

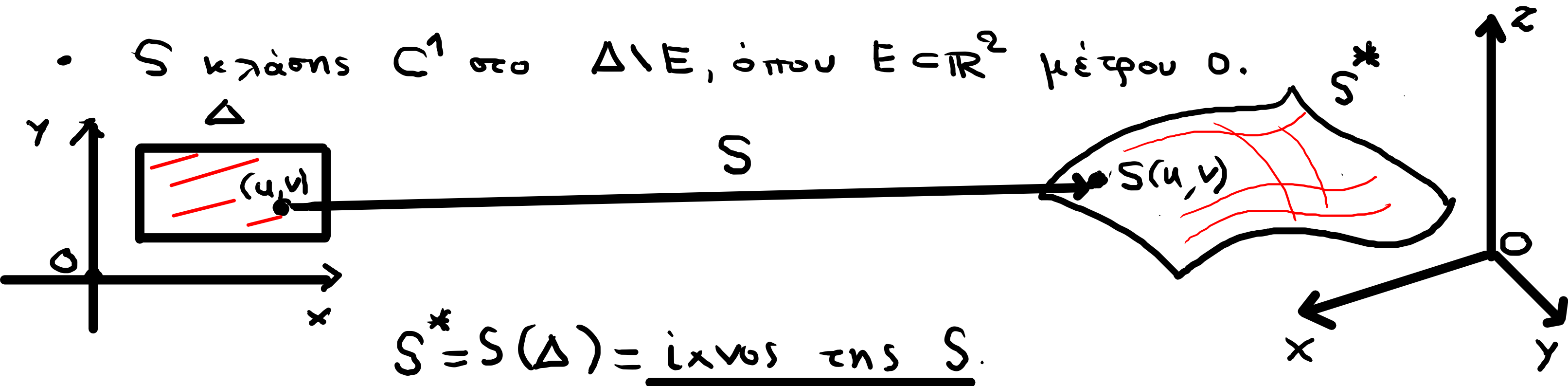
## ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Ορισμός 1: Επιφάνεια στον  $\mathbb{R}^3$  είναι μια απεικόνιση

$$S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Delta \ni (u, v) \mapsto S(u, v) \in \mathbb{R}^3,$$

όπου  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος, ώστε

- $S$  συνεχής
- $S$  κλάσης  $C^1$  στο  $\Delta \setminus E$ , όπου  $E \subset \mathbb{R}^2$  μέτρου 0.



$$S^* = S(\Delta) = \underline{\text{εχνοσ της } S}.$$

$$S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in \Delta,$$

$x(\cdot, \cdot), y(\cdot, \cdot), z(\cdot, \cdot) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς,  $C^1$  στο  $\Delta \setminus E$ .

Η  $S$  λέγεται λεία αν  $\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \neq \vec{0}, \forall (u, v) \in \Delta \setminus E$ .

Εάν τότε  $\Phi(x, y, z) = 0$  η καρτεσιανή εξίσωση του  $S^*$ ,

$$\Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in \Delta$$

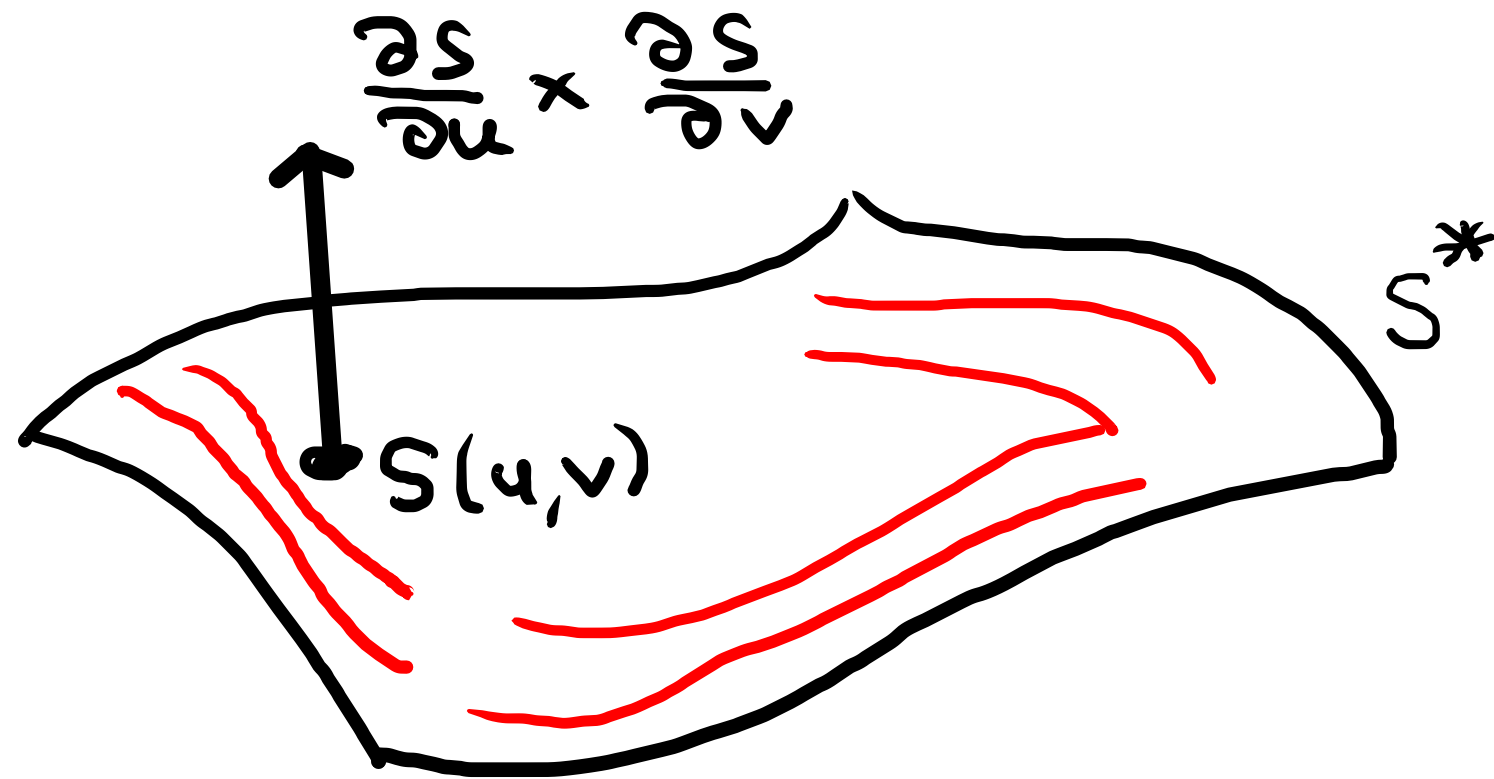
παραγωγ.

ως προς  
 $u, v \in \Delta \setminus E$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_x x_u + \Phi_y y_u + \Phi_z z_u = 0 \\ \Phi_x x_v + \Phi_y y_v + \Phi_z z_v = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \nabla \Phi \cdot \frac{\partial S}{\partial u} = \nabla \Phi \cdot \frac{\partial S}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \parallel \nabla \Phi$$

$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v}$  κάθε το βενν  $S^*$  σε κάθε σημείο  $S(u, v)$ ,  
 με  $(u, v) \in \Delta \setminus E$ .



Συμβολ.

$$\frac{\partial S}{\partial u} = S_u, \quad \frac{\partial S}{\partial v} = S_v$$

Παραδείγματα:

(i)  $S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Delta = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ .

$$S(\theta, \varphi) = R(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta), \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

( $R > 0$ ).

$$S_{\theta} = R(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta),$$

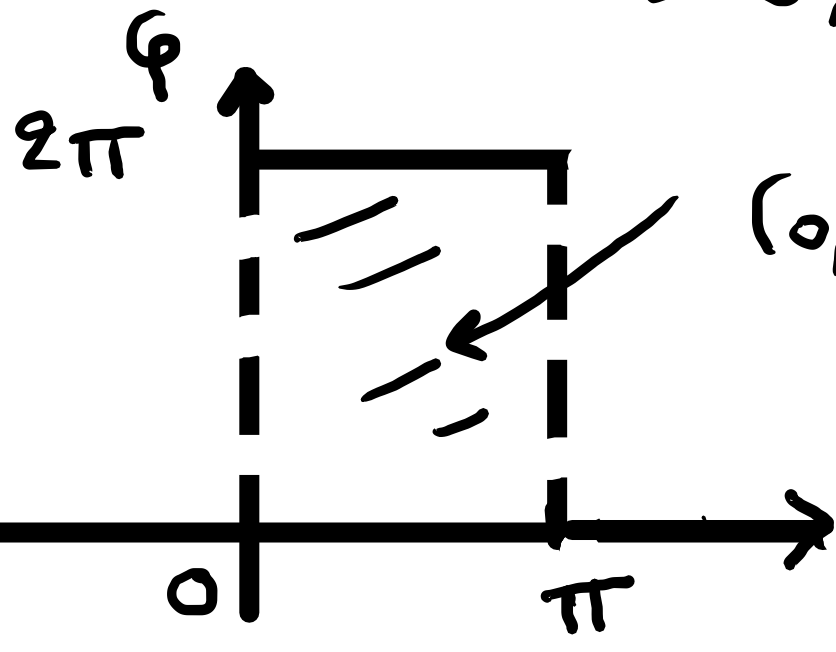
$$S_{\varphi} = R(-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0) = R \sin \theta (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$S_{\theta} \times S_{\varphi} = R^2 \sin \theta \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = R \sin \theta S(\theta, \varphi).$$

Είναι  $\|S(\theta, \varphi)\| = R > 0$ ,  $\|S_\theta \times S_\varphi\| = R^2 \sin \theta > 0$ ,

$\forall (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi]$



$(0, 2\pi) \times [0, 2\pi] = \Delta \setminus E$

$T_0 E = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \cup$

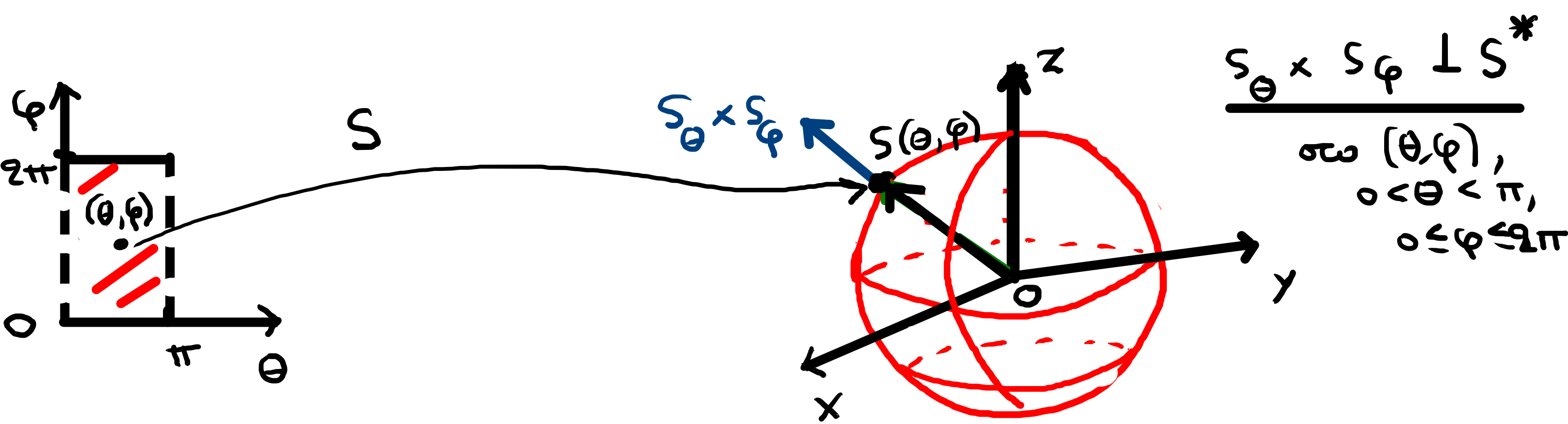
$\cup \{(\pi, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

έκεί με  $\varphi = 0$  (εμβαδόν) = 0

$\Rightarrow S$  λεία.

$S^* = S(\Delta) = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}$

= σφαίρα κέντρου 0 ράδιος R.



$$\frac{S_\theta \times S_\phi \perp S^*}{\omega(\theta, \phi), \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi}$$

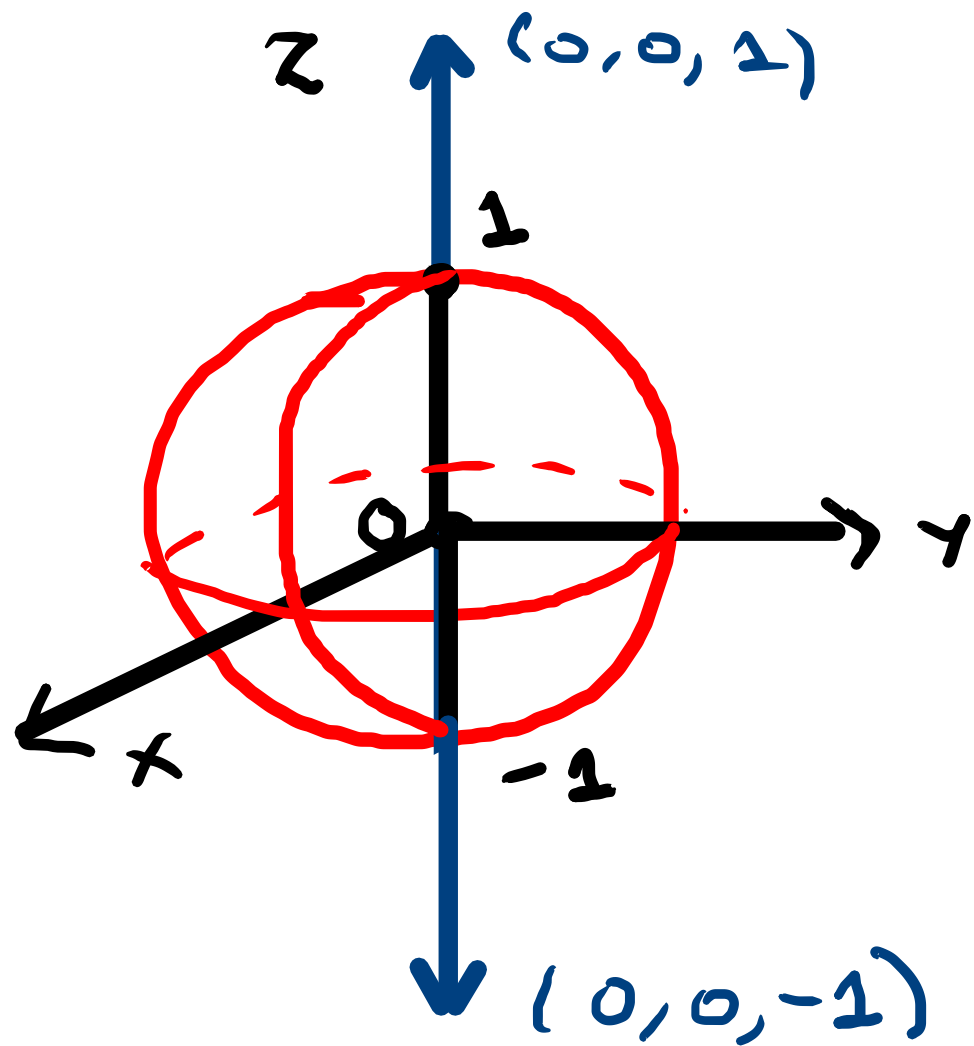
$$\forall (\theta, \phi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi], \quad S_\theta \times S_\phi = R^2 \sin\theta S(\theta, \phi)$$

$\Rightarrow S_\theta \times S_\phi$  οριζόντιο των διανυσματων θέσης  $S(\theta, \phi)$

$\Rightarrow$  το  $S_\theta \times S_\phi$  "δείχνει" προς το "εξωτερικό" της σφαιρας,  
 εάν σχεδιαστεί με αρχή το σημείο  $S(\theta, \phi)$ .

Στα σημεία  $S(0, \varphi) = (0, 0, 1)$ ,  $S(\pi, \varphi) = (0, 0, -1)$   
( "βόρειος πόλος" - "νότιος πόλος" αντιστοίχα), τα διανύσματα  
 $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, -1)$  είναι κάθετα στη σφαίρα.

---



(ii) Έστω  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος κ'  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής με  $f|_{\partial\Delta}$  κλάση  $C^1$  ( $\overset{\circ}{\Delta}$  = εσωτερικό του  $\Delta$ ).

Θεωρούμε την επιφάνεια  $S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $S(u, v) = (u, v, f(u, v))$ .

Τότε,  $S$   $C^1$  στο  $\overset{\circ}{\Delta} = \Delta \setminus \partial\Delta$ ,  $\partial\Delta$  μέτρα 0 κ'  $\forall (u, v) \in \overset{\circ}{\Delta}$ ,

$$S_u \times S_v = (1, 0, f_u) \times (0, 1, f_v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{(-f_u, -f_v, 1)} \neq (0, 0, 0) \Rightarrow S \text{ λεία .}$$

$$S^* = \underline{\text{χρήσημα της } f}, \quad \underline{(-f_u, -f_v, 1)} \perp S^* \text{ στο } (u, v) \in \overset{\circ}{\Delta}.$$



(iii)  $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq R^2\} (R > 0),$

$$S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad S(u, v) = (u, v, \underbrace{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}_{f(u, v)}), \quad (u, v) \in \Delta.$$

(Ειδική περίπτωση του (ii)).

$S$  κλάσης  $C^1$  στο  $\overset{\circ}{\Delta} = \{(u, v) : u^2 + v^2 < R^2\}$  κ'  $\forall (u, v) \in \overset{\circ}{\Delta},$

το  $S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = \left( \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, 1 \right)$

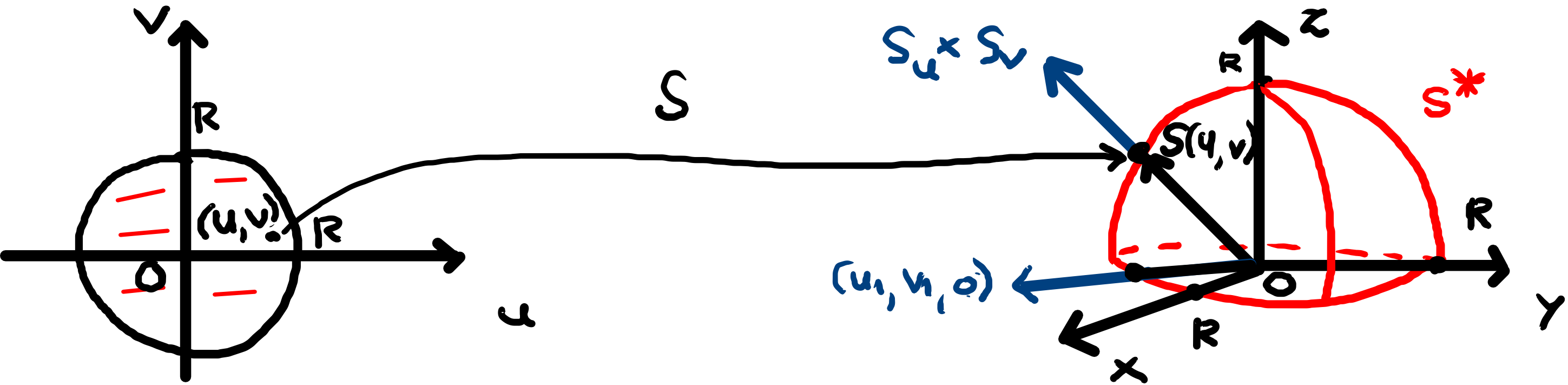
$$= \frac{1}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} S(u, v)$$

είναι κάθετο στο  $S^*$  κ' ομόρροπο του διαν.θέσης  $S(u, v)$ .

Άρα, το  $S_u \times S_v$  "δείχνει" στο "εξωτερικό" της επιφάνειας, εάν σχεδιαστεί με αρχή το σημείο  $S(u, v)$ .

$$S^* = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0 \}$$

= άνω ημσφαίριο με κέντρο 0 ή ακτίνα R.



Εάν  $u_1^2 + v_1^2 = R^2$  τότε  $(u_1, v_1, 0) \perp S^*$  στο  $(u_1, v_1)$ .

(iv)  $\Delta = [0, 2\pi] \times [a, b] (a < b), S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3,$

$$S(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z), (\varphi, z) \in \Delta$$

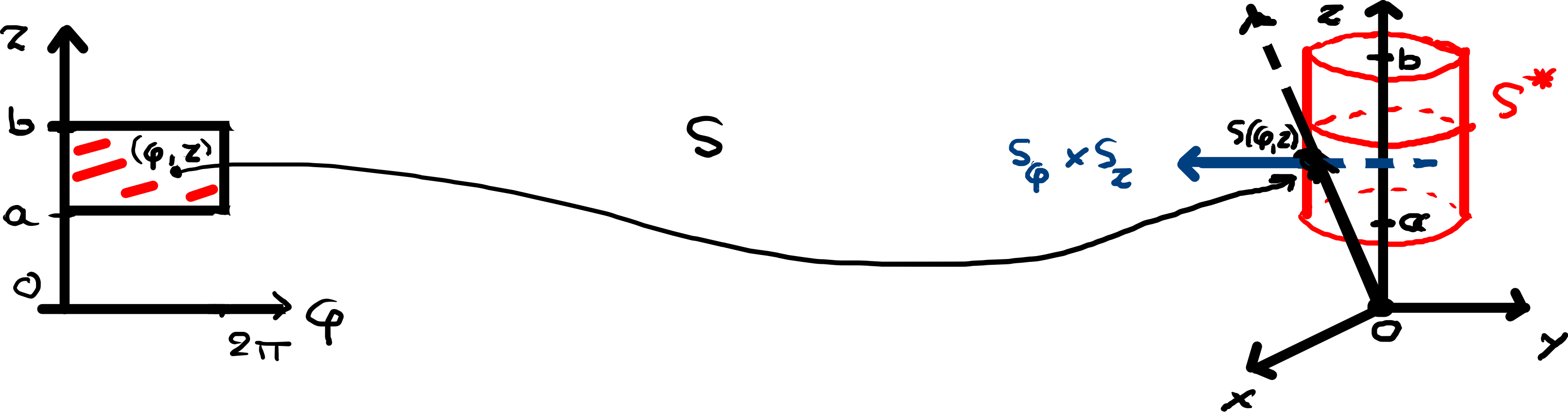
$$S_\varphi \times S_z = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \neq (0, 0, 0), \forall (\varphi, z) \in \Delta \Rightarrow S$  για επιφάνεια.

$(S_\varphi \times S_z) \cdot S(\varphi, z) = 1 > 0 \Rightarrow$  η γωνία των  $S_\varphi \times S_z, S(\varphi, z)$  είναι

οξεία  $\Rightarrow$  το διάνυσμα  $S_\varphi \times S_z$  "δείχνει" στο

"εξωτερικό" της  $S^*$  , εάν σχεδιαστεί με αρχή το σημείο  $S(\varphi, z)$ .



$$S^* = S([0, 2\pi] \times [a, b]) = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, a \leq z \leq b \}$$

= κύλινδρος (όπως στο σχήμα).

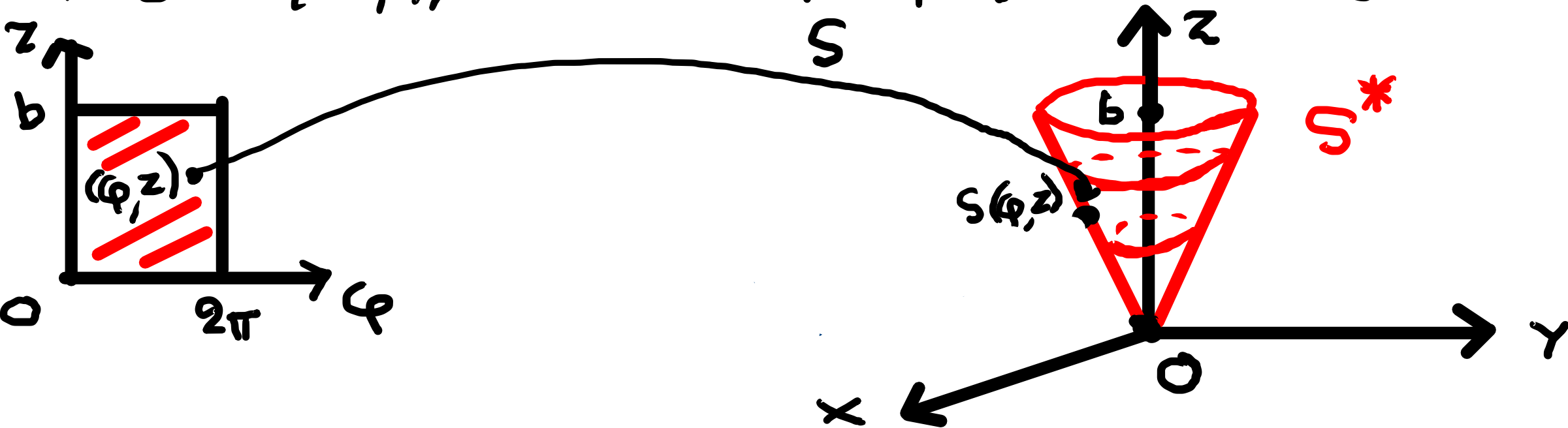
(v) Έστω  $R > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\Delta = [0, 2\pi] \times [0, b]$ . Θέτουμε

$$S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad S(\varphi, z) = \left( \frac{z}{R} \cos \varphi, \frac{z}{R} \sin \varphi, z \right).$$

Εάν  $x = \frac{z}{R} \cos \varphi$ ,  $y = \frac{z}{R} \sin \varphi$ ,  $0 \leq z \leq b$

τότε  $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{R^2} \implies z = R\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\implies S^* = \left\{ (x, y, z) : z = R\sqrt{x^2 + y^2} \right\} = \text{κώνος (βλ. σχήμα)}$$



$$\forall (\varphi, z) \in \Delta,$$

$$S_\varphi \times S_z = \left( -\frac{z}{R} \sin \varphi, \frac{z}{R} \cos \varphi, 0 \right) \times \left( \frac{\cos \varphi}{R}, \frac{\sin \varphi}{R}, 1 \right)$$

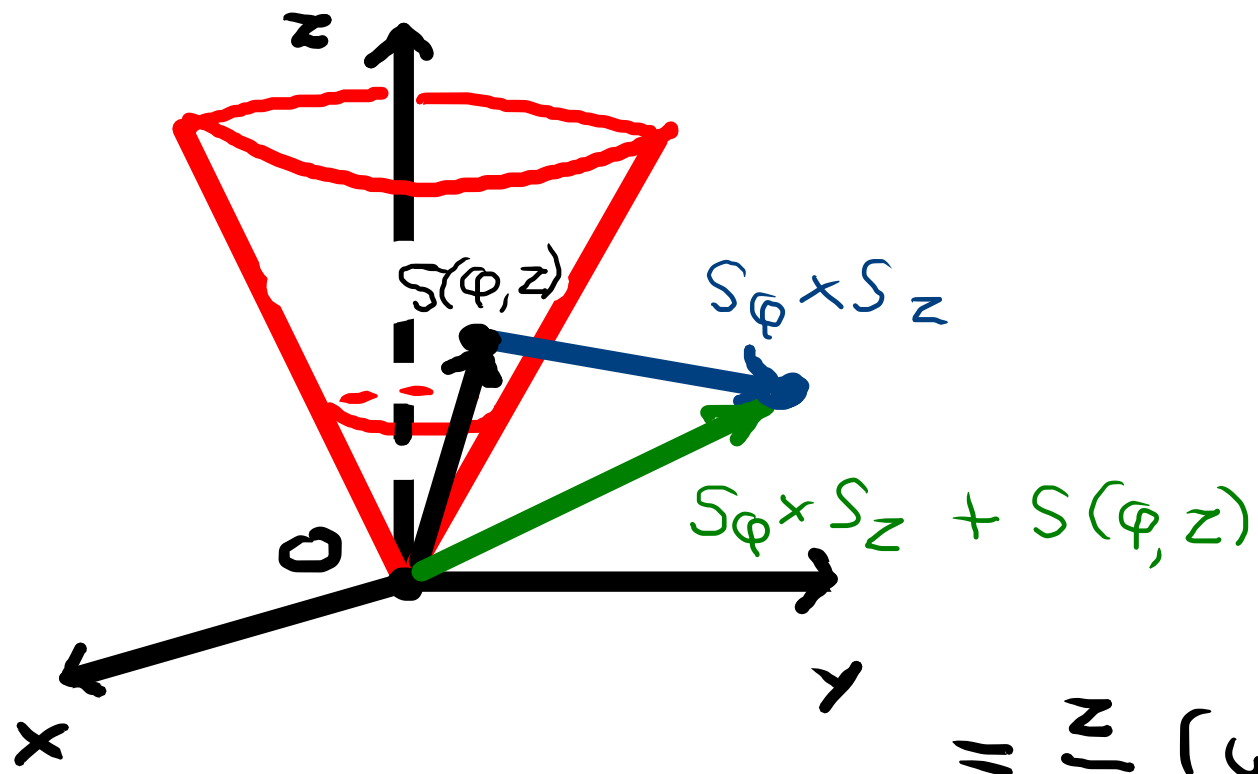
$$= \frac{z}{R^2} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \times (\cos \varphi, \sin \varphi, R)$$

$$= \frac{z}{R^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & R \end{vmatrix} = \frac{z}{R^2} (R \cos \varphi, R \sin \varphi, -1)$$

$$= \frac{z}{R} (\cos \varphi, \sin \varphi, -\frac{1}{R}).$$

$S_\varphi \times S_z \neq \vec{0}, \forall z \in (0, b]$  κ' ε' ε'  $\{ (\varphi, 0) : \varphi \in [0, 2\pi] \}$  είναι μέτρο 0

$\Rightarrow$  S λεια.



Θεωρούμε σαν αρχή του  $S_\phi \times S_z$  το  $S(\phi, z)$ , οπότε το

πέρασμα του  $S_\phi \times S_z$  έχει διάωσμο

θέσης  $S(\phi, z) + S_\phi \times S_z =$

$$= \frac{2N}{R} (\cos\phi, \sin\phi, R) + \frac{N}{R} (\cos\phi, \sin\phi, -\frac{1}{R})$$

$$= \left( \underbrace{\frac{2N}{R} \cos\phi}_A, \underbrace{\frac{2N}{R} \sin\phi}_B, \underbrace{z \left(1 - \frac{1}{R^2}\right)}_\Gamma \right).$$

- Εάν  $R < 1$ , τότε  $\Gamma < 0 \Rightarrow (A, B, \Gamma)$  κυκλός του κώνου

- Εάν  $R \geq 1$ , έχουμε  $R^2(A^2 + B^2) - \Gamma^2 = 4z^2 - z^2 \left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 =$

$$= z^2 \left[ 4 - \left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2 \right] = z^2 \frac{4R^4 - (R^2 - 1)^2}{R^4} = \frac{z^2}{R^4} (3R^4 + 2R^2 - 1)$$

$(R \geq 1)$   
 $> 0$

$$\Rightarrow 0 \leq r < R \sqrt{A^2 + B^2} \Rightarrow (A, B, r) \text{ φύσις του κίνου.}$$

Άρα, το  $S_{\varphi} \times S_z$  δείχνει πάντα στο εξωτερικό του κίνου.



(vi)  $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq b\}$  ( $b > 0$ ),  $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$

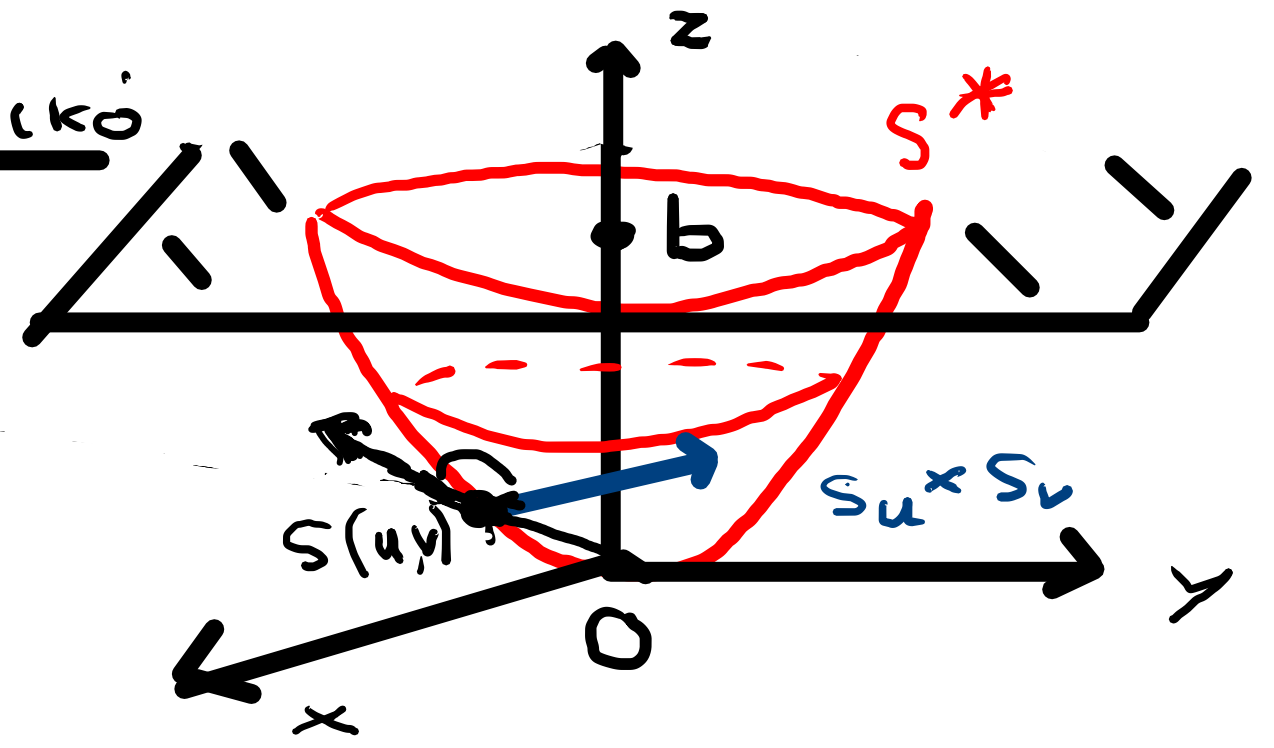
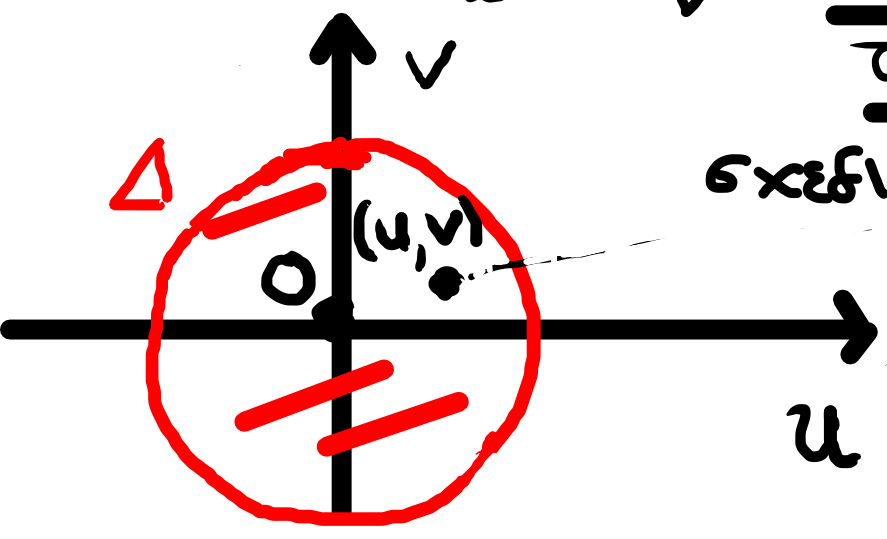
$S(u, v) = (u, v, \underbrace{u^2 + v^2}_{f(u, v)})$

$S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = (-2u, -2v, 1) \neq (0, 0, 0), \forall (u, v) \in \Delta$

$\Rightarrow S$  λεία.

$(S_u \times S_v) \cdot S(u, v) = -(u^2 + v^2) \leq 0, \forall (u, v) \in \Delta$

$\Rightarrow$  το  $S_u \times S_v$  "δείχνει" στο εσωτερικό της  $S^*$  εάν σχεφιστεί με αρχή το  $S(u, v)$ .



ΑΠΛΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ.

Θέτουμε

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \},$$

$$B^\circ = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}$$

$$T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}.$$

Ορισμός 2: Μια λεία επιφάνεια  $S$  στον  $\mathbb{R}^3$  λέγεται απλή  
κανονική κλειστή αν  $\exists \varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  1-1, συνεχής ώστε

$\rightarrow$  το  $\varphi(T) = S^*$   
 $\varphi(B^\circ)$  λέγεται εσωτερικό της  $S^*$ .

Συμβολ.:  $\varphi(B^\circ) = \text{int } S^*$ .

$\rightarrow$  το  $\mathbb{R}^3 \setminus (S^* \cup \text{int } S^*)$  λέγεται εξωτερικό της  $S^*$ .  
Συμβολ.:  $\text{ext}(S^*)$ .

Διασθητικά, μια επιφάνεια είναι κλειστή αν είναι το σύνορο ενός φραγμένου σετ.

Εναλλακτικά, μια επιφάνεια είναι κλειστή αν για να  
μπορέσουμε να μεταβούμε από την "έξωτερική όψη" της  
στην "εσωτερική", πρέπει να "τρυπήσουμε" την επιφάνεια.



Θέτουμε

$$B_+ = \{ (x, y, z) \in B : z \geq 0 \},$$

$$B_+^o = \{ (x, y, z) \in B : z > 0 \}$$

$$T_+ = \{ (x, y, z) \in T : z \geq 0 \} = \text{άνω ημισφαίριο}$$

$$C = \{ (x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1 \} = \text{"ισημερινός"}$$

Ορισμός 3: Μια λεία επιφάνεια  $S$  λέγεται απλή κανονική  
ανοικτή επιφάνεια αν  $\exists \varphi : B_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  1-1, συνεχής ώστε

$$\varphi(T_+) = S^*.$$

Το  $\varphi(B_+^o) = \text{int } S^*$  λέγεται εσωτερικό της  $S^*$ .

Το  $\mathbb{R}^3 \setminus (S^* \cup \text{int } S^*) = \text{ext } S^*$  λέγεται εξωτερικό της  $S^*$ .

Το  $\varphi(C)$  λέγεται χείλος ή σύνορο της  $S^*$ .

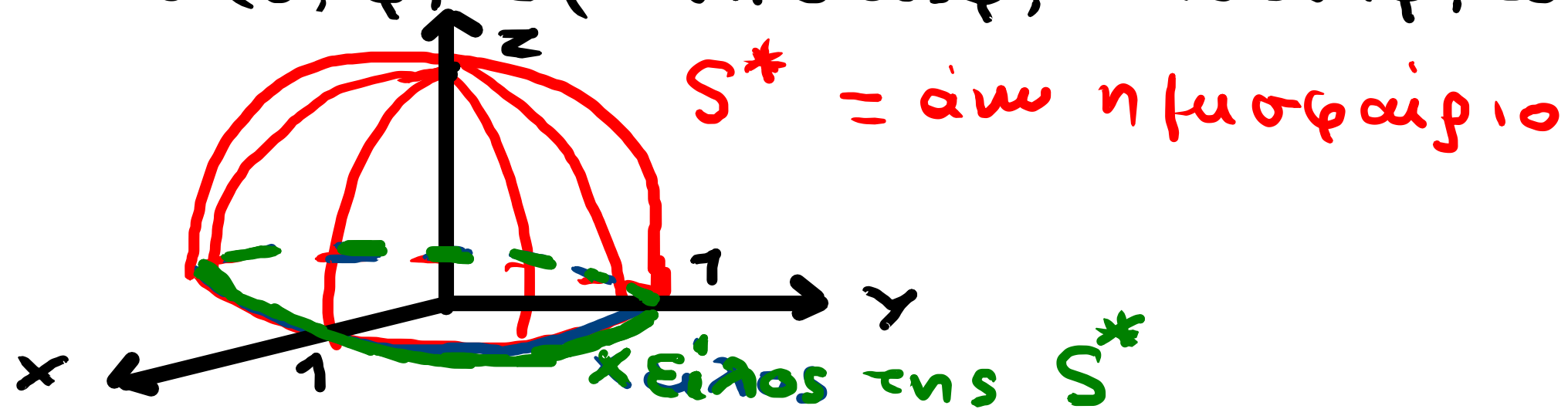
Διασθητικά, μια επιφάνεια είναι ανοικτή αν  
μπορούμε να μεταβούμε από την "εξωτερική" της όψη  
στην "εσωτερική" χωρίς να "φτυπήσουμε" την επιφάνεια  
κ' αυτό μπορεί να γίνει μόνο μέσω του χείλους της  $S^*$ .



Παράδειγματα ανοικτών απλών κανονικών επιφανειών.

(i)  $S : [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$

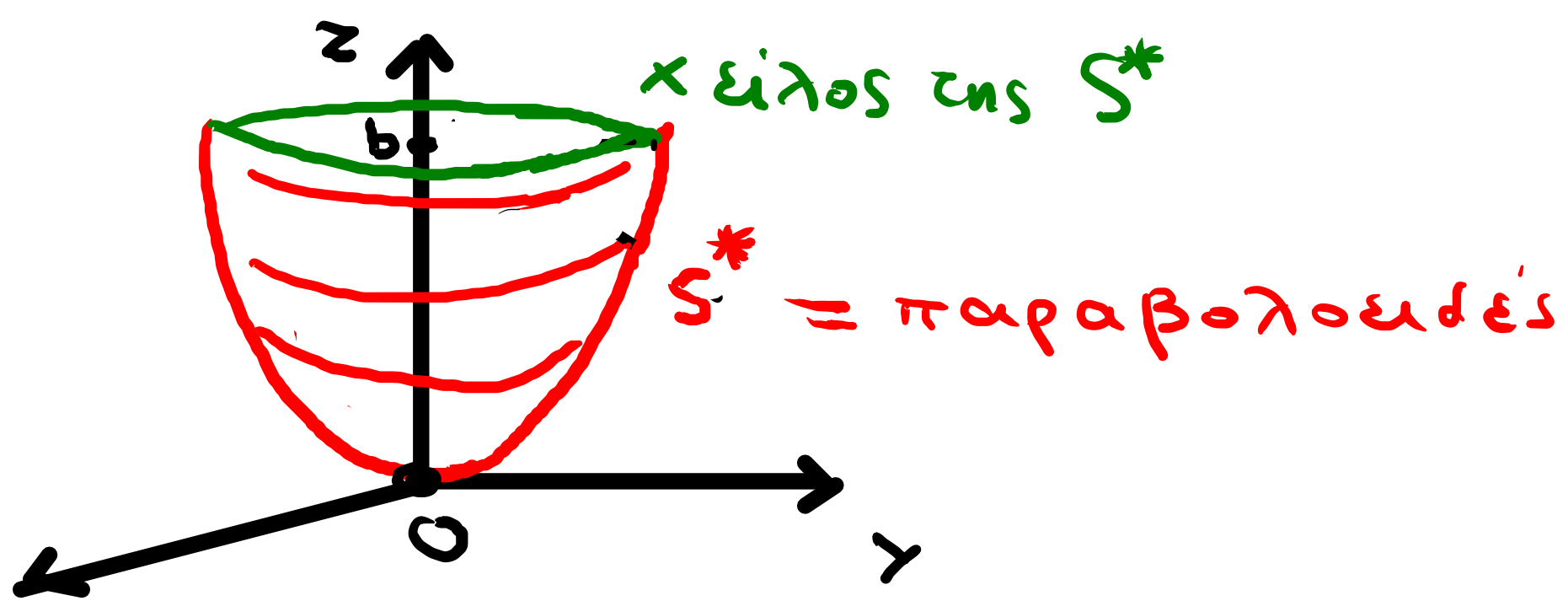
$$S(\theta, \varphi) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta).$$



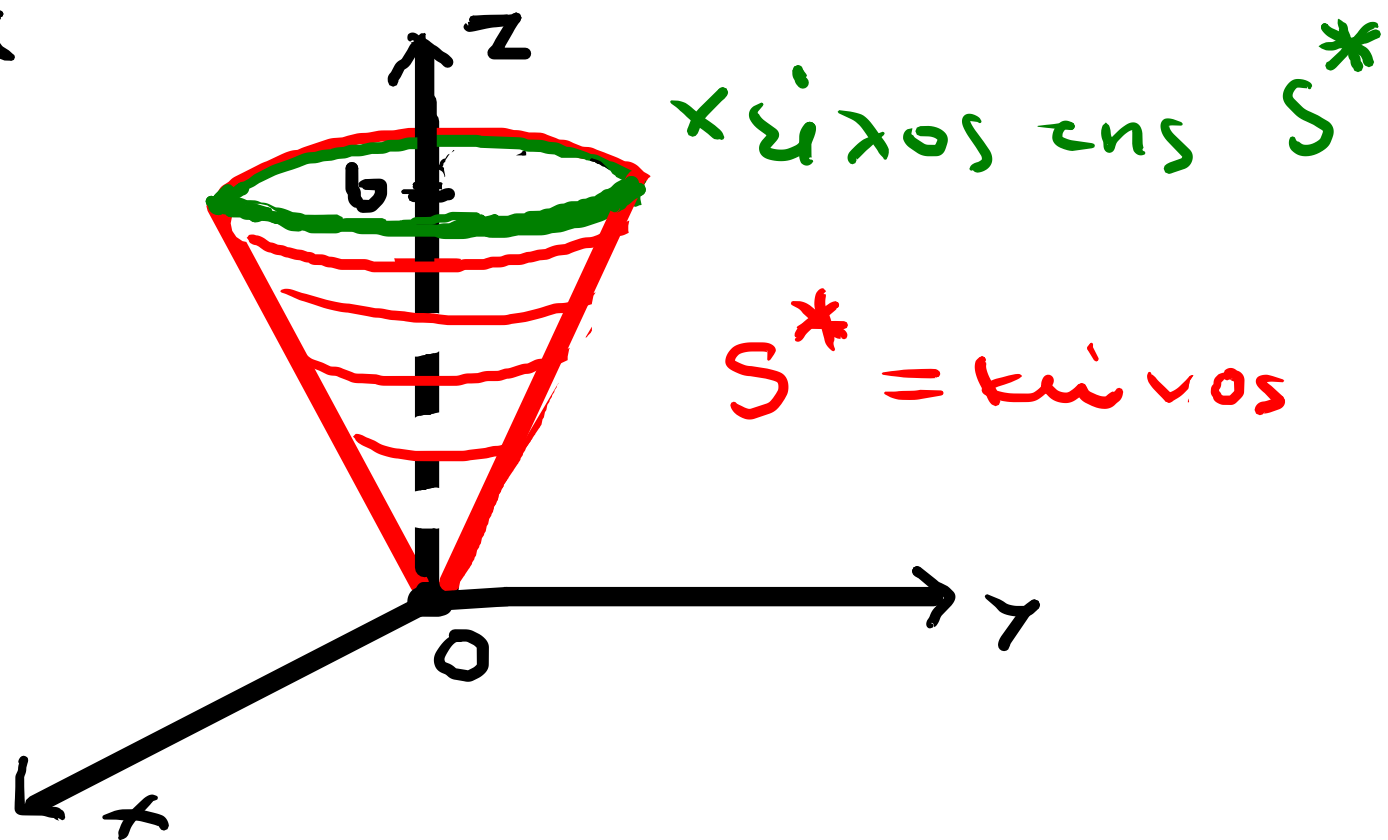
(ii)  $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq b\}, \quad S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3,$

$(b > 0)$

$$S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2).$$



(iii)

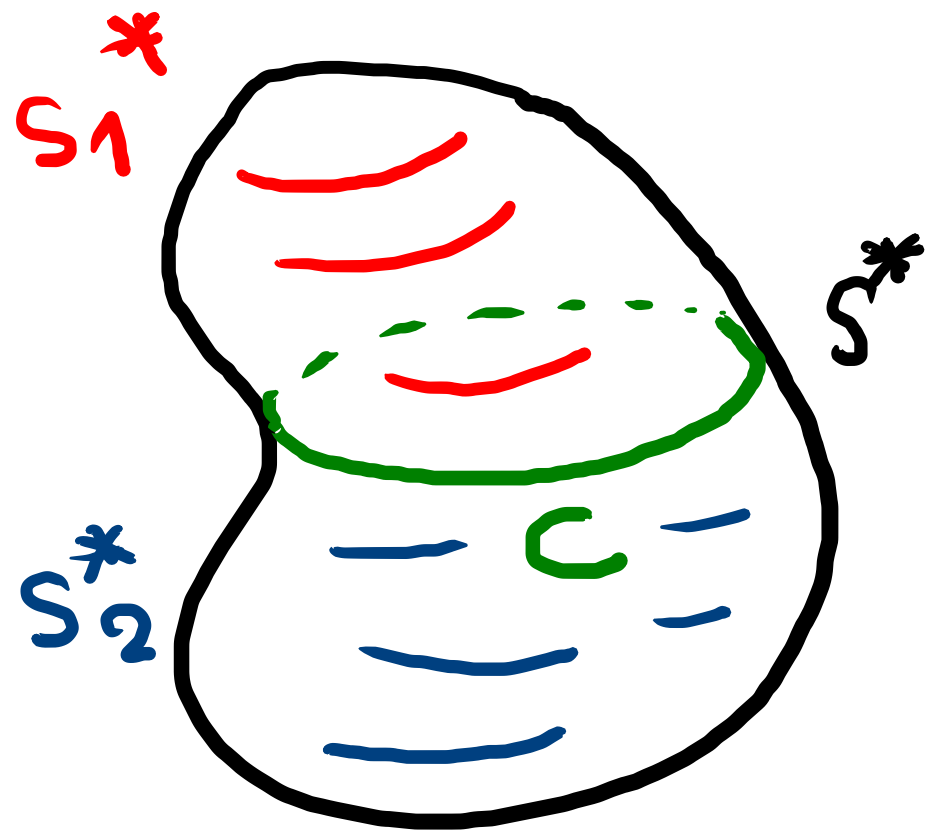


$$\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq b^2\} \quad (b > 0)$$

$$S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$S(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}).$$

κάθε κλειστή απλή κανονική επιφάνεια προκύπτει με "συγκόλληση" δύο ανοικτών επιφανειών με κοινό χείλος.



π.χ. μια σφαίρα προκύπτει από τη "συγκόλληση" δύο ημισφαιρίων.



## Θεώρημα Προσανατολισμού:

Έστω  $S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  απλή κανονική επιφάνεια (ανοικτή ή κλειστή) ώστε  $S$  κλάσης  $C^1$  στο  $\Delta \setminus E$ , όπου  $E \subset \Delta$  μέτρου 0.

Ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

(i)  $\forall (u, v) \in \Delta \setminus E$ , το διάνυσμα  $S_u \times S_v$  σχεδιασμένο με αρχή το  $S(u, v)$  "δείχνει" προς το  $\text{ext}(S^*)$ .

(ii)  $\forall (u, v) \in \Delta \setminus E$ , το διάνυσμα  $S_u \times S_v$  σχεδιασμένο με αρχή το  $S(u, v)$  "δείχνει" προς το  $\text{int}(S^*)$ .

Στην περίπτωση (i), θεωρούμε  $\vec{n}(u, v) = S_u \times S_v$ ,  $(u, v) \in \Delta \setminus E$ .  
" " " (ii), " "  $\vec{n}(u, v) = -(S_u \times S_v)$ ,  $(u, v) \in \Delta \setminus E$ .

Παράδειγμα:  $\Delta = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ ,  $S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$S(\varphi, z) = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, z), \quad (\varphi, z) \in \Delta.$$

$S$  ανοικτή επιφάνεια

$$\forall (\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1],$$

$$(S_\varphi \times S_z)(\varphi, z) = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, -z).$$

$$(S_\varphi \times S_z)(0, 1) = (1, 0, -1),$$

$$S(0, 1) = (1, 0, 1).$$

Το διάνυσμα  $(1, 0, -1)$  με αρχή στο  $(1, 0, 1)$   
"δείχνει" στο εξωτερικό του κώνου

(Θ. προσαν.)  
 $\implies$

$$\underline{\underline{\vec{n}(\varphi, z) = S_\varphi \times S_z = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, -z), \quad (\varphi, z) \in \Delta.}}$$

