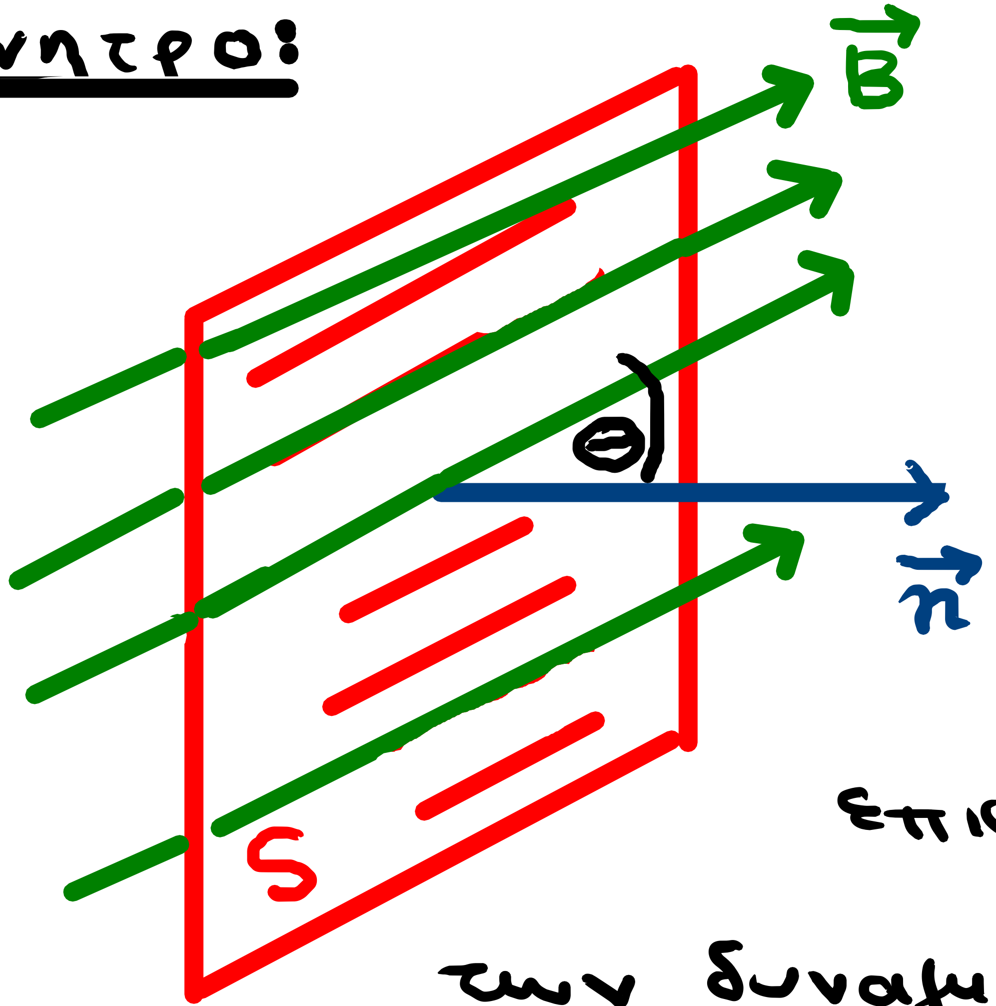
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Κίνητρο:



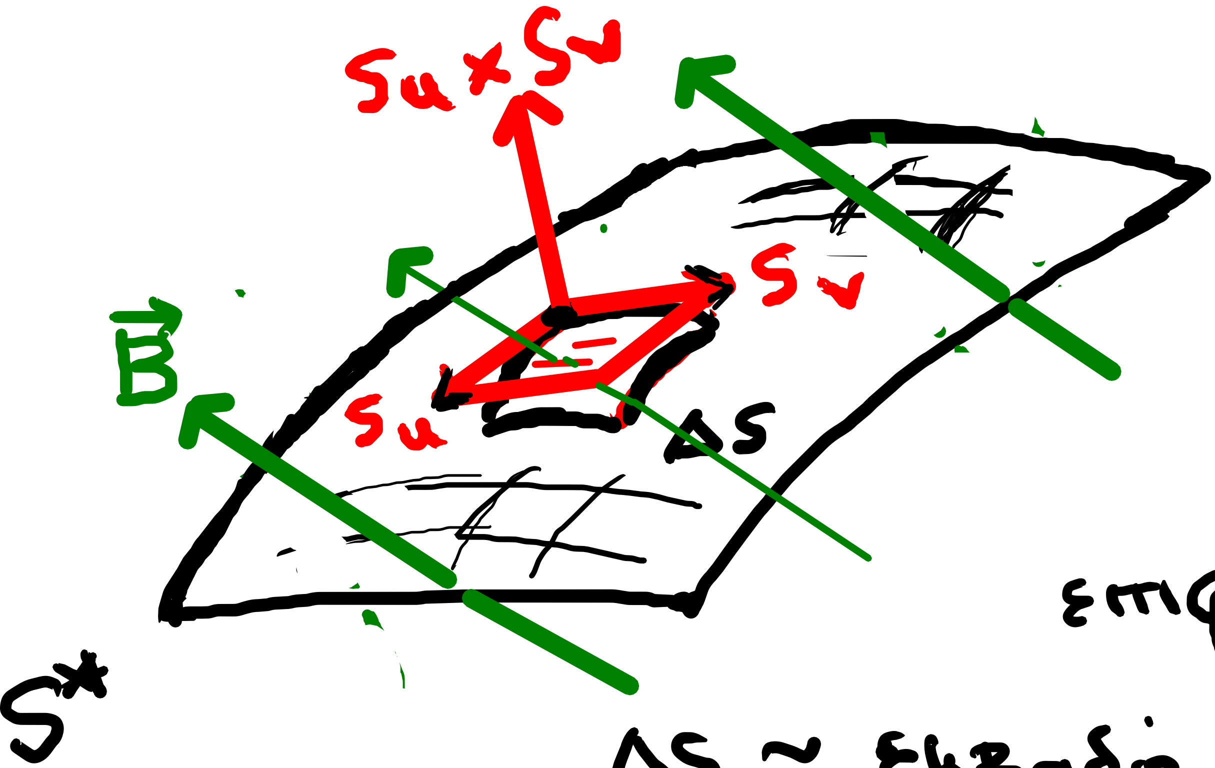
Έστω ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$. Μέσα σε αυτό τοποθετείται επιφάνεια ορθογ. παραλλ. εμβαδού S ώστε οι δυναμικές γραμμές να σχηματίζουν οξεία γωνία θ με την κάθετη στην επιφάνεια. Μαγνητική ροή Φ είναι το πλήθος των δυναμικών γραμμών που περνάνε μέσα από την επιφάνεια.

Ισχύει

$$\boxed{\Phi = \|\vec{B}\| S \cdot \cos\theta}.$$

Εάν $\vec{n}$ διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με $\|\vec{n}\| = S$ (όπως στο σχήμα) που "δείχνει" εξωτερικά της S^*. Τότε $(\widehat{\vec{n}, \vec{B}}) = \theta$, οπότε

$$\boxed{\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n}}.$$



απλή κανονική

Έστω $S: \Delta \to \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας εμβαδού ΔS. Υποθέτουμε ότι

$\Delta S \cong$ εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα S_u, S_v $= \|S_u \times S_v\|$ κι' ότι $\vec{B}$ = σταθερή στα σημεία της ΔS.

Υποθέτουμε ότι το $S_u \times S_v$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(u,v)$, "δείχνει" εξωτερικά της S^*.

Επειδή το διάνυσμα $S_u \times S_v$ είναι κάθετο στην S^* στο $S(u,v)$, η στοιχειώδης μαγνητική ροή που αντιστοιχεί στην επιφάνεια εμβαδού ΔS είναι

$$\Delta \Phi \cong \vec{B} \cdot (S_u \times S_v).$$

<u>**Ορισμός 1:**</u> Έστω $S : \Delta \to \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια (Δ ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος στο $\mathbb{R}^2$) κ' $\vec{F}$ συνεχές διανυσματικό πεδίο σε ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ με $S^* \subset \Omega$. Το <u>επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\vec{F}$ πάνω στην επιφάνεια S</u> είναι το

$$\boxed{\int_S \vec{F} = \iint_\Delta \vec{F}(S(u,v)) \cdot (S_u \times S_v)\, du\, dv.}$$

Εάν S απλή κανονική λεία επιφάνεια και το διάνυσμα $S_u \times S_v$ — αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(u,v)$ — "δείχνει" προς την εξωτερική πλευρά της S^* σε κάθε σημείο $(u,v) \in \Delta \setminus E$ ($E \subset \Delta$ μέτρου 0), τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S \vec{F} = \iint_\Delta \vec{F}(S(u,v)) \cdot (S_u \times S_v)\, du\, dv$$

εκφράζει τη ροή του διαν. πεδίου $\vec{F}$ διαμέσου της επιφάνειας S.

Δηλαδή, η ροή του $\vec{F}$ μέσω της S^* ισούται με

$$\boxed{\iint_{\Delta} \vec{F}(S(u,v))\cdot \vec{n}(u,v)\,du\,dv,}$$ όπου

- $\vec{n}(u,v) = S_u \times S_v$, αν το $S_u \times S_v$ "δείχνει" στο εξωτερικό της S^*, $\forall (u,v) \in \Delta \setminus E$

- $\vec{n}(u,v) = -(S_u \times S_v)$, αν το $S_u \times S_v$ "δείχνει" στο εσωτερικό της S^*, $\forall (u,v) \in \Delta \setminus E$.

Ορισμός 2: Έστω $S : \Delta \to \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια.

Αναπαραμέτρηση της S είναι μια απεικόνιση $\bar{S} : D \to \mathbb{R}^3$ της μορφής $\bar{S} = S \circ T$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος κ' $T : D \to \Delta$ 1-1, επί, κλάσης C^1 με $J_T(\alpha, \beta) > 0$, $\forall (\alpha, \beta) \in D$.

Πρόταση 3: Έστω $\Delta, D, S, T, \bar{S}$ όπως παραπάνω.

Τότε, $\bar{S}$ λεία κ'

$$\bar{S}_\alpha \times \bar{S}_\beta = J_T(\alpha, \beta)\left(S_u \times S_v\right).$$

(άρα $\bar{S}_a \times \bar{S}_\beta$, $S_u \times S_v$ ομόρροπα).

Απόδειξη: Έστω $T(\alpha,\beta) = (u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta))$, $(\alpha,\beta) \in D$.

Τότε,

$$\bar{S}(\alpha,\beta) = \left(x(T(\alpha,\beta)),\ y(T(\alpha,\beta)),\ z(T(\alpha,\beta))\right)$$

όπου $S(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)),\ (u,v) \in \Delta$

$\Rightarrow$

$$\bar{S}_\alpha = (x_u u_\alpha + x_v v_\alpha,\quad y_u u_\alpha + y_v v_\alpha,\quad z_u u_\alpha + z_v v_\alpha),$$

$$\bar{S}_\beta = (x_u u_\beta + x_v v_\beta,\quad y_u u_\beta + y_v v_\beta,\quad z_u u_\beta + z_v v_\beta)$$

$$\Rightarrow \bar{S}_\alpha \times \bar{S}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u u_\alpha + x_v v_\alpha & y_u u_\alpha + y_v v_\alpha & z_u u_\alpha + z_v v_\alpha \\ x_u u_\beta + x_v v_\beta & y_u u_\beta + y_v v_\beta & z_v u_\beta + z_v v_\beta \end{vmatrix}.$$

→ **Ελάσσων ορίζουσα τάξης 1x1:**

$$\begin{vmatrix} y_u u_\alpha + y_v v_\alpha & z_u u_\alpha + z_v v_\alpha \\ y_u u_\beta + y_v v_\beta & z_u u_\beta + z_v v_\beta \end{vmatrix} =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} u_\alpha & v_\alpha \\ u_\beta & v_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{bmatrix} \right) = J_T \cdot \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}$$

→ **Ελάσσων ορίζουσα τάξης 1x2:**

$$\begin{vmatrix} x_u u_\alpha + x_v v_\alpha & z_u u_\alpha + z_v v_\alpha \\ x_u u_\beta + x_v v_\beta & z_u u_\beta + z_v v_\beta \end{vmatrix} =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} u_\alpha & v_\alpha \\ u_\beta & v_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{bmatrix} \right) = J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} .$$

→ <u>Ελάσσων ορίζουσα τάξης 1×3:</u>

$$\begin{vmatrix} x_u u_\alpha + x_v v_\alpha & y_u u_\alpha + y_v v_\alpha \\ x_u u_\beta + x_v v_\beta & y_u u_\beta + y_v v_\beta \end{vmatrix} = \ldots = J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} .$$

Άρα,

$$\bar{S}_\alpha \times \bar{S}_\beta = \left(J_T \cdot \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, -J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, J_T \cdot \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

$$= J_T \cdot \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

$$= J_T \cdot (S_u \times S_v). \qquad \boxtimes$$

<u>Πρόταση 4</u>: Το επιφανειακό ολοκλ. ενός συνεχούς διαν. πεδίου πάνω σε λεία επιφάνεια, δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της επιφάνειας.

__Απόδειξη:__ Έστω $S : \Delta \to \mathbb{R}^3$ λεία επιφάνεια,

$T : D \to \Delta$ 1-1, επί, κλάσης C^1 με $J_T(\alpha,\beta) > 0$, $\forall (\alpha,\beta) \in D$,

όπου $D, \Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ ορθογώνια ή κλειστοί δίσκοι.

Έστω επιπλέον $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ συνεχής, όπου Ω ανοικτό $\supset S^*$.

Θεωρούμε την επιφάνεια $\bar{S} = S \circ T : D \to \mathbb{R}^3$. Έχουμε

$$\iint_D \vec{F}(\bar{S}(\alpha,\beta)) \cdot (\bar{S}_\alpha \times \bar{S}_\beta)\, d\alpha\, d\beta \stackrel{[\text{Πρότ. } 3]}{=}$$

$$= \iint_D \vec{F}(S(T(\alpha,\beta))) \cdot (S_u \times S_v)\, J_T\, d\alpha\, d\beta \stackrel{(J_T > 0)!}{=} \iint_\Delta \vec{F}(S(u,v)) \cdot (S_u \times S_v)\, du\, dv.$$

$\boxtimes$

Παραδείγματα:

(i) Να βρείτε τη ροή του διαν. πεδίου $\vec{F}=(x,y,0)$ διαμέσου της επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(R>0)$.

Λύση: Μια παραμέτρηση της σφαίρας είναι

$$S: \Delta=[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,$$

$$S(\theta,\varphi)=R(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta).$$

Έχουμε δείξει ότι $\forall\ (\theta,\varphi)\in(0,\pi)\times[0,2\pi]$,

$$S_\theta\times S_\varphi=R\sin\theta\, S(\theta,\varphi)=\text{ομόρροπο του } S(\theta,\varphi)$$

$\Rightarrow$ το $S_\theta\times S_\varphi$ αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(\theta,\varphi)$

"δείχνει" στο εξωτερικό της S^* $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \vec{n}(\theta,\varphi) = R\sin\theta\, S(\theta,\varphi), \quad \forall\, (\theta,\varphi)\in(0,\pi)\times[0,2\pi].$$

Έχουμε

$$\vec{F}(S(\theta,\varphi))\cdot\vec{n}(\theta,\varphi) =$$

$$= R^3\,(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, 0)\cdot(\sin^2\theta\cos\varphi,\ \sin^2\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\theta)$$

$$= R^3\cdot(\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi) = R^3\sin^3\theta, \quad \forall\,(\theta,\varphi)\in(0,\pi)\times[0,2\pi]$$

Η ζητούμενη ροή ισούται με

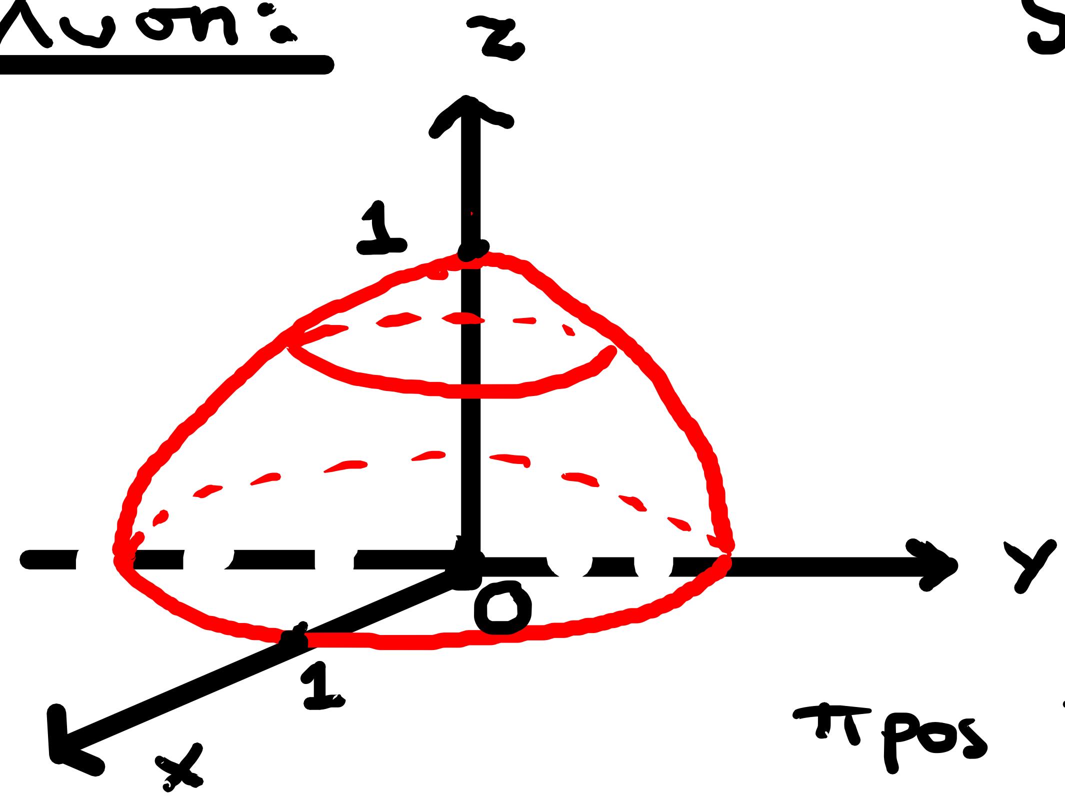
$$R^3\iint_\Delta \sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi R^3\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = 2\pi R^3\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$\underset{[w=\cos\theta]}{=} 2\pi R^3\int_{-1}^{1}(1-w^2)\,dw = 4\pi R^3\int_0^1(1-w^2)\,dw = 4\pi R^3\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 8\pi R^3/3.$$

(ii) Έστω S η επιφάνεια με ίχνος το μέρος του παραβολοειδούς $z = 1-(x^2+y^2)$ που βρίσκεται πάνω από το μοναδιαίο δίσκο $x^2+y^2 \leq 1$. Να βρείτε τη ροή του διαν. πεδίου $\vec{F} = (x, y, z)$ διαμέσου της S.

Λύση:



$S : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $S(u,v) = (u, v, \underbrace{1-u^2-v^2}_{f(u,v)})$,

$\Delta = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$,

$S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = (2u, 2v, 1)$.

$(S_u \times S_v)(0,0) = (0,0,1)$ "δείχνει" προς τα έξω αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(0,0) = (0,0,1)$

$\Rightarrow \quad \vec{n}(u,v) = (2u, \ 2v, 1), \ \forall (u,v) \in \Delta.$

Έχουμε $\quad \vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) =$

$= (u, v, 1-u^2-v^2) \cdot (2u, \ 2v, 1)$

$= \quad 2u^2 + 2v^2 + 1 - u^2 - v^2 \quad = 1 + u^2 + v^2, \ \forall (u,v) \in \Delta$

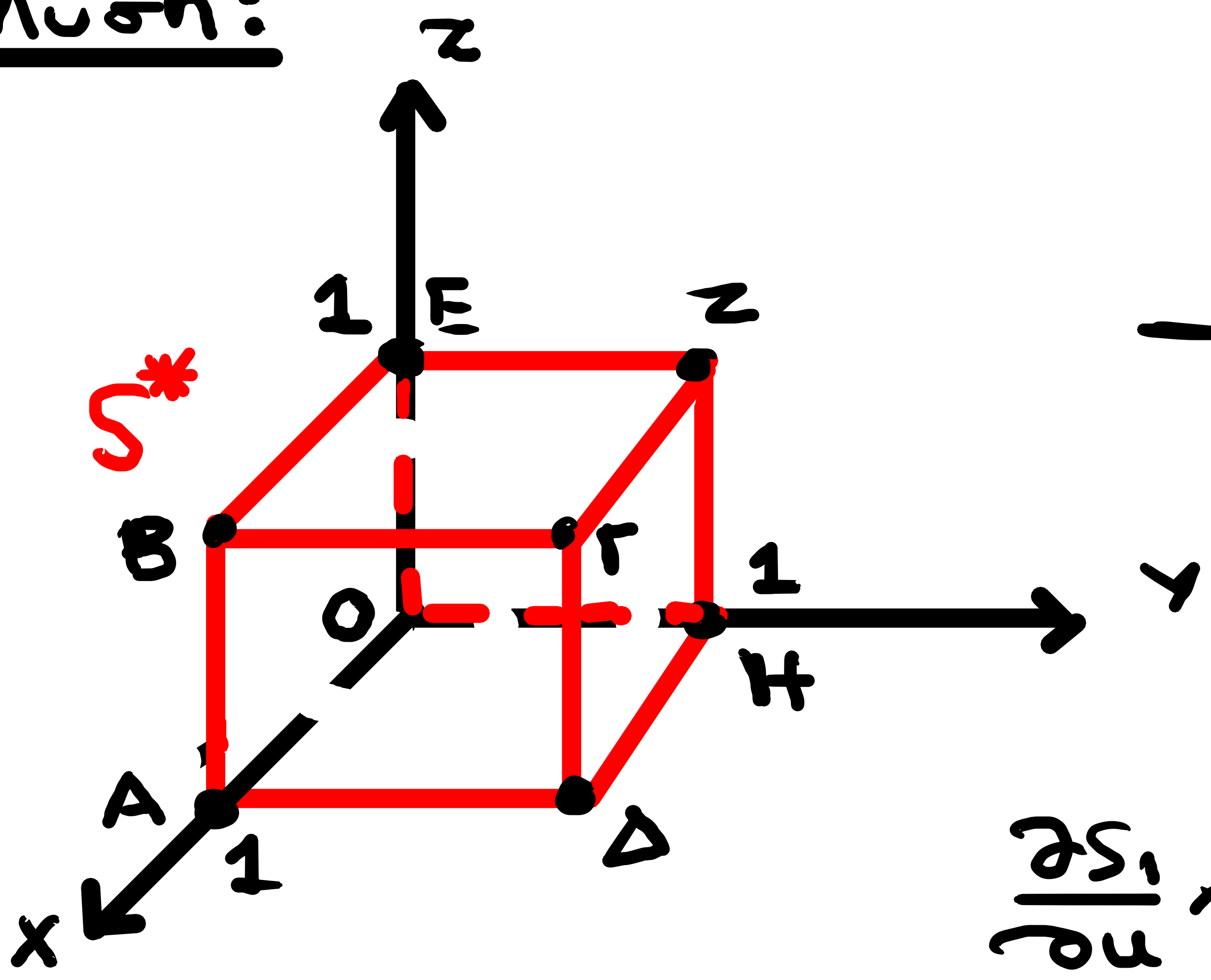
$\Rightarrow$ η ζητούμενη ροή ισούται με

$$\iint_{\Delta} (1+u^2+v^2)\,du\,dv \overset{\substack{u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2)\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= 2\pi\left(\int_0^1 r\,dr + \int_0^1 r^3\,dr\right) = 2\pi\left(1/2 + 1/4\right) = 3\pi/2.$$

(iii) Να υπολογιστεί η ροή του $\vec{F}=(xy,\ 4yz^2,\ yz)$ διαμέσου της επιφάνειας του κύβου $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

Λύση:



Θα υπολογίσουμε τη ροή πάνω σε κάθε μια από τις 6 έδρες του κύβου.

→ **Έδρα $S_1^*=ΑΒΓΔ$:**

$$x=1,\quad 0\le y\le 1,\quad 0\le z\le 1$$

$$S_1(u,v)=(1,\ u,v),\ (u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u}\times\frac{\partial S_1}{\partial v}=(0,1,0)\times(0,0,1)=(1,0,0) \implies$$

"δείχνει" έξω

$\Rightarrow$ ροή πάνω στην $S_1 = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \vec{F}(1,u,v)\cdot(1,0,0)\,du\,dv$

$$= \int_0^1\int_0^1 u\,du\,dv = \underline{\underline{1/2}}$$

$\longrightarrow$ **Έδρα $S_2^* = EOHZ$** : $x=0$, $y,z \in [0,1]$

$S_2(u,v) = (0,u,v)$, $(u,v) \in [0,1]\times[0,1]$,

$\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (0,1,0)\times(0,0,1) = (1,0,0)$ "δείχνει" στο

<u>εσωτερικό</u> αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_2(0,0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow$ $\vec{n_2}(u,v) = -(1,0,0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ροή πάνω στην $S_2 = -\int_0^1\int_0^1 \vec{F}(0,u,v)\cdot(1,0,0)\,du\,dv =$

$= -\int_0^1\int_0^1 (0,\ 4uv^2,\ uv)\cdot(1,0,0)\,du\,dv = \underline{\underline{0}}$

$\rightarrow$ <u>Έδρα S_3^{*} = ΖΓΔΗ:</u> $y=1,\quad x,z\in[0,1]$,

$S_3(u,v) = (u,1,v),\quad u,v\in[0,1]$

$\dfrac{\partial S_3}{\partial u}\times\dfrac{\partial S_3}{\partial v} = (1,0,0)\times(0,0,1) = (0,-1,0)$

"δείχνει" στο εσωτερικό αν σχεδιαστεί με αρχή το

$S_3(0,0) = (0,1,0) \Rightarrow \vec{n}_3(u,v) = (0,1,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η ροή μέσω της S_3 είναι

$$\int_0^1\int_0^1 \vec{F}(u,1,v)\cdot(0,1,0)\,du\,dv = \int_0^1\int_0^1 (u,4v^2,v)\cdot(0,1,0)\,du\,dv$$

$$= \int_0^1\int_0^1 4v^2\,dv = \underline{\underline{4/3}}$$

$\rightarrow$ **Έδρα $S_4 = EOAB$:** $y=0$, $x,z\in[0,1]$

$S_4(u,v) = (u,0,v)$, $u,v\in[0,1]$, $\dfrac{\partial S_4}{\partial u}\times\dfrac{\partial S_4}{\partial v} = (0,-1,0)$

"δείχνει" στο εξωτερικό αν σχεδιαστεί με αρχή $S(0,0)=(0,0,0)$

$\Rightarrow$ $\vec{n}_4(u,v) = (0,-1,0)$ κ' $\vec{F}(u,0,v) = 0$

$\Rightarrow$ ροή στην $S_4 = 0$.

→ **Έδρα $S_5^* = EB\Gamma Z$** : $z=1$, $x,y \in [0,1]$

$S_5(u,v) = (u,v,1)$, $\frac{\partial S_5}{\partial u} \times \frac{\partial S_5}{\partial v} = (1,0,0)\times(0,1,0) =$

$=(0,0,-1)$ "δείχνει" στο εσωτερικό αν σχεδιαστεί

με αρχή το $S_5(0,0) = (0,0,1)$ $\Rightarrow$ $\vec{n_5}(u,v) = (0,0,1)$

$\Rightarrow$ ροή διαμέσου της $S_5 = \int_0^1\int_0^1 \vec{F}(u,v,1)\cdot(0,0,1)\,du\,dv =$

$= \int_0^1\int_0^1 v\,du\,dv = \underline{\underline{1/2}}$

→ **Έδρα ΟΑΔΗ $= S_6^*$** : $z=0$, $x, y \in [0,1]$,

$S_6(u,v) = (u, v, 0)$, $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$,

$\dfrac{\partial S_6}{\partial u} \times \dfrac{\partial S_6}{\partial v} = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,-1)$ "δείχνει"

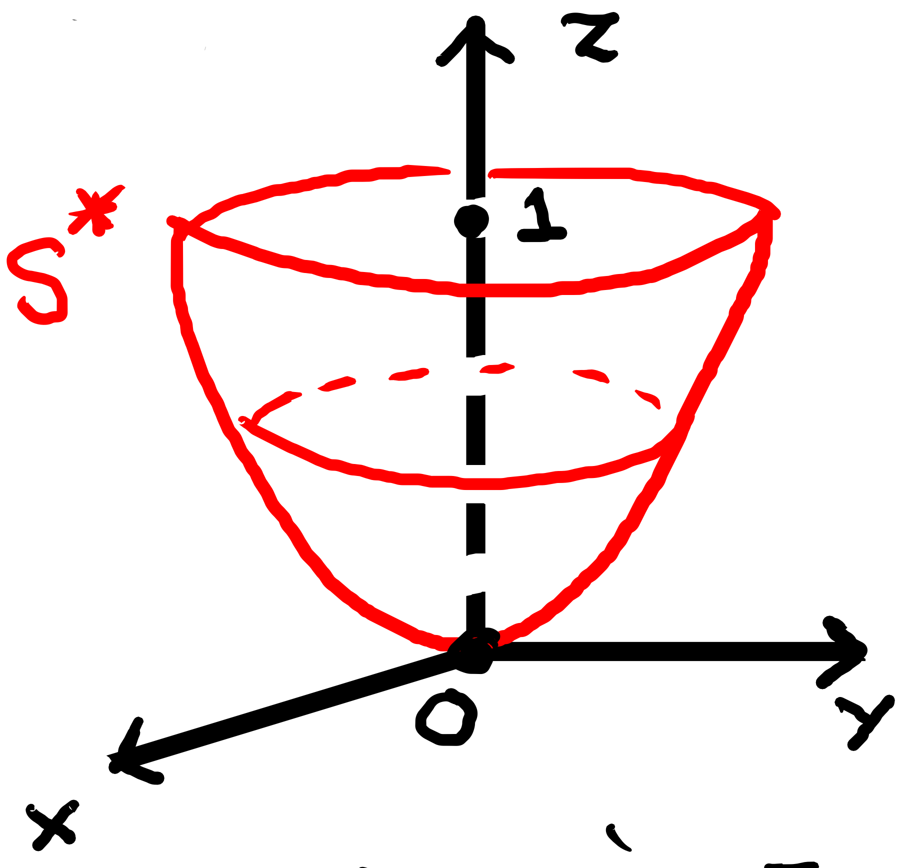
στο εξωτερικό αν σχεδιάσετε με αρχή το $S_6(0,0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow$ ροή διαμέσου της $S_6 = \int_0^1 \int_0^1 \vec{F}(u,v,0) \cdot (0,0,-1) = \underline{\underline{0}}$.

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΡΟΗ: $\Phi = \ldots = \underline{\underline{7/3}}$.

<u>(iv)</u> Να υπολογιστεί η ροή του $\vec{F}=(y,-x,z^2)$ διαμέσου της S^*: $z=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$.

$S(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$, $(u,v)\in\Delta=\{(u,v): u^2+v^2\le 1\}$.



$S_u\times S_v=(-2u,-2v,1)$,

$(S_u\times S_v)(0,0)=(0,0,1)$ "δείχνει" στο εσωτερικό αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(0,0)=(0,0,0) \Rightarrow \vec{n}(u,v)=(2u,2v,-1)$

$$\Rightarrow \text{ροή} = \iint_\Delta \vec{F}(u,v,u^2+v^2)\cdot(2u,2v,1)\,du\,dv$$

$$=\iint_\Delta \left(v,-u,(u^2+v^2)^2\right)\cdot(2u,2v,-1)\,du\,dv=$$

$$= -\iint_{\Delta} (u^2+v^2)^2 \, du\, dv \overset{u = r\cos\varphi}{\underset{v = r\sin\varphi}{=}} -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5 \, dr = -2\pi/6$$

$$= -\pi/3 .$$

<u>Ορισμός 5:</u> Μια απλή, κανονική επιφάνεια S λέγεται **<u>τμηματικά λεία</u>** ανν $\exists$ λείες απλές κανονικές επιφάνειες $S_1, S_2, \ldots, S_k$ ώστε:

- $S^* = S_1^* \cup S_2^* \cup \ldots \cup S_k^*$.
- η $S_i^* \cap S_j^*$ έχει εμβαδό $=0$, $\forall\, i \neq j$

Αν S, S_i, $1 \le i \le k$ όπως παραπάνω κ' $\vec{F} : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ συνεχές διαν. πεδίο με $S^* \subset \underline{\Omega}$, τότε

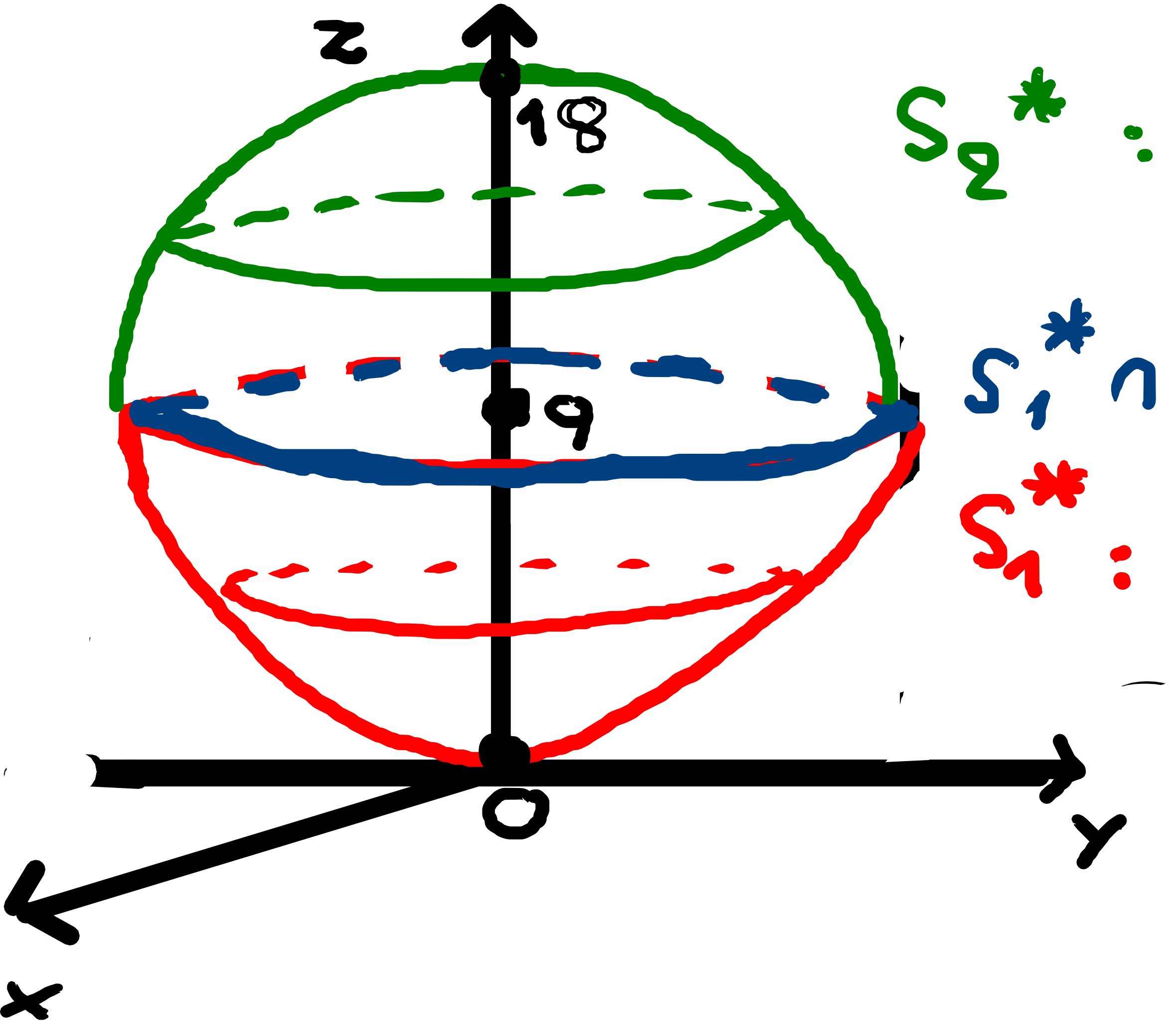
$$\int_S \vec{F} = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \vec{F}.$$

<u>Παράδειγμα:</u> Αν $\vec{F} = (0, 0, z^2)$ κ' S^* το σύνορο του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2, \qquad z = 18 - x^2 - y^2,$$

να υπολογίσετε τη ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της S.

<u>Λύση:</u>



$S_2^*: \; z = 18 - x^2 - y^2$

$S^* = S_1^* \cup S_2^*$

$S_1^* \cap S_2^* : \; (x^2 + y^2 = 9 \;, \;\; z = 9)$

$S_1^*: \; z = x^2 + y^2$

$$\Delta = \{(u,v) : \; u^2 + v^2 \leq 9\}$$

$$S_1 : \Delta \to \mathbb{R}^3, \quad S_1(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$S_2 : \Delta \to \mathbb{R}^3, \quad S_2(u,v) = (u, v, 18 - u^2 - v^2)$$

Η ροή διαμέσου της S ισούται με το άθροισμα των ροών διαμέσου των S_1, S_2.

- **Φ_1 = Ροή διαμέσου της S_1:** $\quad S_1(u,v) = (u, v, \underbrace{u^2+v^2}_{f(u,v)}), \quad (u,v) \in \Delta.$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} \times \frac{\partial S_1}{\partial v} = (-f_u, -f_v, 1) = (-2u, -2v, 1)$$

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial u} \times \frac{\partial S_1}{\partial v}\right)(0,0) = (0,0,1), \quad S_1(0,0) = (0,0,0)$$

→ "δείχνει" στο εσωτερικό αν σχεδιαστεί με αρχή $(0,0,0)$

$$\Rightarrow \vec{n}_1(u,v) = (2u, 2v, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(S_1(u,v)) \cdot \vec{n}_1(u,v) = -(u^2+v^2)^2$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = -\iint_{\{u^2+v^2 \leq 9\}} (u^2+v^2)^2 \, du\, dv \ \underset{v = r\sin\varphi}{\overset{u = r\cos\varphi}{=\!=}} -\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^5 \, du\, dv$$

$$= -2\pi \left.\frac{r^6}{6}\right|_0^3 = -\frac{\pi}{3}\cdot 3^6 = \underline{-\pi\cdot 3^5}.$$

- $\underline{\Phi_2 = \text{ροή διαμέσου της } S_2}$: $S_2(u,v) = (u, v, \underbrace{18-u^2-v^2}_{g(u,v)}),\ (u,v)\in\Delta.$

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (-g_u, -g_v, 1) = (2u, 2v, 1)$$

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v}\right)(0,0) = (0,0,1), \quad S_2(0,0) = (0,0,18)$$

↳ "δείχνει" στο εξωτερικό αν σχεδιαστεί με αρχή $(0,0,18)$

$$\Rightarrow \vec{n_2}(u,v) = (2u, 2v, 1) \Rightarrow \vec{F}(S_2(u,v))\cdot \vec{n_2}(u,v) =$$

$$= (18-u^2-v^2)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_2 = \iint_{\{u^2+v^2\le 9\}} \vec{F}(S_2(u,v))\cdot\vec{n_2}(u,v)\,du\,dv = \iint_{\{u^2+v^2\le 9\}} (18-u^2-v^2)^2\,du\,dv$$

$$\underset{v=r\sin\varphi}{\overset{u=r\cos\varphi}{=\!=}} \int_0^{2\pi}\int_0^3 (18-r^2)^2 r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^3 (18-r^2)^2 r\,dr$$

$$\underset{=}{[w=18-r^2]} -\pi\int_{18}^{9} w^2\,dw = \pi\int_9^{18} w^2\,dw = \frac{\pi}{3}(18^3-9^3)$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot 9^3\cdot(2^3-1) = \frac{\pi}{3}\cdot 3^6\cdot 7 = \underline{\pi\cdot 7\cdot 3^5}$$

<u>Συνολική ροή:</u> $-\pi\cdot 3^5 + \pi\cdot 7\cdot 3^5 = \underline{\underline{6\pi\cdot 3^5}}.$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ (Gauss):

Έστω S τμ. λεία απλή, κανονική, κλειστή επιφάνεια που είναι το σύνορο ενός φραγμένου στερεού K κ' $\vec{F}: \underline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1, όπου $\underline{\Omega}$ ανοικτό $\supset S^* \cup K$. Η ροή της $\vec{F}$ διαμέσου της S ισούται με

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz.$$

(Υπενθύμιση: αν $\vec{F} = (P, Q, R)$, τότε $\operatorname{div}\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$.)

Παραδείγματα:

(i) Να υπολογίσετε τη ροή του διαν. πεδίου $\vec{F}=(xy, 4yz^2, yz)$ διαμέσου της επιφάνειας του κύβου $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

Λύση: $P=xy$, $Q=4yz^2$, $R=yz$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = P_x + Q_y + R_z = y + 4z^2 + y = 2y + 4z^2.$$

Λόγω του Θ. Gauss, η ζητούμενη ροή ισούται με

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2y+4z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 2y\,dy + \int_0^1 4z^2\,dz$$

$$= y^2\Big|_0^1 + \frac{4z^3}{3}\Big|_0^1 = 7/3.$$ (Ο απ' ευθείας υπολογισμός

της ροής μέσω του επιφανειακού ολοκλ. είναι πολύ πιο επίπονη, βλ. Παράδ. (iii) παραπάνω.)

(ii) Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διαν. πεδίο $\vec{F} = (x, y, z)$ κ' την επιφάνεια $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(R>0)$.

Λύση: $S : [0,\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$S(\theta, \varphi) = R(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \ (\theta,\varphi) \in [0,\pi]\times[0,2\pi]$$

$$S_\theta \times S_\varphi = R \sin\theta \, S(\theta,\varphi), \ (\theta,\varphi) \in (0,\pi)\times[0,2\pi]$$

$$= \text{ομόρροπο του } S(\theta,\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n}(\theta,\varphi) = R\sin\theta\, S(\theta,\varphi)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(S(\theta,\varphi))\cdot\vec{n}(\theta,\varphi) = R\sin\theta\, S(\theta,\varphi)\cdot S(\theta,\varphi)$$

$$= R^3\sin\theta$$

$\Rightarrow$ ροή διαμέσου της $S = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^3\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$

$$= 2\pi R^3\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = -2\pi R^3\cos\theta\Big|_0^{\pi} = \underline{4\pi R^3}.$$

· Έστω $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$. Τότε,

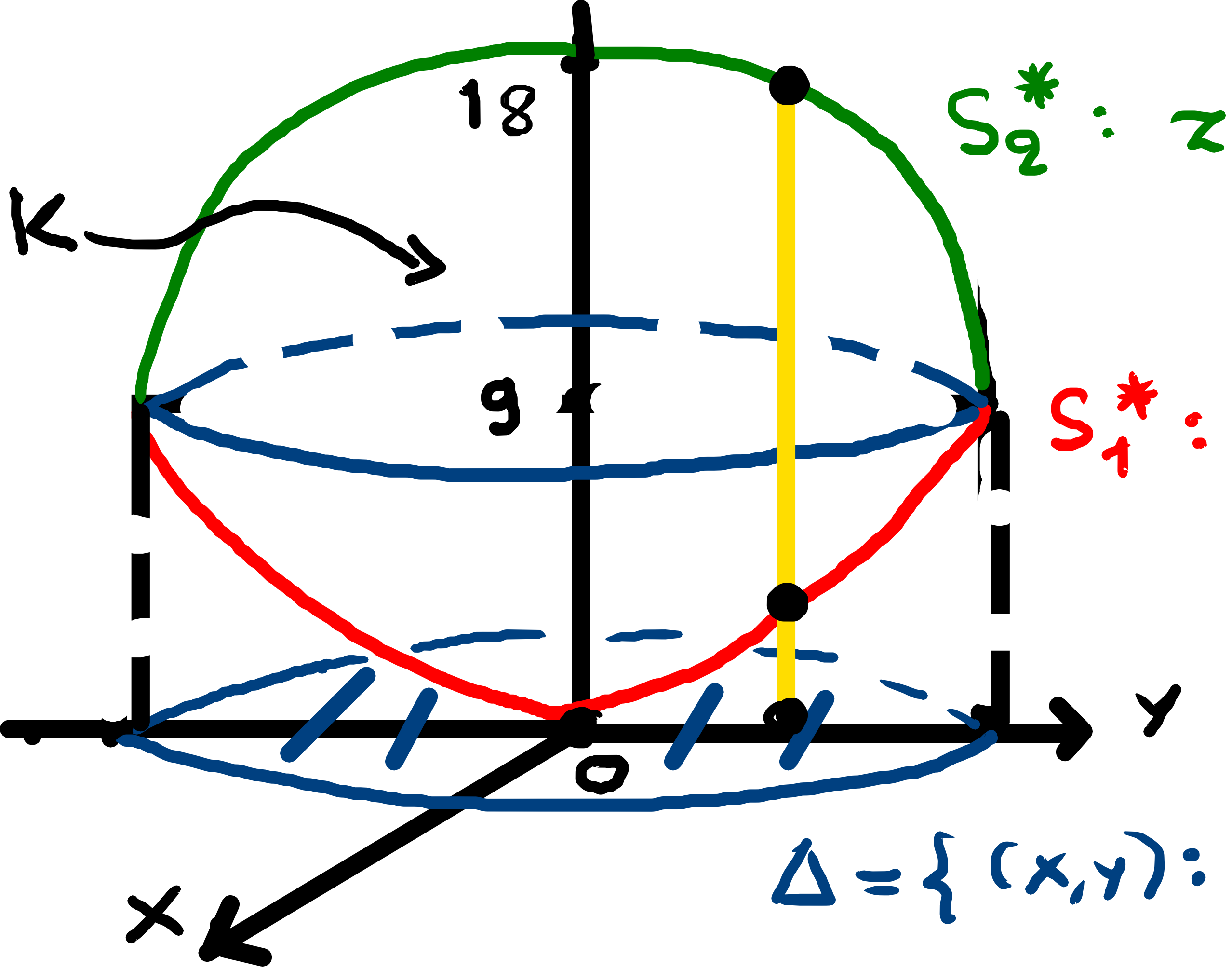
$$\iiint_K \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_K (1+1+1)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= 3 \cdot \text{όγκος}(K) = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = \underline{4\pi R^3}.$$

<u>(iii)</u> Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διαν. πεδίο $\vec{F} = (0, 0, z^2)$ κ' την επιφάνεια S = σύνορο του στερεού K που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2, \qquad z = 18 - x^2 - y^2.$$

<u>Λύση:</u> Η ροή διαμέσου της S έχει υπολογισθεί (βλ. παράδειγμα μετά τον Ορισμό 5) κ' ισούται με $\underline{6\pi \cdot 3^5}$.



$S_2^*: \ z = 18 - x^2 - y^2$

$S_1^*: \ z = x^2 + y^2$

$\Delta = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \le 9 \}$

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} =$$

$$= \iiint_K 2z \, dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_\Delta \left(\int_{x^2+y^2}^{18-x^2-y^2} 2z\,dz \right) dx\,dy$$

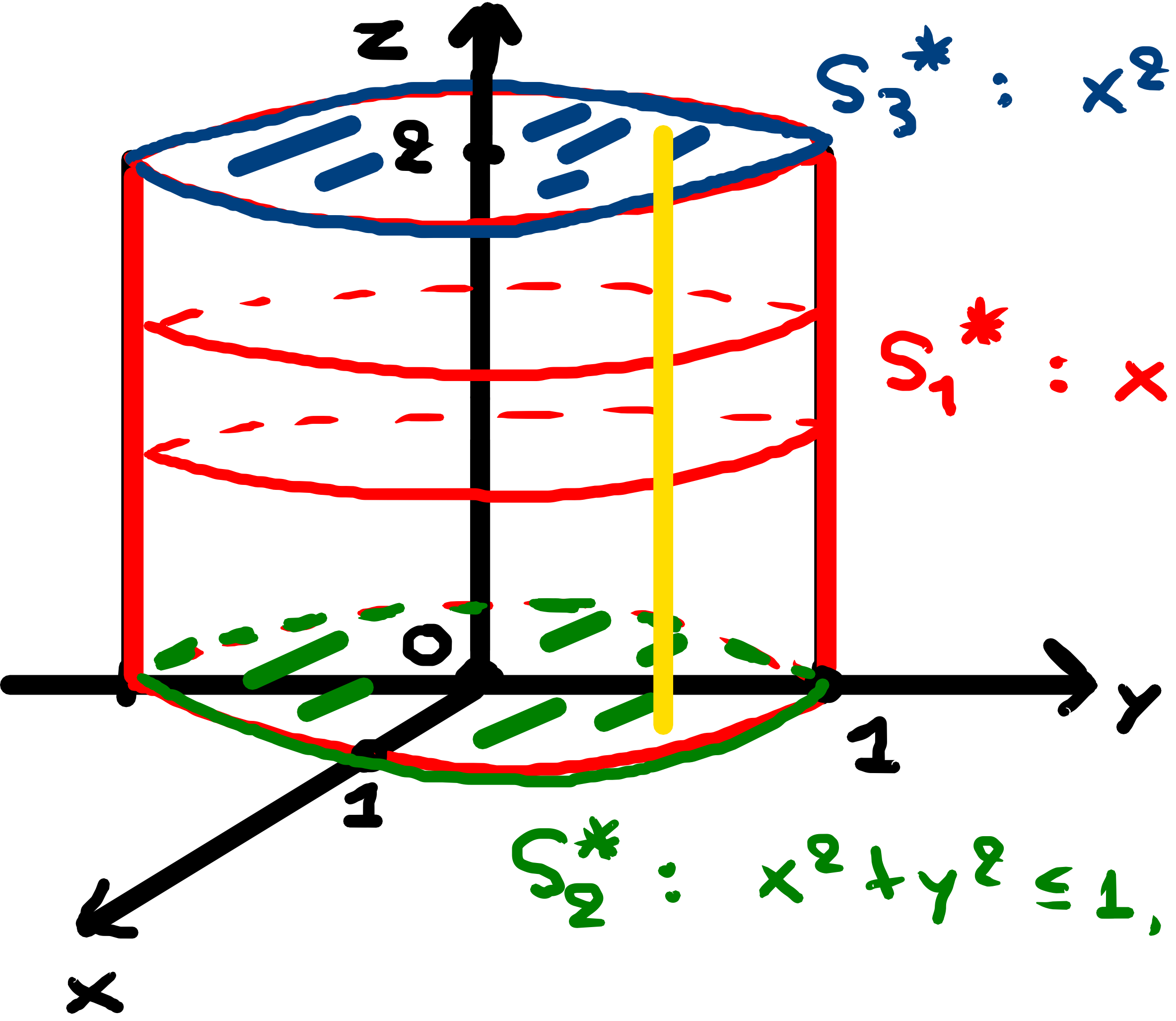
$$= \iint_\Delta \left[\left(18 - x^2 - y^2\right)^2 - \left(x^2+y^2\right)^2 \right] dx\,dy \ \underset{y = r\sin\varphi}{\overset{x = r\cos\varphi}{=}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \left[(18-r^2)^2 - r^4 \right] r\,dr\,d\varphi = 2\pi \left[\int_0^3 (18-r^2)^2 r\,dr - \int_0^3 r^5\,dr \right] =$$

$$= \cdots \underline{6\pi \cdot 3^5}\,.$$

(iv) Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διαν. πεδίο $\vec{F} = (y, x, z^2)$ κ' για το στερεό $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 2\}$.

Λύση:



$S_3^*: x^2+y^2 \leq 1, \ z=2$

$S_1^*: x^2+y^2 = 1, \ 0 \leq z \leq 2$

$S_2^*: x^2+y^2 \leq 1, \ z=0$

- <u>Ροή μέσω της S_1</u>:

$$S_1 : [0,2\pi] \times [0,2] \to \mathbb{R}^3,$$

$$S_1(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S_1}{\partial z} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \times (0, 0, 1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial S_1}{\partial z}\right)(0,0) = (1,0,0), \quad S_1(0,0) = (1,0,0)$$

"δείχνει" προς τα έξω αν σχεδιαστεί με αρχή το $(1,0,0)$

$$\Rightarrow \vec{n_1}(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(S_1(\varphi, z)) \cdot \vec{n_1}(\varphi, z) = (\sin\varphi, \cos\varphi, z^2) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) =$$

$= 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin(2\varphi)$

$\Rightarrow$ ροή μέσω της $S_1 = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi)\, d\varphi\, dz = 0$

- **Ροή διαμέσου της S_2:**

Θεωρούμε την επιφάνεια $S_2 : \Delta \to \mathbb{R}^3$, όπου

$\Delta = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$, $S_2(u,v) = (u,v,0)$.

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$$

$S_2(0,0) = (0,0,0)$

"δείχνει" εσωτερικά αν σχεδιαστεί με αρχή το $(0,0,0)$

$\Rightarrow \vec{n_2}(u,v) = (0,0,-1)$

$\Rightarrow \vec{F}(u,v,0)\cdot(0,0,-1) = (v,u,0)\cdot(0,0,-1) = 0$

$\Rightarrow$ <u>ροή μέσω της $S_2 = 0$.</u>

• <u>Ροή μέσω της S_3:</u> $S_3 : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $\Delta = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$,

$S_3(u,v) = (u,v,2)$, $\frac{\partial S_3}{\partial u} \times \frac{\partial S_3}{\partial v} = (1,0,0)\times(0,1,0) = (0,0,1)$.

$S_3(0,0) = (0,0,2)$

"δείχνει" εξωτερικά αν σχεδιαστεί με αρχή το $(0,0,2)$

$\Rightarrow \vec{n_3}(u,v) = (0,0,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F}(u,v,2)\cdot(0,0,1) = (v,u,4)\cdot(0,0,1) = 4$$

$\Rightarrow$ ροή διαμέσου της $S_3 = \iint_{\Delta} 4\,du\,dv = 4\pi\cdot 1^2 = \underline{\underline{4\pi}}$.

Άρα, συνολική ροή $= 0+0+4\pi = \underline{\underline{4\pi}}$.

Ταυτόχρονα,

$$\iiint_K \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_K 2z\,dx\,dy\,dz = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \left(\int_0^2 2z\,dz\right) dx\,dy$$

$$= 4\iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} dx\,dy = 4\pi\cdot 1^2 = \underline{\underline{4\pi}}$$