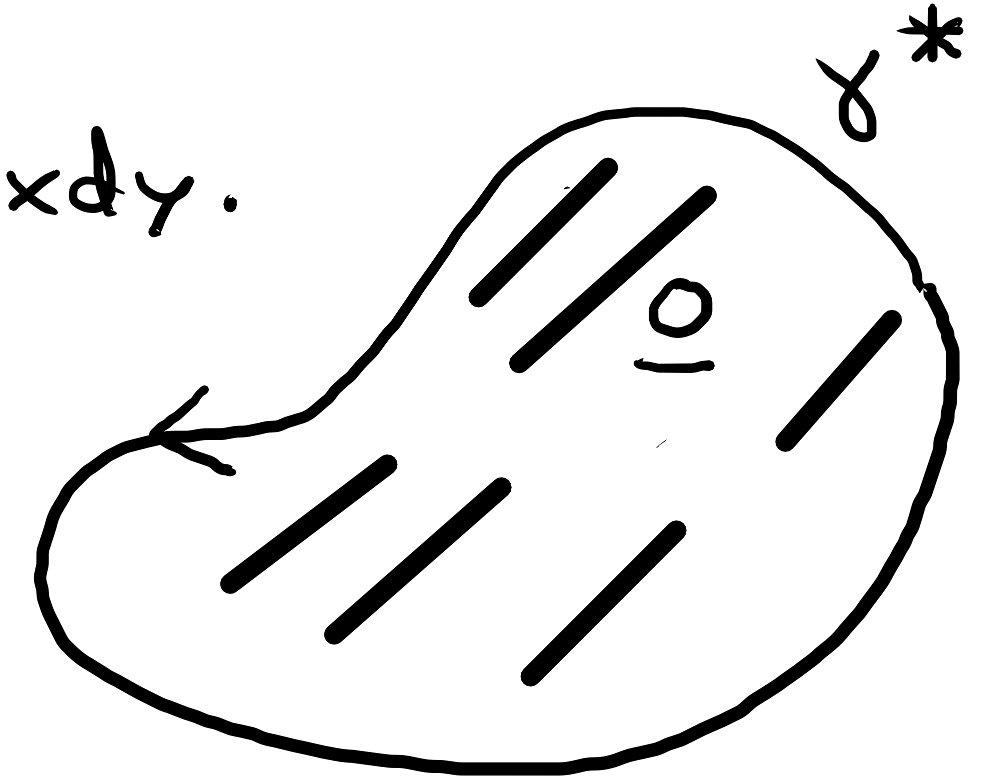
ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN

Θεώρημα 1: Έστω γ απλή, κλειστή, θετικά προσανατολ. τμημ. λεία καμπύλη με απλά συνεκτικό εσωτερικό $\Omega = \mathrm{int}\,\gamma^*$ κ' $P, Q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ συνεχείς, ώστε P, Q κλάσης C^1 στο Ω. Τότε,

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \iint_\Omega (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

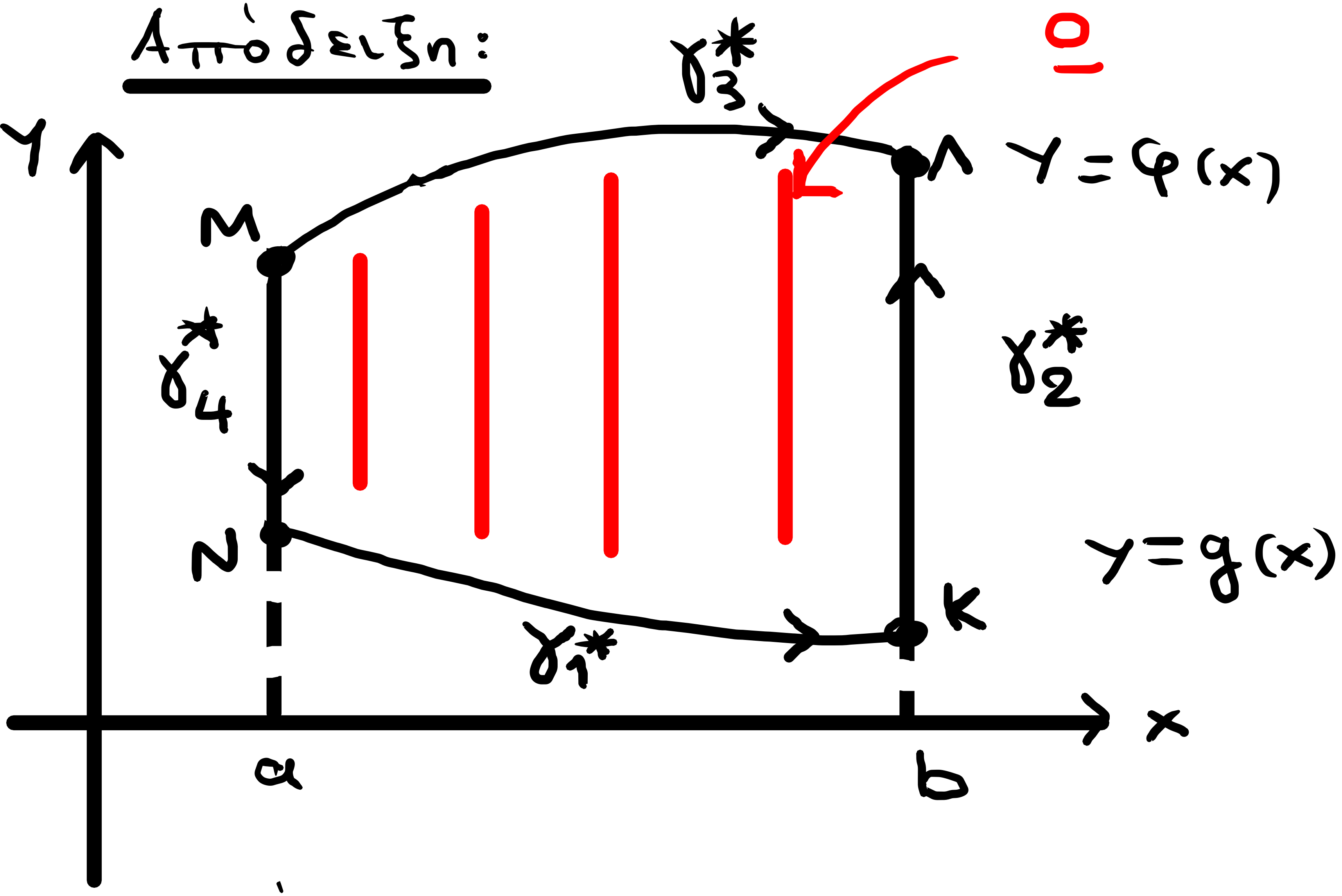


Θα δώσουμε την απόδειξη για την περίπτωση που το $\underline{\Omega}$ είναι x-απλό κ' y-απλό ταυτόχρονα.

<u>Λήμμα 2</u>: Έστω γ, $\underline{\Omega}$, P όπως στο Θ.1. Υποθέσουμε ότι το $\underline{\Omega}$ είναι x-απλό. Τότε,

$$\int_{\gamma} P\,dx = -\iint_{\underline{\Omega}} P_y\,dx\,dy,$$

Απόδειξη:



$\underline{\Omega}=\{(x,y) \mid a<x<b,\ g(x)<y<\varphi(x)\}$,

$\varphi, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

συνεχείς με $g \leq \varphi$.

$\partial \underline{\Omega} = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4$,

όπου:

$\gamma_1(t) = (t, g(t))$, $\gamma_3(t) = (t, \varphi(t))$, $t \in [a,b]$

$\gamma_2 = \vec{K\Lambda}$, $\gamma_4 = \vec{MN}$.

Επειδή $\forall (x,y) \in \gamma_2^* \cup \gamma_4^*$ το $x =$ σταθερό, έχουμε

$$\int_{\gamma_2} P\,dx = \int_{\gamma_4} P\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} P\,dx = \int_{\gamma_1} P\,dx + \int_{\gamma_2} P\,dx - \int_{\gamma_3} P\,dx + \int_{\gamma_4} P\,dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{b} P(t, g(t))\,dt - \int_{\alpha}^{b} P(t, \varphi(t))\,dt$$

$$= \int_{\alpha}^{b} \left[P(t, g(t)) - P(t, \varphi(t)) \right] dt.$$

Ταυτόχρονα,

$$\iint_{\Omega} P_y\,dx\,dy = \int_{a}^{b}\left[\int_{g(t)}^{\varphi(t)} P_y(t,y)\,dy\right]dt =$$

$$= \int_{a}^{b}\left[P(t,\varphi(t)) - P(t,g(t))\right]dt = -\int_{\partial\Omega} P\,dx.$$

$\boxtimes$

Λήμμα 3: Έστω γ, Ω, Q όπως στο Θ.1. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι y-απλό. Τότε,

$$\int_{\gamma} Q\,dy = \iint_{\Omega} Q_x\,dx\,dy.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του Λήμματος 2.

<u>Απόδειξη Θ.1 για Ω x-απλό κ' y-απλό.</u>

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \int_\gamma P\,dx + \int_\gamma Q\,dy \quad \text{[Λήμματα 2,3]}$$

$$= -\iint_\Omega P_y\,dx\,dy + \iint_\Omega Q_x\,dx\,dy = \iint_\Omega (Q_x - P_y)\,dx\,dy. \quad \boxtimes$$

Παραδείγματα:

(1) Να επαληθεύσετε το Θ. Green για το διαν. πεδίο $\vec{F}$ κ' το χωρίο $\underline{\Omega}$, όπου:

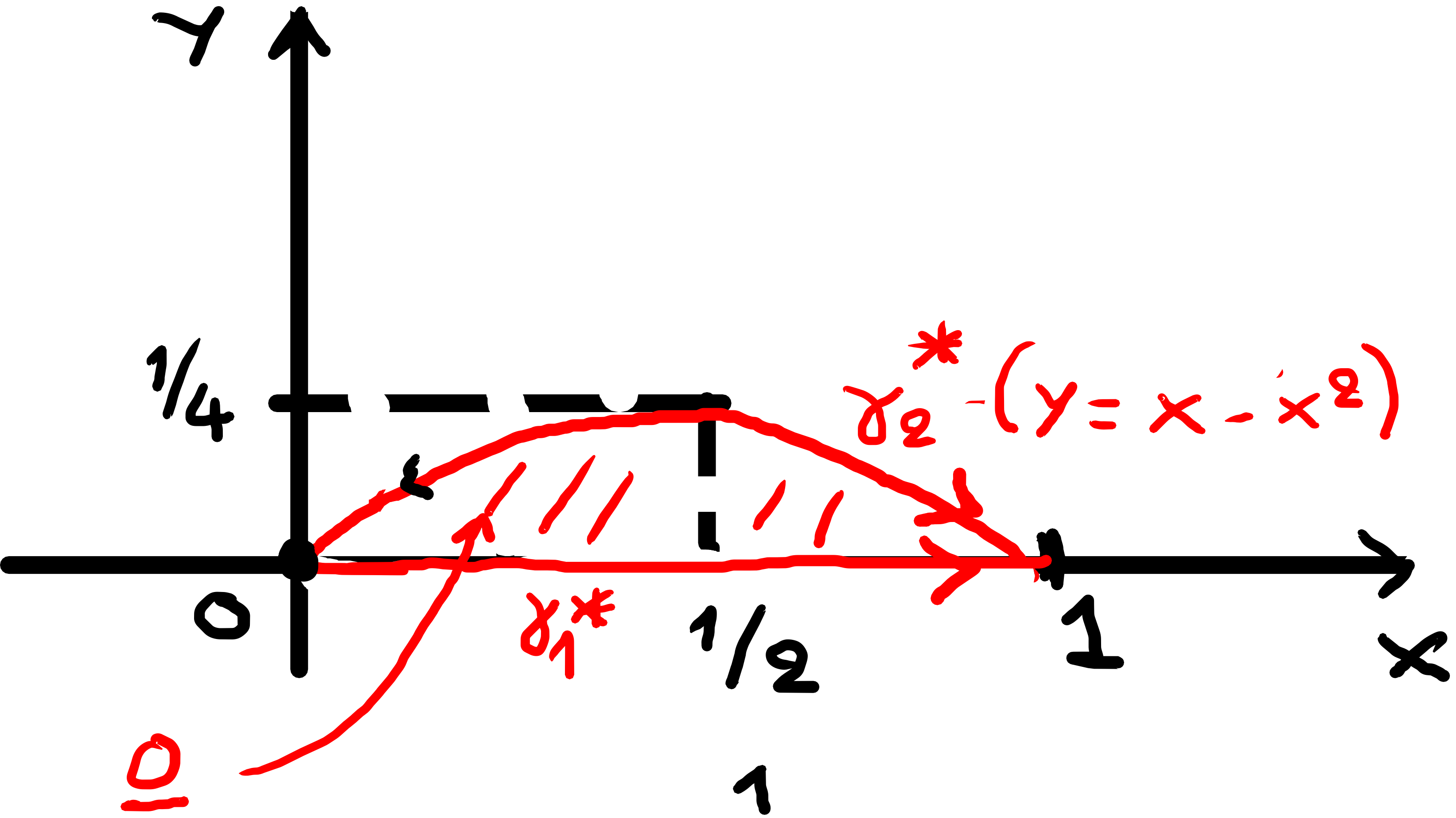
(i) $\vec{F} = (-y, x)$, $\underline{\Omega}$ το χωρίο που φράσσεται από τις $y = x - x^2$, $y = 0$.

Λύση:

$$y = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Παραβολή με κορυφή $(1/2, 1/4)$

Θέτουμε $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, όπου



$\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = (t, t - t^2)$, $t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_1} -y\, dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_{\gamma_2} (-y\,dx + x\,dy) = \int_0^1 \left[(t^2 - t) \cdot 1 + t(1 - 2t)\right] dt = \ldots = -1/3$$

$$\Rightarrow \int_{\partial \underline{\Omega} = \gamma} \vec{F} = 0 - (-1/3) = \underline{\underline{1/3}}.$$

$$\iint_{\underline{\Omega}} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint_{\underline{\Omega}} (1+1)\,dx\,dy = 2\iint_{\underline{\Omega}} dx\,dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(\int_0^{x-x^2} dy \right) dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx =$$

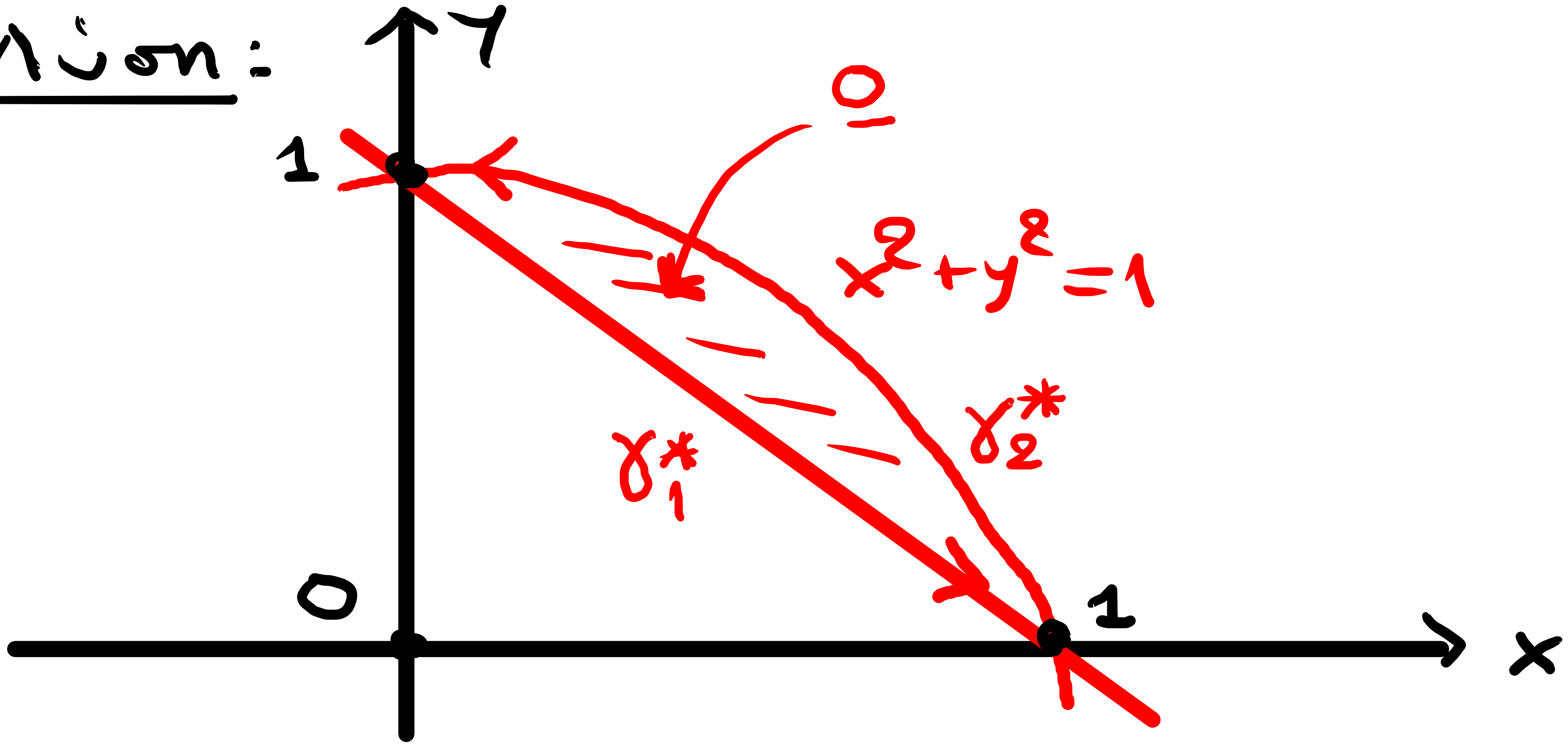
$$= 2\,(1/2 - 1/3) = \underline{\underline{1/3}}.$$

(ii) $\vec{F} = (-y, x)$, $\underline{\Omega}$ το χωρίο που φράσσεται από τις

$$x + y = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

κ' βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Λύση:



$\gamma_1(t) = (t, 1-t)$, $t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$

$$\partial \underline{\Omega} = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_1} (-y\,dx + x\,dy) = \int_0^1 \left[-(1-t)\cdot 1 + t\cdot(-1) \right] dt$$

$$= \int_0^1 (-1)\,dt = -1,$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_{\gamma_2} (-y\,dx + x\,dy) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t \right] = \pi/2$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}.$$

$$\iint_{\underline{\Omega}} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = 2\iint_{\underline{\Omega}} dx\,dy = 2\,\text{Εμβ}(\underline{\Omega}) =$$

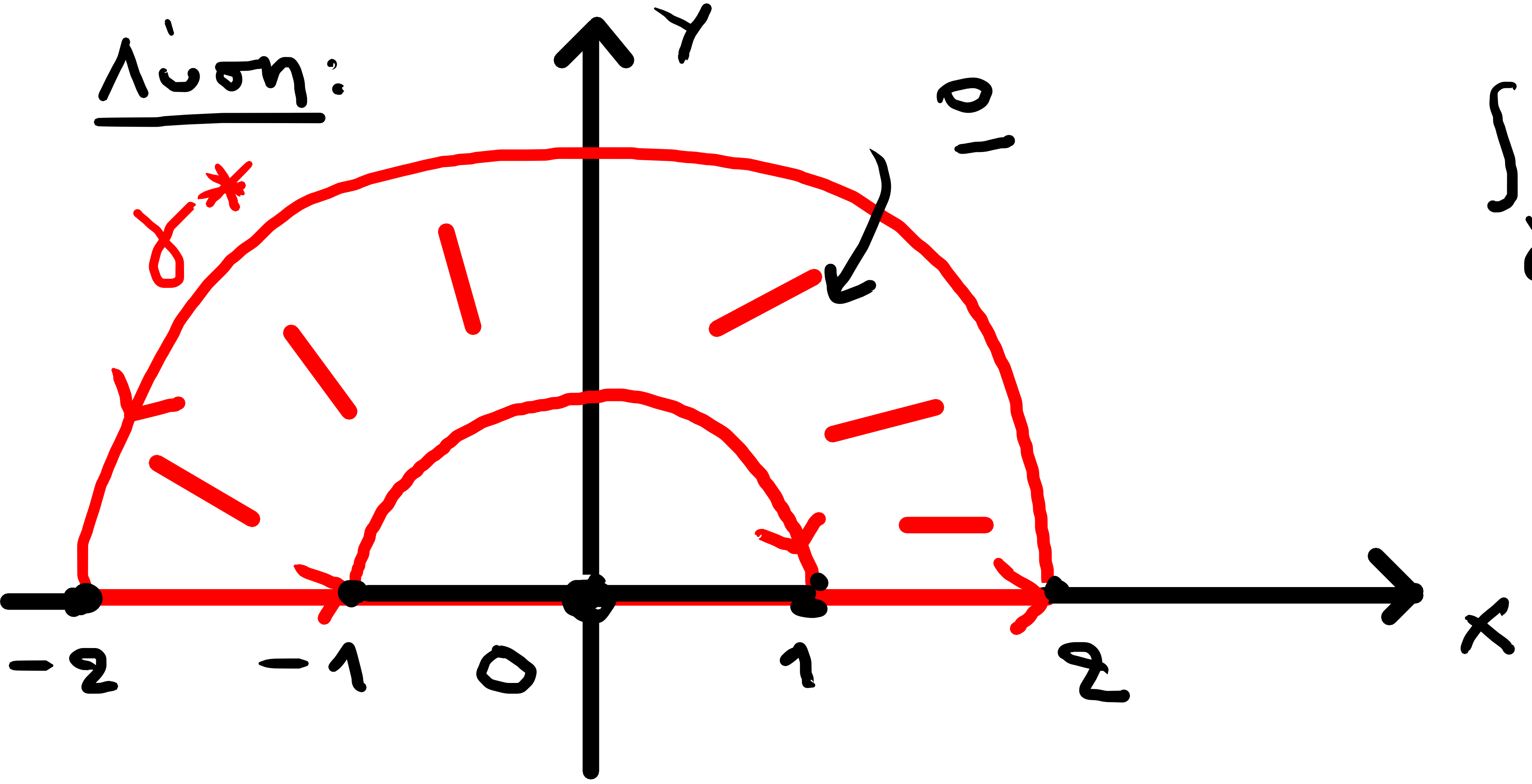
$$= 2\left(\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right) = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}.$$

---

(2) Να υπολογίσετε το $\int_\gamma (y^2\,dx + 3xy)\,dy$, όπου γ το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του χωρίου

$$\underline{\Omega} = \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4,\ y > 0\}.$$

Λύση:



$$\int_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (3y - 2y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D y\,dx\,dy \;\underset{y = r\sin\varphi}{\overset{x = r\cos\varphi}{=\!=}}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array}\right)$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r \sin\varphi \, r\,dr \right) d\varphi$$

$$=$$

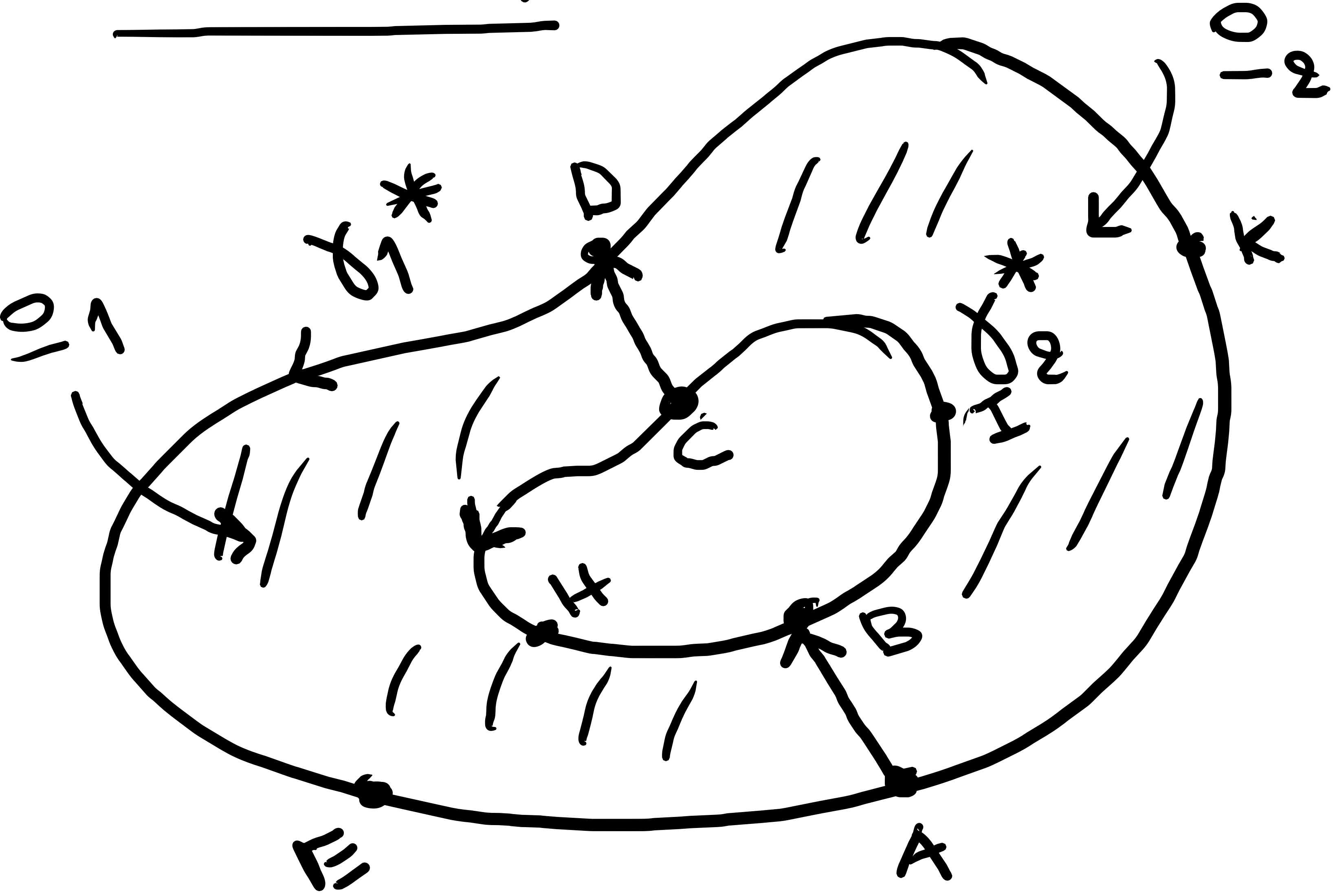
$$= \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \cdot \int_1^2 r^2 dr = -\cos\varphi \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(8-1) = 14/3$$

Θεώρημα 2 (γενίκευση Θ. Green)

Έστω γ_1, γ_2 απλές, κλειστές, θετικά προσανατολ. τμημ. λείες καμπύλες με $\gamma_2^* \subset \mathrm{int}\,\gamma_1^*$. Υποθέτουμε ότι οι P, Q είναι συνεχείς στο $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ κ' κλάσης C^1 στο χωρίο $\underline{\Omega}$ μεταξύ των γ_1^*, γ_2^*. Τότε,

$$\iint_{\Omega} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{\gamma_1}(P\,dx + Q\,dy) - \int_{\gamma_2}(P\,dx + Q\,dy).$$

Απόδειξη:



$$\Gamma_1 = (D \xrightarrow{\gamma_1} E) + (E \xrightarrow{\gamma_1} A) + \overrightarrow{AB} + (B \xrightarrow{-\gamma_2} H) + (H \xrightarrow{-\gamma_2} C) + \overrightarrow{CD},$$

$$\operatorname{int}\Gamma_1^* = \Omega_1$$

Θ. Green στο Ω_1:

$$\boxed{\iint_{\Omega_1} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{\Gamma_1} (P\,dx + Q\,dy)} \quad (1)$$

$$\Gamma_2 = \left(A \xrightarrow{\gamma_1} K\right) + \left(K \xrightarrow{\gamma_1} D\right) + \left(\overrightarrow{DC}\right) + \left(C \xrightarrow{-\gamma_2} I\right) + \left(I \xrightarrow{-\gamma_2} B\right) + \overrightarrow{BA}$$

$$\operatorname{int}\Gamma_2^{*} = \Omega_2$$

Θ. Green στο Ω_2:

$$\boxed{\iint_{\Omega_2} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{\Gamma_2} (P\,dx + Q\,dy)} \quad (2)$$

$$\overset{(1)+(2)}{\Longrightarrow} \iint_{\Omega} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \cdots = \int_{\gamma_1} (P\,dx + Q\,dy) -$$

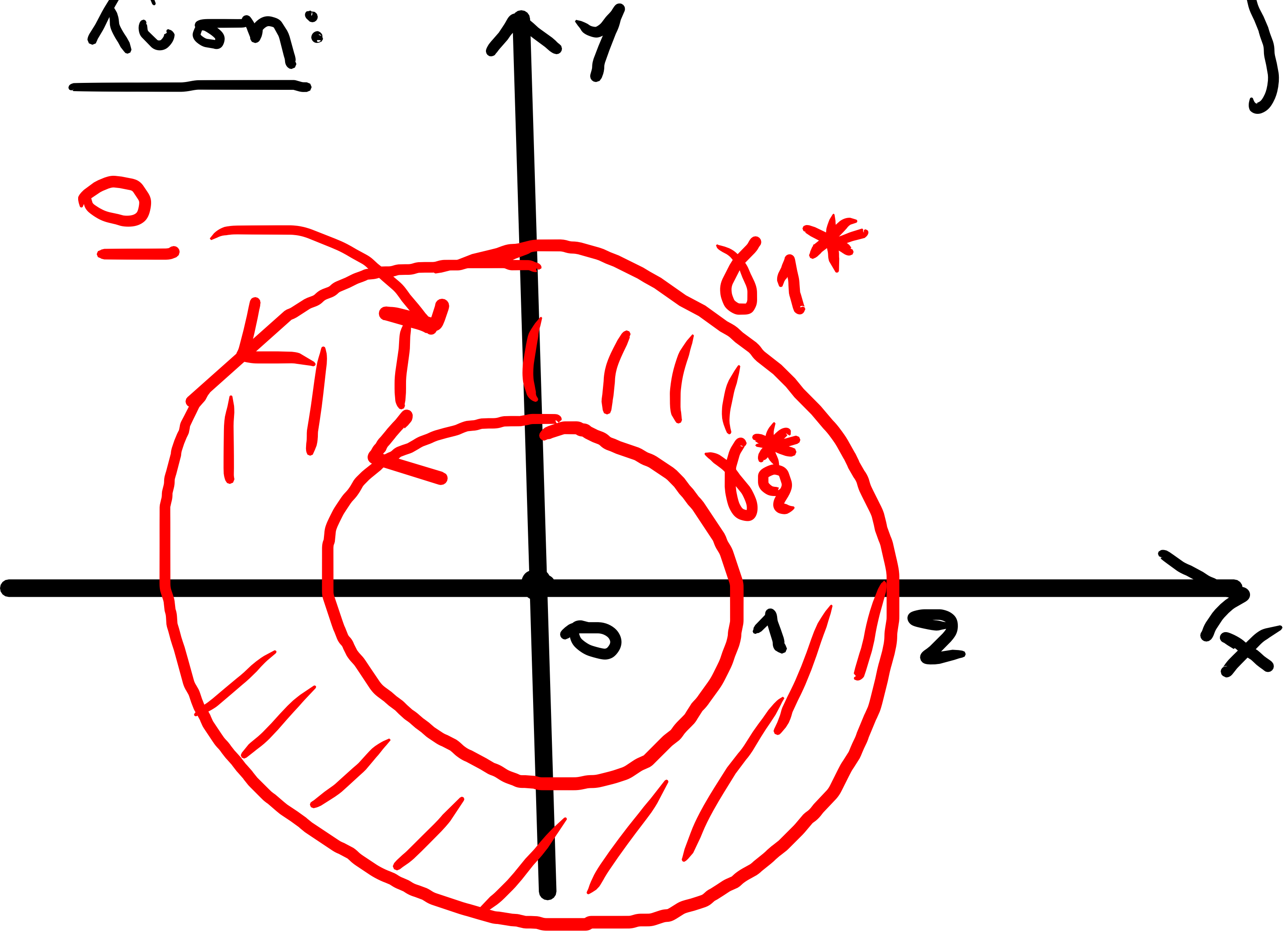
$$- \int_{\gamma_2} (P\,dx + Q\,dy). \qquad \boxtimes$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Να επαληθεύσετε το Γενικευμ. Θ. Green, για το διαν. πεδίο $\vec{F} = (y^3, -x^3)$ κ' το χωρίο

$$\underline{\Omega} = \{ (x,y) : \quad 1 < x^2 + y^2 < 4 \}.$$

Λύση:



$$\iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint_D (-3x^2 - 3y^2)\,dx\,dy$$

$$= -3 \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\underline{\underline{x = r\cos\varphi}}$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$(1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

$$= -3 \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 r\,dr\,d\varphi = -6\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2 = -\frac{3\pi}{2} \cdot 15$$

$$= \underline{\underline{-45\pi/2}}$$

Εάν $\gamma_R(t) = R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, τότε

$$I_R = \int_{\gamma_R} \left(y^3 dx - x^3 dy \right) = \int_0^{2\pi} \left[R^3 \sin^3 t (-R\sin t) - R^3 \cos^3 t \, R\cos t \right] dt =$$

$$= -R^4 \int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t)\, dt = -R^4 \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin^2 t \cos^2 t)\, dt$$

Αλλά $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2\sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 (2t)\, dt$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(4t)]\, dt = \pi/2$$

$$\Longrightarrow \quad I_R = -R^4 (2\pi - \pi/2) = -\frac{3}{2}\pi R^4.$$

Ἄρα,

$$\int_{\gamma_1}(Pdx+Qdy)-\int_{\gamma_2}(Pdx+Qdy)=-\frac{3\pi}{2}(2^4-1^4)=-\frac{45\pi}{2}.$$

Υπολογισμός εμβαδού με επικαμπ. ολοκλ.

Πρόταση 3: Έστω γ απλή, κλειστή, θετικά προσαν. ομαλή καμπύλη με απλά συνεκτικό εσωτερικό Ω. Τότε,

$$\text{εμβαδό}(\Omega)=\frac{1}{2}\int_{\gamma}(-y\,dx+x\,dy)=-\int_{\gamma}y\,dx=\int_{\gamma}x\,dy.$$

Απόδειξη:

- για $P=-y$, $Q=x$, από το Θ. Green παίρνουμε

$$\int_\gamma (-y\,dx + x\,dy) = \int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \iint_{\underline{\Omega}} (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$
$$= \iint_{\underline{\Omega}} (1+1)\,dx\,dy = 2\,\text{Εμβαδό}(\underline{\Omega}).$$

- για $P=-y$, $Q=0$, το Θ. Green δίνει

$$\int_\gamma -y\,dx = \iint_{\underline{\Omega}} 1\,dx\,dy = \text{Εμβ}(\underline{\Omega}).$$

- για $Q=x$, $P=0$, το Θ. Green δίνει

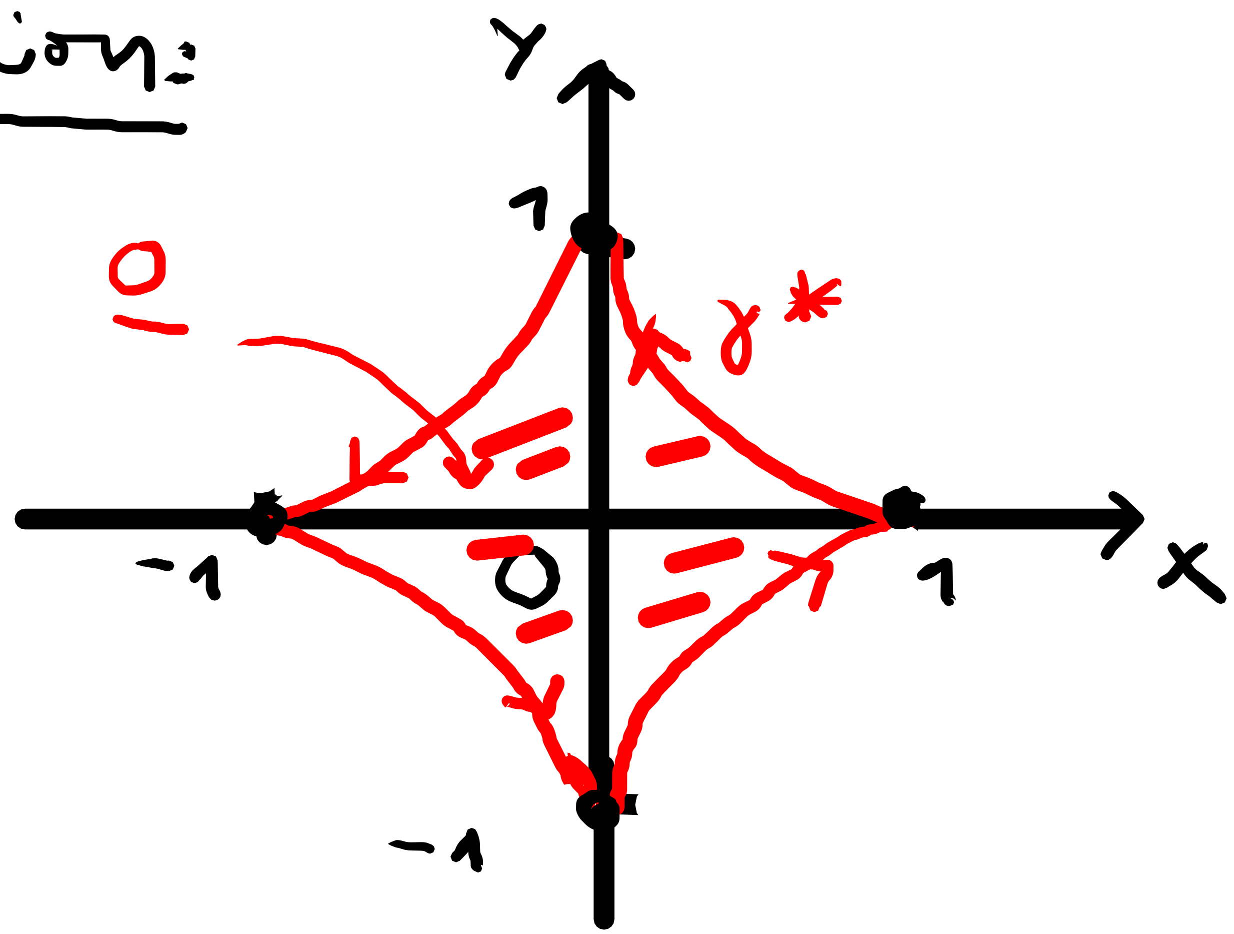
$$\int_\gamma x\,dy = \iint_{\underline{\Omega}} 1\,dx\,dy = \text{Εμβ}(\underline{\Omega}). \boxtimes$$

Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που φράσσεται από το αστεροειδές

$$\gamma(t) = (\cos^3 t,\ \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λύση:



Η γ είναι θετικά προσανατολ. αφού

$$0 < \pi/2 < \pi$$

$\Rightarrow$ $(1,0) = \gamma(0)$ προηγείται του $\gamma(\pi/2) = (0,1)$,

$(0,1) = \gamma(\pi/2)$ προηγ. του $\gamma(\pi) = (-1,0)$

Επομένως,

$$2\cdot \text{Εμβαδό}(\Omega) = \int_\gamma (-y\,dx + x\,dy) = \int_0^{2\pi}\Big[\big(-\sin^3 t\,(-3\cos^2 t\sin t)\big) + \cos^3 t\,(3\sin^2 t\cos t)\Big]\,dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} (\sin^4 t\cos^2 t + \sin^2 t\cos^4 t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\,dt$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} [1 - \cos(4t)]\,dt = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow E(\Omega) = \underline{\underline{3\pi/8}}.$$