όπως στο σχήμα

κ' $C: \ x^2+y^2=1, \quad z=1$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} = \frac{1}{3}\int_C (z^3 dx + x^3 dy + y^3 dz) = \frac{1}{3}\int_C (dx + x^3 dy) =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-C} (dx + x^3 dy).$$ <u>Η $(-C)$ βρίσκεται σε επίπεδο // // xy − επίπεδο</u>

<u>κ' ως καμπύλη του xy − επιπέδου είναι θετικά προσαν.</u>



οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Green:

$$\frac{1}{3}\int_{-C}\left(dx + x^3\,dy\right) = \iint_{x^2+y^2\le 1} x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^3\,dr = \pi/4 \text{ (όπως πριν)}$$

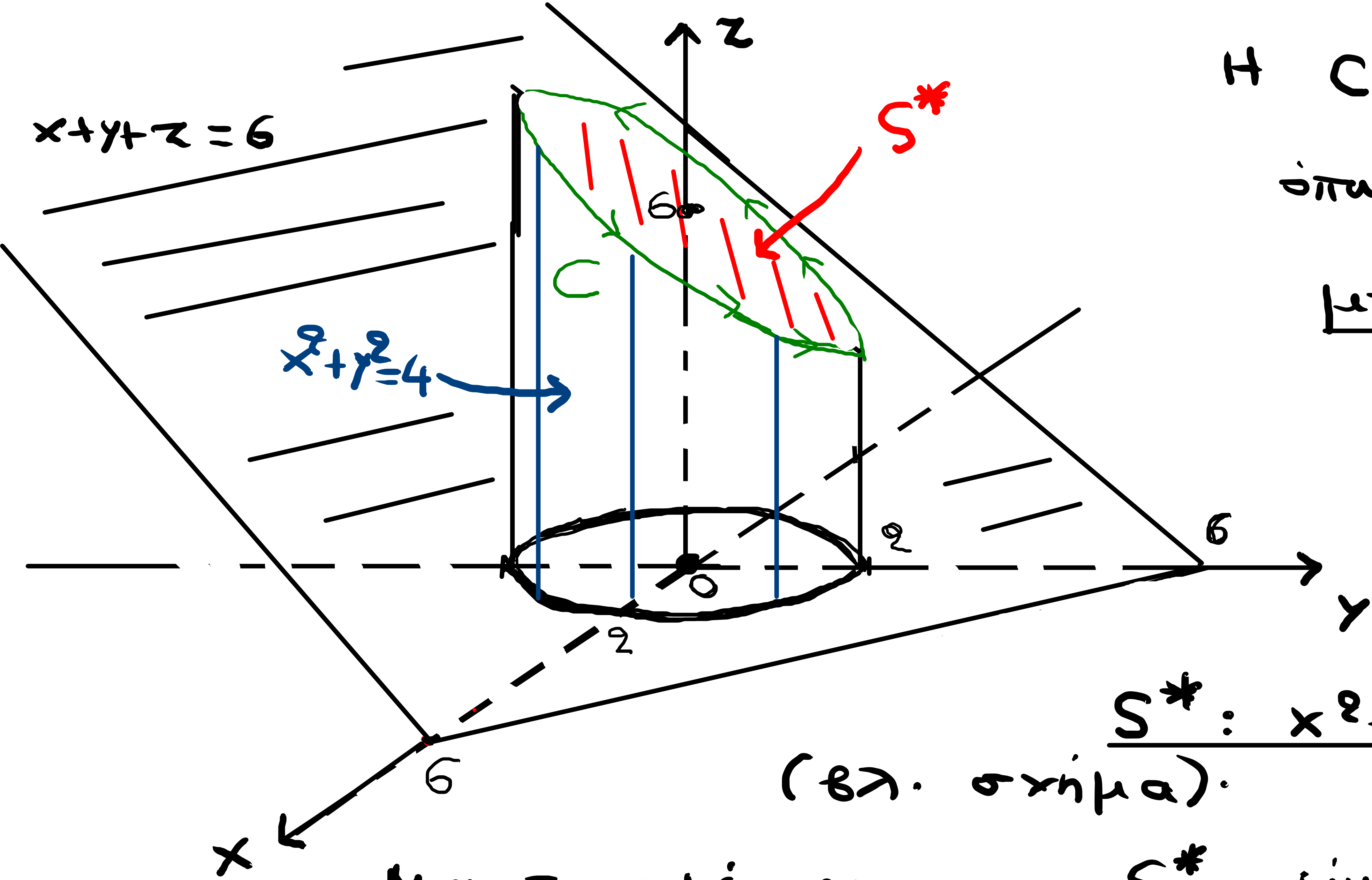
$$\Rightarrow \int_C \vec{F} = \boxed{-\pi/4}.$$

(4) Με χρήση του Θ. Stokes να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου

- $\vec{F} = (y^2 - 2z^2,\ x^2 + z^2,\ y^2 + 2x^2)$
- C η τομή του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 4$ με το επίπεδο $x + y + z = 6$. Η C είναι αρνητικά προσανατολισμένη ως προς την εξωτερική κάθετο της επιφάνειας με ίχνος

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x + y + z \leq 6, \quad z \geq 0.$$

Λύση:



Η C προσανατολίζεται όπως στο σχήμα κι' μπορεί να θεωρηθεί ως το θετικά προσανατολισμένο χείλος του δίσκου

S^*: $x^2+y^2\leq 4$, $x+y+z=6$

(βλ. σχήμα).

Μια παραμέτρηση της S^* είναι

$S:\Delta\to\mathbb{R}^3$, $\Delta=\{(u,v):\ u^2+v^2\le 4\}$, $S(u,v)=(u,v,6-u-v)$.

Έχουμε

$$S_u\times S_v=(1,1,1)$$

επί $S(0,0)=(0,0,6)$. Το $(1,1,1)$ σχεδιασμένο με αρχή το $(0,0,6)$ "δείχνει" προς τα έξω του δίσκου S^* $\Longrightarrow$ $\underline{\vec{n}(u,v)=(1,1,1)}$.

Επιπλέον,

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y^2-2z^2 & x^2+z^2 & y^2+2x^2\end{vmatrix}=(2y-2z,\ -4x-4z,\ 2x-2y)$$

$\Longrightarrow \operatorname{rot}\vec{F}\cdot(1,1,1)=-2x-6z \Longrightarrow$ η ροή του $\operatorname{rot}\vec{F}$ μέσω της S

είναι

$$\iint_\Delta \operatorname{rot}\vec{F}(u,v,6-u-v)\cdot(1,1,1)\,du\,dv = \iint_\Delta \left[-2u-6(6-u-v)\right]du\,dv$$

$$= \iint_\Delta (4u+6v-36)\,du\,dv = 4\iint_\Delta u\,du\,dv + 6\iint_\Delta v\,du\,dv - 36\iint_\Delta du\,dv$$

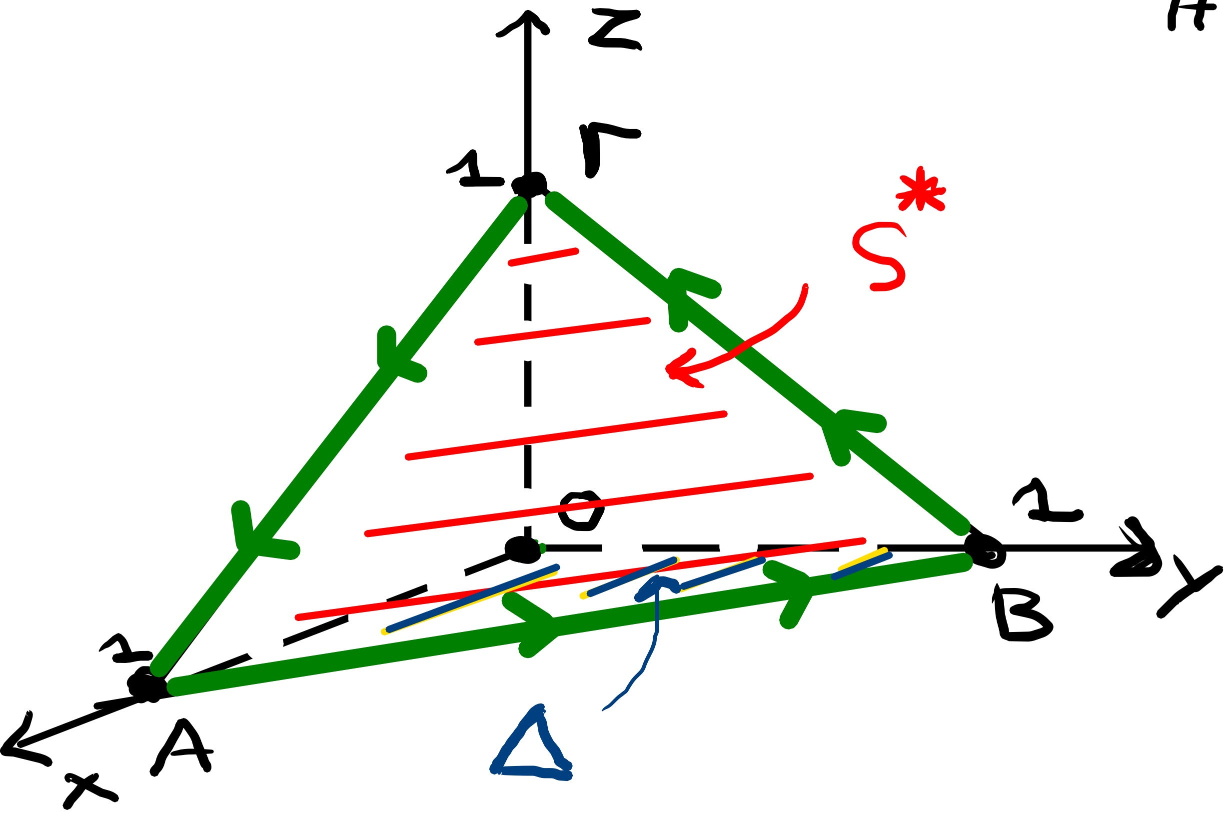
$$\underset{\substack{u=r\cos\varphi \\ v=r\sin\varphi}}{=} \underbrace{4\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2\cos\varphi\,d\varphi}_{0} + \underbrace{6\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2\sin\varphi\,d\varphi}_{0} - 36\cdot\pi\cdot 2^2 = -144\pi$$

(Θ. Stokes) $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_C \vec{F} = \boxed{-144\pi.}$

Με χρήση Θ. Stokes

(5) να υπολογίσετε το $\int_C (z^2dx + x^2dy + y^2dz)$, όπου C η κλειστή τεθλασμένη γραμμή $AB\Gamma A$, με $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $\Gamma(0,0,1)$.

Λύση: Θέτουμε $\vec{F} = (z^2, x^2, y^2)$.



Η C είναι το θετικά προσανατολισμένο χείλος της επιφάνειας S^* του τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$.

Η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται από τα A, B, Γ είναι $x+y+z=1 \Leftrightarrow z = 1-x-y$

$\Rightarrow$ μια παραμέτρηση της επιφάνειας είναι

$S : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $\Delta = \{(u,v) : u+v \leq 1,\ u \geq 0,\ v \geq 0\}$, $S(u,v) = (u, v, 1-u-v)$.

Είναι $S_u \times S_v = (1,1,1)$ ("δείχνει" προς τα έξω) $\Rightarrow \underline{\vec{n}(u,v) = (1,1,1)}$.

Επιπλέον,

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = 2(y, z, x)$$

$$\Rightarrow (\operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{n})|_S = 2(y+z+x) = 2$$

$$\overset{(\Theta.\ \text{Stokes})}{\Longrightarrow} \int_C \vec{F} = \iint_\Delta \operatorname{rot}\vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v)\,du\,dv = 2\iint_\Delta du\,dv =$$

$$= 2(A\overset{\triangle}{O}B) = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1/2 = \underline{\underline{1}}.$$

(6) Δίνεται το διαν. πεδίο $\vec{G} = (x^2-3x+2,\ y,\ (-2x+2)z)$.

(i) Να βρείτε διαν. πεδίο $\vec{F} = (P, Q, 0)$ με $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{G}$.

(ii) Να βρείτε τη ροή του $\vec{G}$ μέσω της επιφάνειας με ίχνος

$$x^2+y^2+z^2 = 2, \quad 0 \le z \le 1.$$

<u>Λύση:</u> (i)

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = (-Q_z,\ P_z,\ Q_x - P_y) \Rightarrow \text{θα πρέπει}$$

$$\begin{cases} -Q_z = x^2-3x+2 \\ P_z = y \\ Q_x - P_y = (-2x+2)z \end{cases}$$

Οι

$$P = yz, \quad Q = -(x^2-3x+2)z$$

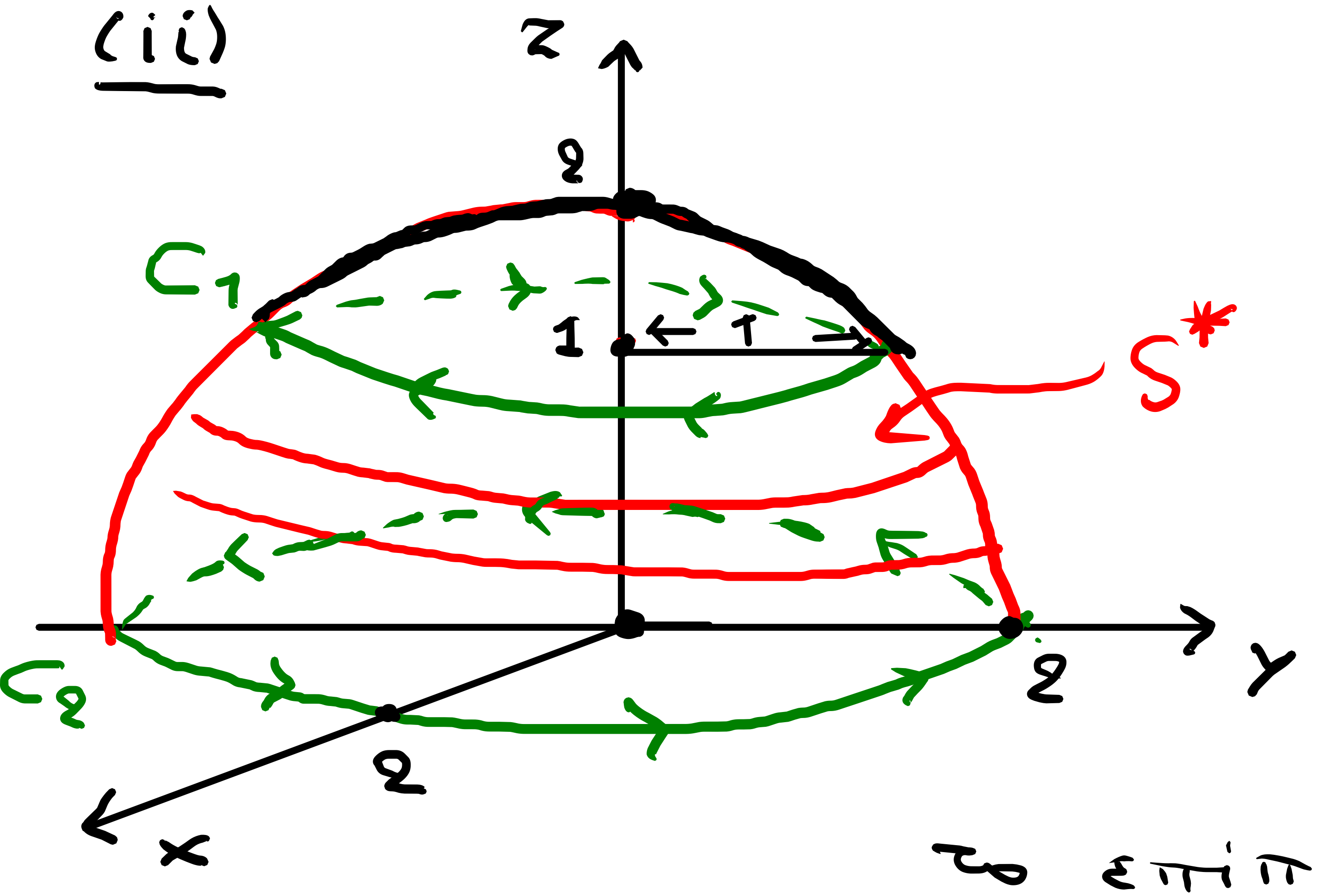
ικανοποιούν τις 2 πρώτες.

Τότε, $Q_x - P_y = -(2x-3)z - z = -2xz+2z \Longrightarrow$ ισχύει κ' η $3^{\underline{\eta}}$.

Άρα, αν $\vec{F} = (yz, -(x^2-3x+2)z, 0)$, τότε $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{G}$ (φυσικά η $\vec{F}$

δεν είναι η μοναδική κ' αυτή την ιδιότητα.)

(ii)



Το ίχνος S^* της επιφάνειας είναι το τμήμα του άνω ημισφαιρίου $x^2+y^2+z^2=2$, $z\geq 0$ που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $z=1$.

Η τομή του ημισφαιρίου με το επίπεδο $z=1$ είναι ο κύκλος $C_1: x^2+y^2=1$, $z=1$.

Η S^* έχει δύο χείλη: C_1 κ' $C_2: x^2+y^2=2$, $z=0$ προσανατολισμένα όπως στο σχήμα.

Από το Θ. Stokes παίρνουμε ότι η ροή του $\vec{G} = \mathrm{rot}\vec{F}$ μέσω της S είναι

$$\int_{C_1} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{F}, \qquad \text{όπου} \quad \vec{F} = (yz, (-x^2+3x-2)z, 0)$$

→ $\vec{F}|_{C_2} = (0,0,0)$, αφού $z=0$, πάνω στην C_2.

→ $\vec{F}|_{C_1} = (y, -x^2+3x-2, 0)$ πάνω στην C_1.

Έχουμε

$$\int_{C_1} \vec{F} = -\int_{-C_1} \vec{F} = \int_{-C_1} \left[-y\,dx + (x^2-3x+2)\,dy\right] \overset{(\Theta.\,\mathrm{Green})}{=}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (2x-3+1)\,dx\,dy = 2\iint_{x^2+y^2\le 1} x\,dx\,dy - 2\underbrace{\iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy}_{\pi}$$

κ' $$\iint_{x^2+y^2\le 1} x\,dx\,dy \underset{y=r\sin\varphi}{\overset{x=r\cos\varphi}{=}} \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi}_{0}\cdot\int_0^1 r^2\,dr = 0$$

$\Longrightarrow$ η ζητούμενη ροή ισούται με $\underline{\underline{-2\pi}}$.

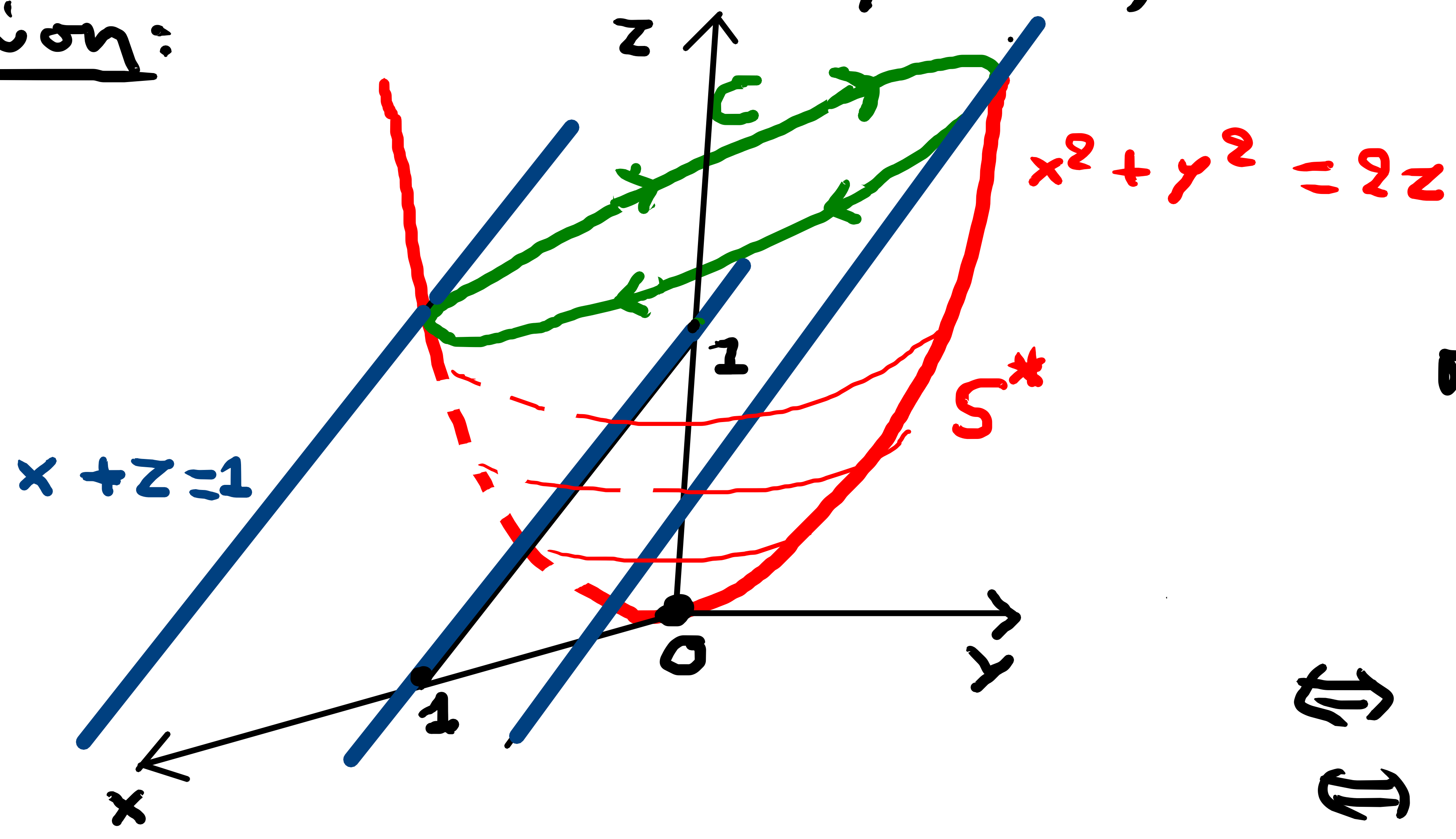
(7) Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διαν. πεδίο

$$\vec{F} = (y,\ z-2,\ x+1)$$

κ' την επιφάνεια

$$x^2+y^2 = 2z, \qquad z \leq 1-x.$$

Λύση:



$S: \Delta \to \mathbb{R}^3$

$$S(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2+v^2}{2}\right)$$

Για $(u,v) \in \Delta$, πρέπει

$$\frac{u^2+v^2}{2} \leq 1-u$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2+2u+v^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad (u+1)^2+v^2 \leq 3,$$

οπότε $\quad \Delta = \{ (u,v) : (u+1)^2 + v^2 \leq 3 \}$.

$S_u \times S_v = (-u, -v, 1)$, $\quad (S_u \times S_v)(0,0) = (0,0,1)$.

Το $(0,0,1)$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(0,0) = (0,0,0)$

"δείχνει" στο εσωτερικό της S^*

$$\Longrightarrow \quad \underline{\vec{n}(u,v) = (u, v, -1), \quad (u,v) \in \Delta.}$$

Επιπλέον,

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z-2 & x+1 \end{vmatrix} = \underline{(-1, -1, -1)}.$$

Συνεπώς, η ροή του rot$\vec{F}$ διαμέσου της S είναι

$$\iint_\Delta \text{rot}\vec{F}(S(u,v))\cdot \vec{n}(u,v)\,du\,dv = \iint_\Delta (-u-v+1)\,du\,dv =$$

$$= -\iint_\Delta (u+v)\,du\,dv + \underbrace{\iint_\Delta du\,dv}_{3\pi}.$$

$$\Delta = \{(u,v) : (u+1)^2 + v^2 \leq 3\}$$

$$u = -1 + r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow \iint_\Delta (u+v)\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (-1 + r\cos\varphi + r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= -2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r\,dr \;+\; \underbrace{\int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi}_{0} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} r^2\,dr$$

$$= -\pi r^2 \Big|_0^{\sqrt{3}} = -3\pi.$$

Άρα, η ροή του $\vec{F}$ μέσω της S είναι

$$3\pi + 3\pi = \underline{\underline{6\pi}}.$$

Το χείλος C της S^* είναι η τομή των επιφανειών

$$2z = x^2 + y^2, \qquad x + z = 1,$$

προσανατολισμένη όπως στο σχήμα.

Η C ως επίπεδη καμπύλη είναι αρνητικά προσανατολ.

$$C: \quad x^2 + y^2 = 2(1-x), \qquad z = 1 - x$$

$$\iff \quad (x+1)^2 + y^2 = 3, \qquad z = 1 - x$$

Παραμέτρηση της $(-C)$:

$$\underline{x=-1+\sqrt{3}\cos t,\quad y=\sqrt{3}\sin t,\quad z=1-x=2-\sqrt{3}\cos t,}$$

$$\underline{t\in[0,2\pi].}$$

ή

κ'

$$\gamma(t)=(-1+\sqrt{3}\cos t,\ \sqrt{3}\sin t,\ 2-\sqrt{3}\cos t)$$

$$\gamma'(t)=\sqrt{3}\,(-\sin t,\ \cos t,\ \sin t)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=(\sqrt{3}\sin t,\ -\sqrt{3}\cos t,\ \sqrt{3}\cos t)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{3}\,(-\sin t,\ \cos t,\ \sin t)=3\,(-\sin^2 t-\cos^2 t+\sin t\cos t)$$

$$=-3+\frac{3}{2}\sin(2t),\qquad t\in[0,2\pi]$$

$$\Rightarrow \int_C\vec{F}=-\int_{-C}\vec{F}=3\int_0^{2\pi}dt+\frac{3}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(2t)\,dt}_{0}=\underline{\underline{6\pi}}.$$