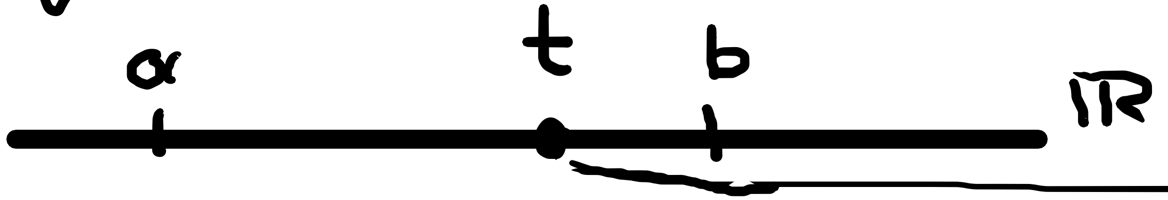
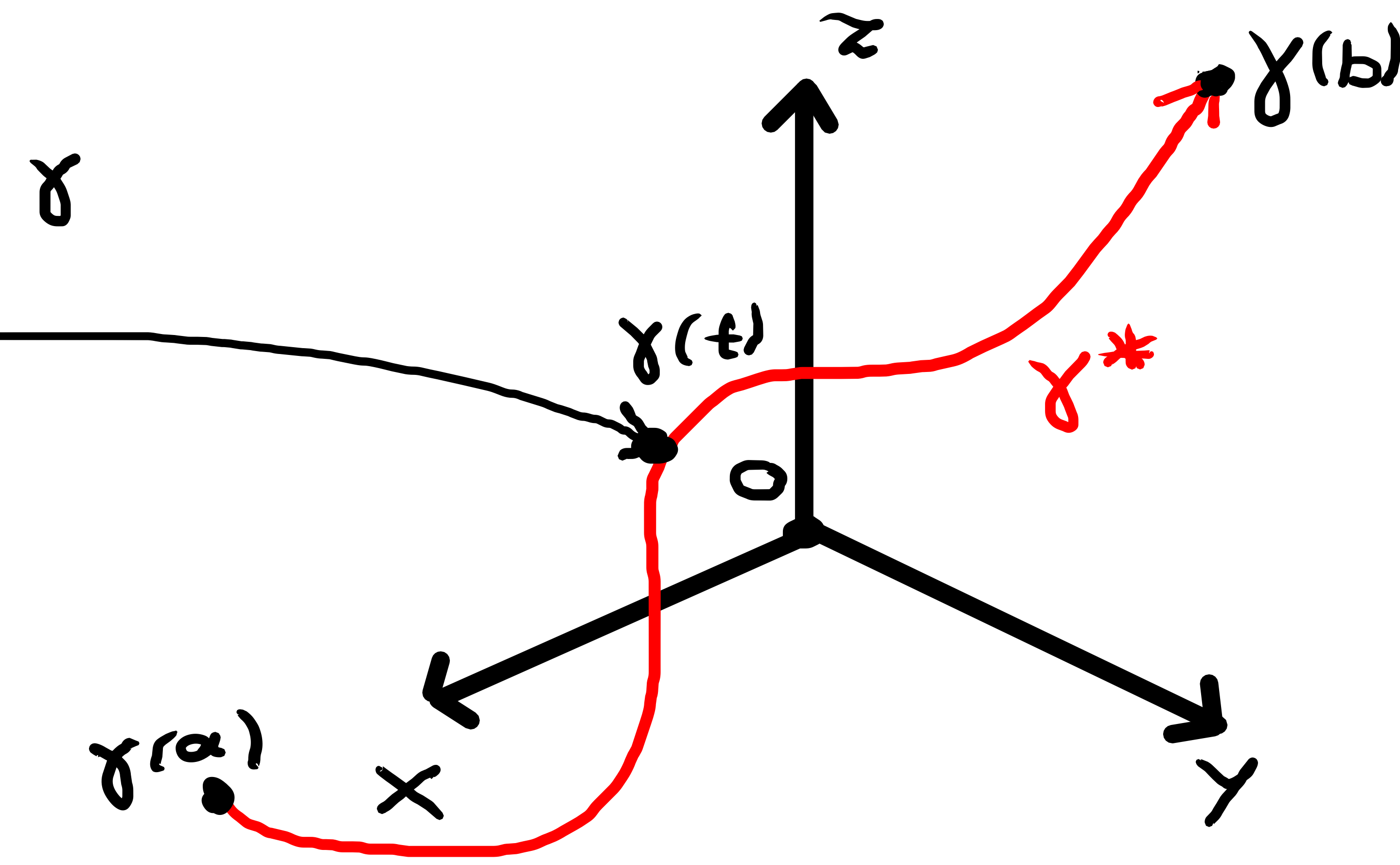
# ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛ. ΣΤΟ ΧΩΡΟ.

## I. Καμπύλες στο χώρο.

**Ορισμός I.1:** Καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ είναι μια συνεχής απεικόνιση

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ $(a<b)$.




$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a,b].$$

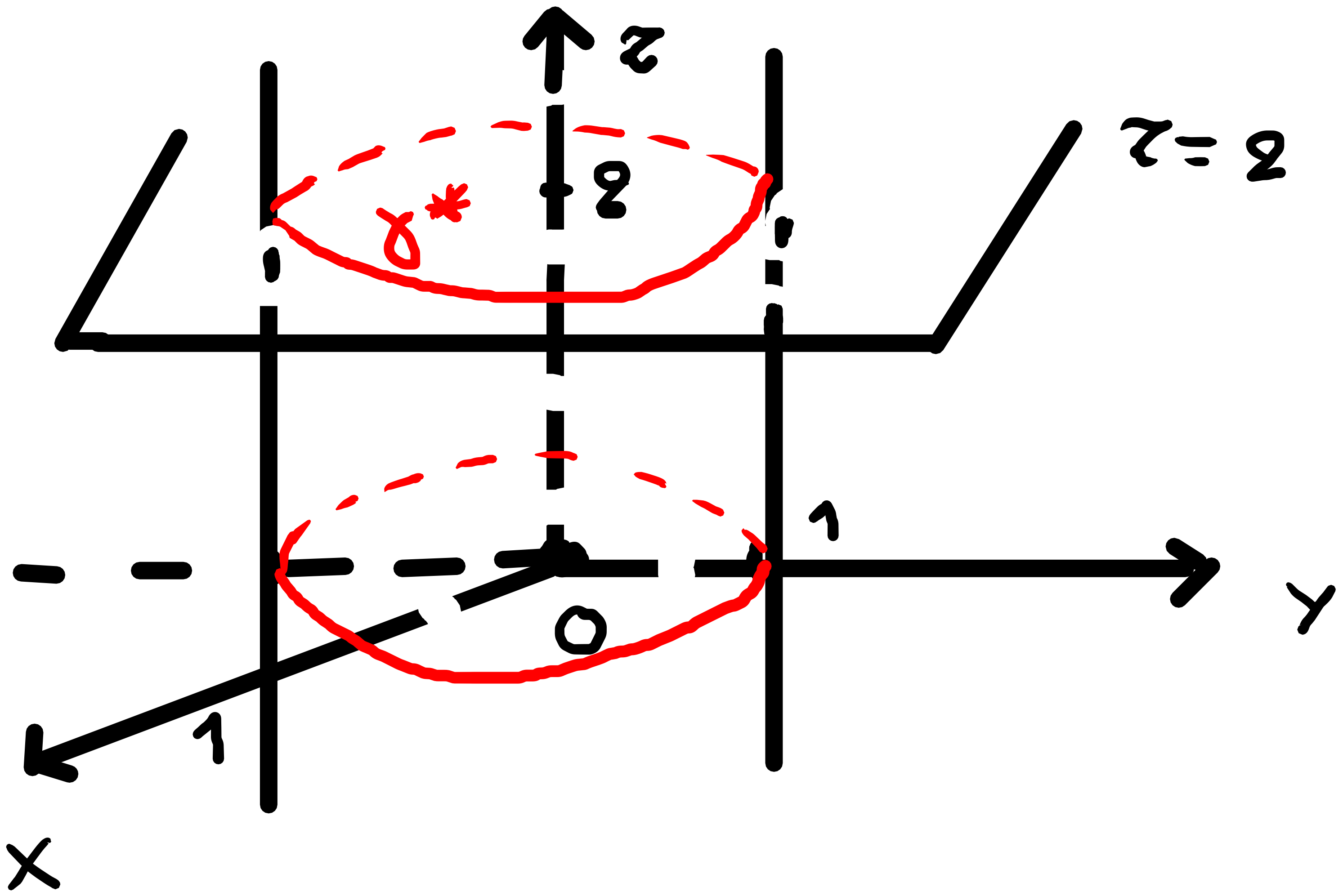
Οι $x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ λέγονται **συνιστώσες της $\gamma$.**

$\gamma^* = \gamma([a,b]) =$ **ίχνος της $\gamma$.**

## Παραδείγματα:

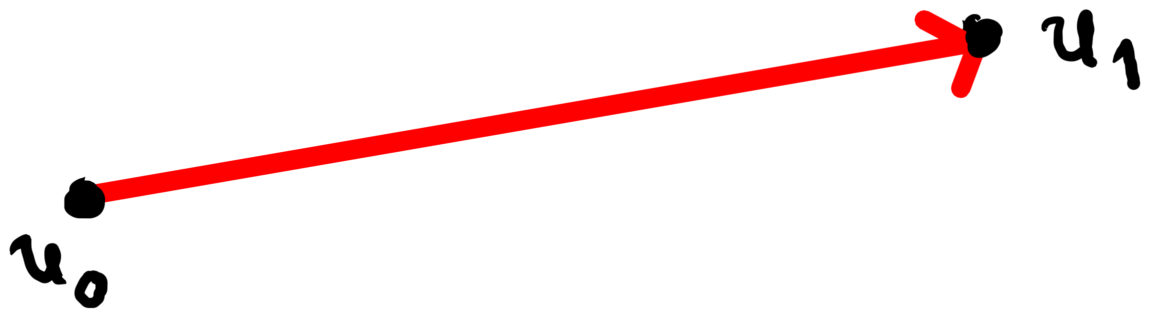
(i) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2),\ t \in [0, 2\pi]$.

Το $\gamma^*$ είναι η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ κ' του επιπέδου $z=2$ με προβολή στο $xy$ - επίπεδο τον κύκλο $x^2+y^2=1$.

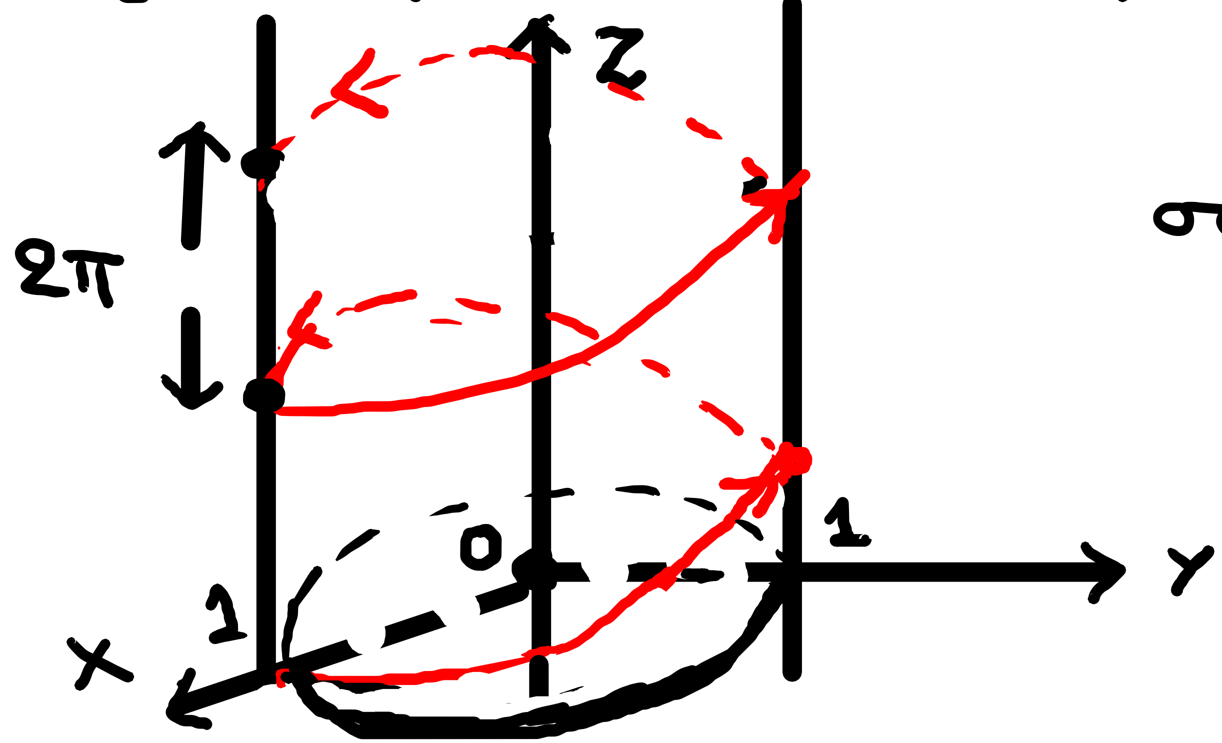


(ii) Εάν $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^3$ κ' $\gamma(t) = (1-t)u_0 + t u_1$, $t \in [0,1]$, τότε

το $\gamma^*$ είναι το προσανατολ. ευθ. τμήμα με αρχή το $u_0$ κ' πέρας $u_1$.




(iii) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$ (κυκλική έλικα).




Τα σημεία του $\gamma^*$ βρίσκονται πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

$2\pi$ = Βήμα της έλικας = η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών πλήρων διαγραφών της καμπύλης.

**Ορισμός Ι.2:** Μια καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ λέγεται

- **κλειστή** ανν $\gamma(a)=\gamma(b)$
- **απλή** ανν $\gamma|[a,b)$ 1-1 ($\gamma^*$ δεν τέμνει τον εαυτό της).

---

**Ορισμός Ι.3:** Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ καμπύλη.

**Αναπαραμέτρηση** της $\gamma$ είναι κάθε απεικόνιση της μορφής $\gamma\circ\varphi:[c,d]\to\mathbb{R}^3$, όπου $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ συνεχής, $\uparrow$ κ' επί.

---

Οι $\gamma$, $\gamma\circ\varphi$ έχουν την ίδια φορά διαγραφής κ' το ίδιο ίχνος.

**Ορισμός I.4:** Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ καμπύλη με

$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[a,b]$.

- Η $\gamma$ λέγεται **κλάσης $C^1$** ανν οι $x(\cdot),y(\cdot),z(\cdot):[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι κλάσης $C^1$.

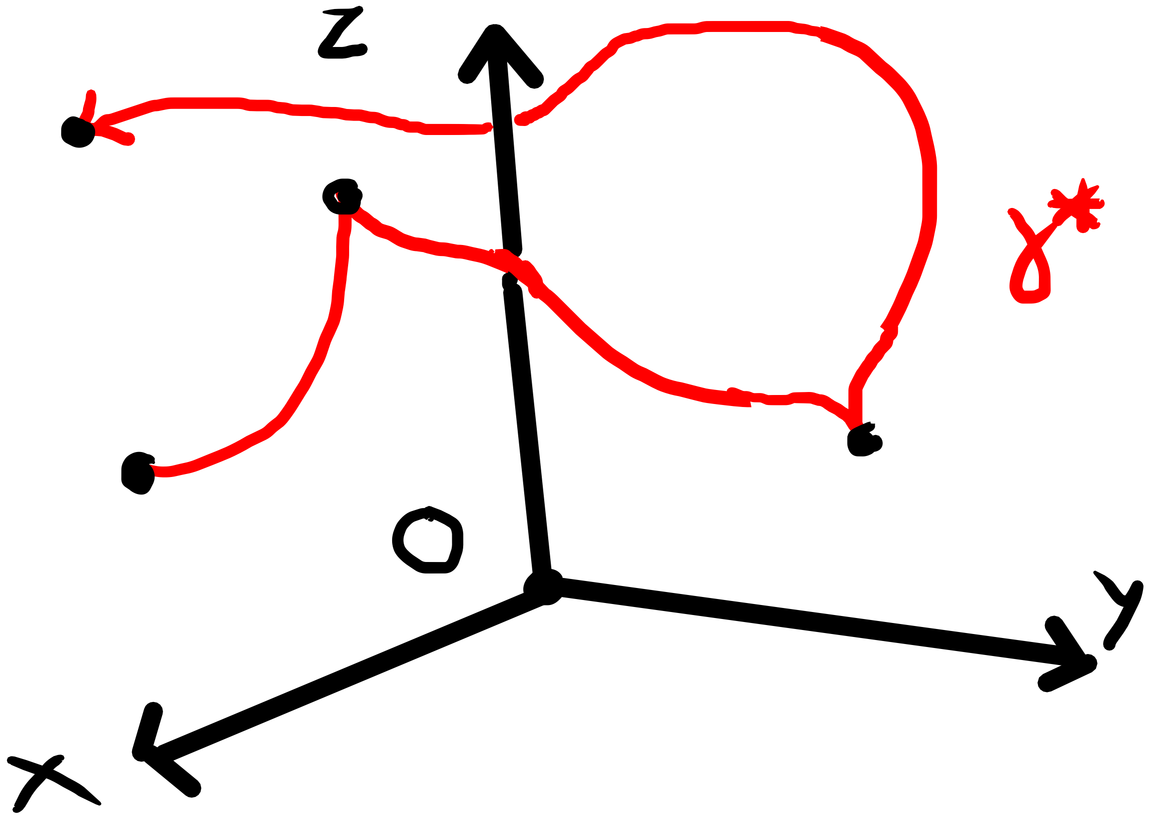
- Η $\gamma$ λέγεται **λεία** ανν είναι $C^1$ κ' $\gamma'(t)\neq(0,0,0)$, $\forall t\in[a,b]$.

Εάν $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ **κλάσης $C^1$**, **επί** με **$\varphi'>0$** κ' $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ λεία, τότε κ' $\gamma\circ\varphi$ λεία κ'

$$(\gamma\circ\varphi)'(t)=\varphi'(t)\gamma'(\varphi(t)),\ \forall t\in[a,b].$$

Το άθροισμα διαδοχ. καμπυλών κ' η αντίθετη καμπύλη ορίζονται ακριβώς όπως στην περίπτωση επιπέδων καμπυλών.

**Ορισμός I.5.:** Μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ είναι τμηματικά λεία αν είναι το άθροισμα διαδοχικών λείων καμπυλών.




← τμημ. λεία

**Ορισμός I.6:** Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ λεία. Μήκος της $\gamma$ είναι το $\|\gamma\|=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$.

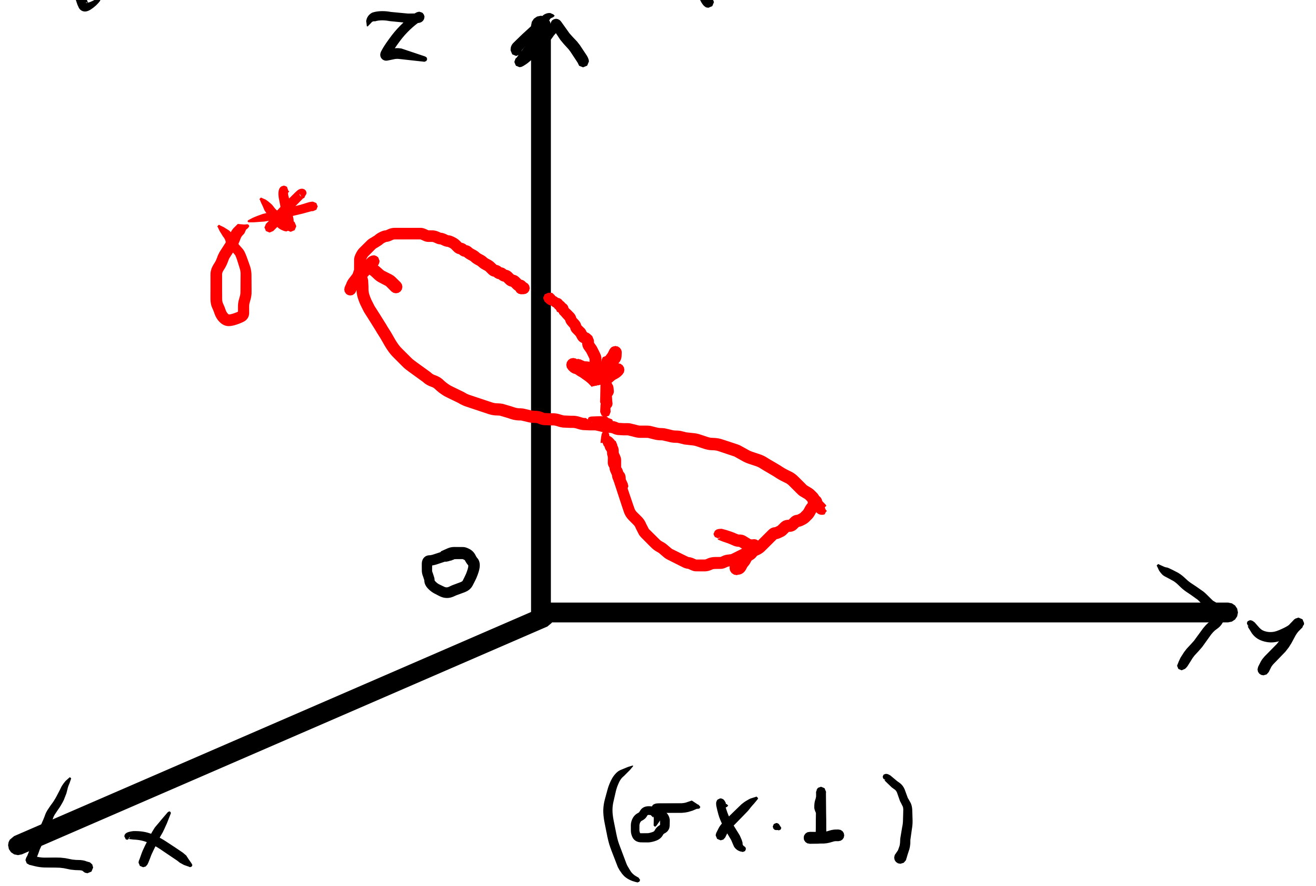
Εάν $\gamma$ τμημ. λεία με $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n$ ($\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες), το μήκος της $\gamma$ είναι το

$$\|\gamma\| = \sum_{j=1}^{n}\|\gamma_j\|.$$

Εάν $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ λεία κ' $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ $C^1$, επί με $\varphi'>0$, τότε οι $\gamma$, $\gamma\circ\varphi$ έχουν το ίδιο μήκος.

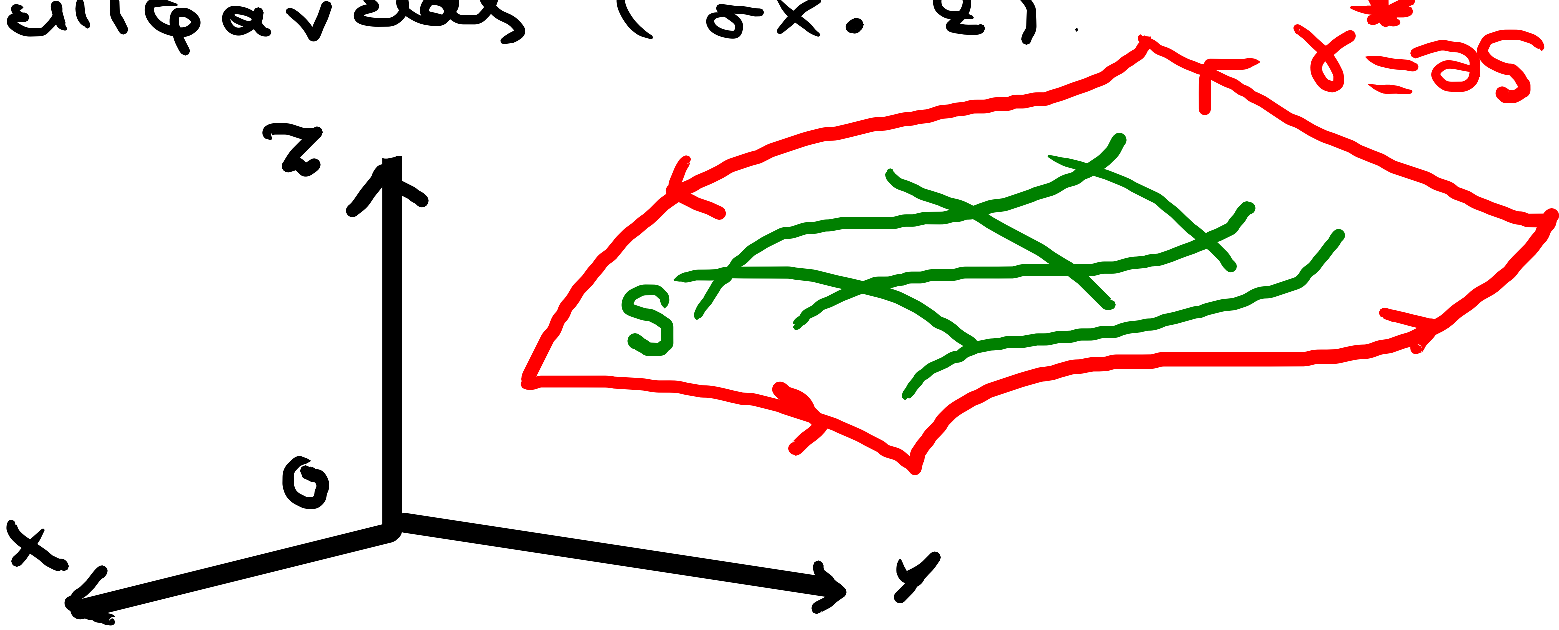
## Σημαντική διαφορά καμπυλών στον $\mathbb{R}^3$ κ' καμπυλών στον $\mathbb{R}^2$.

Εάν $\gamma$ <u>μη</u> επίπεδη απλή, κλειστή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$, δεν ορίζεται γενικά η έννοια του "εσωτερικού της $\gamma$" κ' της "θετικά προσανατολισμένης καμπύλης $\gamma$" (π.χ. σχ. 1).




(σχ. 1)

Ορίζονται αυτές οι έννοιες για το σύνορο προσανατολισμένης επιφάνειας (σχ. 2)



## II. Επικαμπύλιο ολοκλ. διαν. συνάρτησης στον $\mathbb{R}^3$.

**Ορισμός II.1:** Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ λεία καμπύλη κ' $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ συνεχής διανυσμ. συνάρτηση. Ορίζουμε το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ πάνω στην $\gamma$** ως εξής:

$$\int_\gamma \vec{F} \doteq \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Εάν $\vec{F} = (P, Q, R)$, $P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, τότε

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_\gamma (P\,dx + Q\,dy + R\,dz), \quad \text{όπου}$$

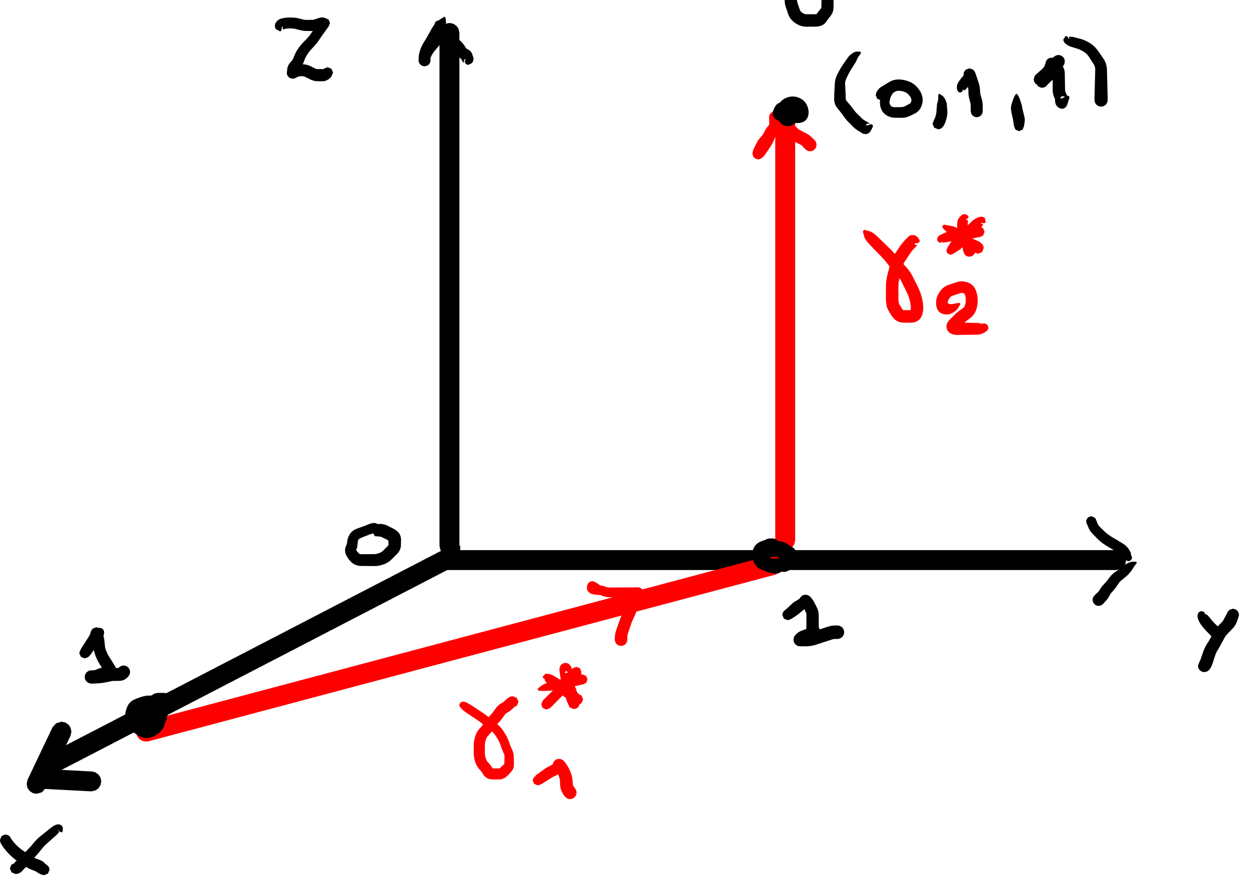
$$\int_\gamma P\,dx = \int_a^b P(\gamma(t))\,x'(t)\,dt, \quad \int_\gamma Q\,dy = \int_a^b Q(\gamma(t))\,y'(t)\,dt,$$

$$\int_\gamma R\,dz = \int_a^b R(\gamma(t))\,z'(t)\,dt.$$

Εάν $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ τμημ. λεία ($\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ λείες διαδοχικές), τότε ορίζεται το

$$\int_\gamma \vec{F} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \vec{F}.$$

**Παράδειγμα:** $\int_\gamma \vec{F} = ?$, $\vec{F} = (xy,\ xz,\ -y)$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (βλ. σχήμα).




**Λύση:** $\int_\gamma \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F}$.

- $\gamma_1(t) = (1-t)(1,0,0) + t(0,1,0)$

$$= (\underbrace{1-t}_{x(t)},\ \underbrace{t}_{y(t)},\ \underbrace{0}_{z(t)}),\quad t \in [0,1]$$

$$\int_{\gamma_1} P\,dx = \int_0^1 t(1-t)(-1)\,dt = -1/6,$$

$$\int_{\gamma_1} Q\,dy = \int_{\gamma_1} R\,dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\int_{\gamma_1} \vec{F} = -1/6}.$$

• $\gamma_2(t) = (1-t)(0,1,0) + t(0,1,1) = (\underbrace{0}_{x(t)}, \underbrace{1}_{y(t)}, \underbrace{t}_{z(t)})$, $t \in [0,1]$.

$\Longrightarrow x'(t) = y'(t) = 0$, $z'(t) = 1$, $\forall t \in [0,1]$

$\Longrightarrow \int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_0^1 (-1)\, dt = \underline{-1}$.

Άρα, $\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = -1/6 - 1 = -7/6$.

# Επικαμπύλιο ολοκλ. ανεξάρτητο του δρόμου.

**Ορισμός ΙΙ.2:** Ένα διαν. πεδίο $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega$ ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^3$) λέγεται συντηρητικό αν $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης $C^1$ με $\vec{F} = \nabla f$.

**Πρόταση ΙΙ.3:** Έστω $\vec{F} = \nabla f$ συντηρητικό $: \Omega \to \mathbb{R}^3$ κ' $\gamma : [a, b] \to \Omega$ τμημ. λεία καμπύλη. Τότε

$$\int_\gamma \vec{F} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

**Πόρισμα ΙΙ.4:** Έστω $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ συντηρητικό. Τότε, $\forall \gamma$ κλειστή τμημ. λεία καμπύλη του $\Omega$ ισχύει

$$\int_\gamma \vec{F} = 0.$$

<u>Πόρισμα ΙΙ.5:</u> Έστω $\vec{F}:\Omega \to \mathbb{R}^3$ συντηρητικό κ' $\gamma, \tilde{\gamma}$ τμημ. λείες καμπύλες του $\Omega$ με κοινά άκρα. Τότε,

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F}$$ (ολοκλ. ανεξ. του δρόμου).

<u>Πρόταση ΙΙ.6:</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ <u>ανοικτό συνεκτικό</u> κ' $\vec{F}:\Omega \to \mathbb{R}^3$ συνεχές διαν. πεδίο. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

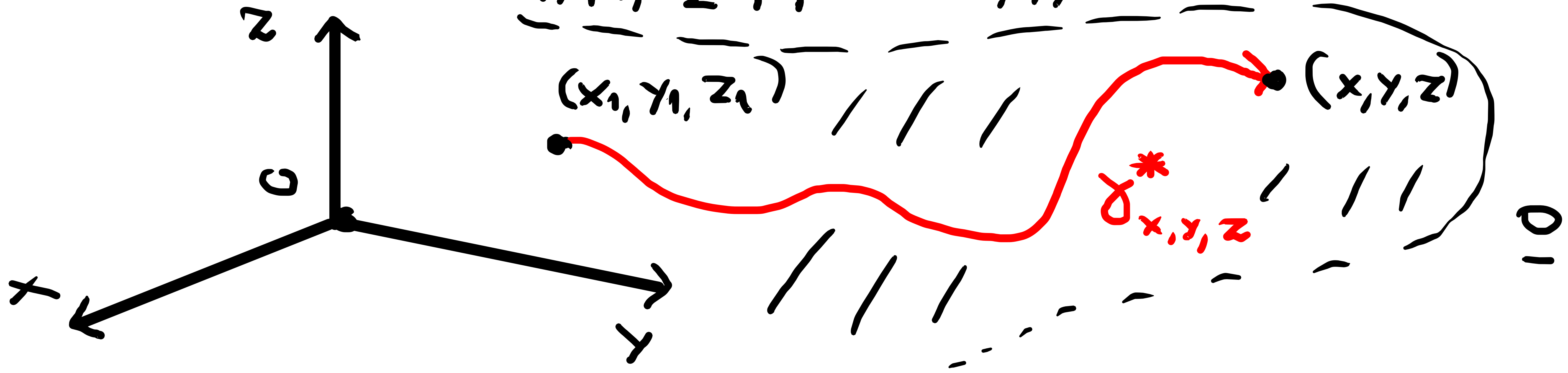
<u>(i)</u> $\vec{F}$ συντηρητικό.

<u>(ii)</u> Το επικαμπ. ολοκλ. της $\vec{F}$ στο $\Omega$ είναι ανεξ. του δρόμου.

Επιπλέον, αν ισχύει μία εκ των (i), (ii) κ' $(x_1, y_1, z_1) \in \Omega$, μια συνάρτηση δυναμικού δίνεται από τη σχέση

$$f(x,y,z) = \int_{\gamma_{x,y,z}} \vec{F}, \qquad (x,y,z) \in \Omega,$$

όπου $\gamma_{x,y,z}$ <u>οποιαδήποτε</u> καμπύλη που συνδέει τα $(x_1, y_1, z_1)$, $(x, y, z)$.



**Ορισμός ΙΙ.7:** Έστω $\vec{F} = (P, Q, R) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ κλάσης $C^1$ (δηλ. $P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης $C^1$) κ' $\Omega$ ανοικτό.

<u>Στροβιλισμός του $\vec{F}$</u> είναι η συνάρτηση

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

με

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y\right).$$

Το $\vec{F}$ λέγεται <u>αστρόβιλο</u> στο $\Omega$ αν $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ στο $\Omega$.

**Πρόταση II.8:** Εάν $\vec{F} = (P, Q, R) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ κλάσης $C^1$ συντηρητικό. Τότε, $\vec{F}$ αστρόβιλο στο $\Omega$.

**Απόδειξη:** $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης $C^1$ με $\nabla f = \vec{F}$

$\Rightarrow f_x = P,\ f_y = Q,\ f_z = R \xRightarrow[\text{κλάσης } C^1]{[P, Q, R} f$ κλάσης $C^2$ στο $\Omega$. $]$

Επομένως,

$\underline{R_y = f_{zy} = f_{yz} = Q_z}$, $\underline{P_z = f_{xz} = f_{zx} = R_x}$,

$\underline{Q_x = f_{yx} = f_{xy} = P_y} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ στο $\Omega$. $\boxtimes$

<u>Σχόλιο</u>: Το αντίστροφο της Πρότασης II.8 δεν ισχύει γενικά.

<u>Π.χ.</u> $P = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $R=0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = \Omega$,

$\vec{F} = (P, Q, R) : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

$P_y = Q_x$, $R_y = Q_z = 0$, $P_z = R_x = 0 \Rightarrow \vec{F}$ αστρόβιλο στο $\Omega$.

Εάν $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, τότε $\gamma$ κλειστή λεία

κι' $\int_\gamma \vec{F} = 2\pi \neq 0 \xRightarrow{[\text{Πόρισμα II.4}]} \vec{F}$ μη συντηρητικό.

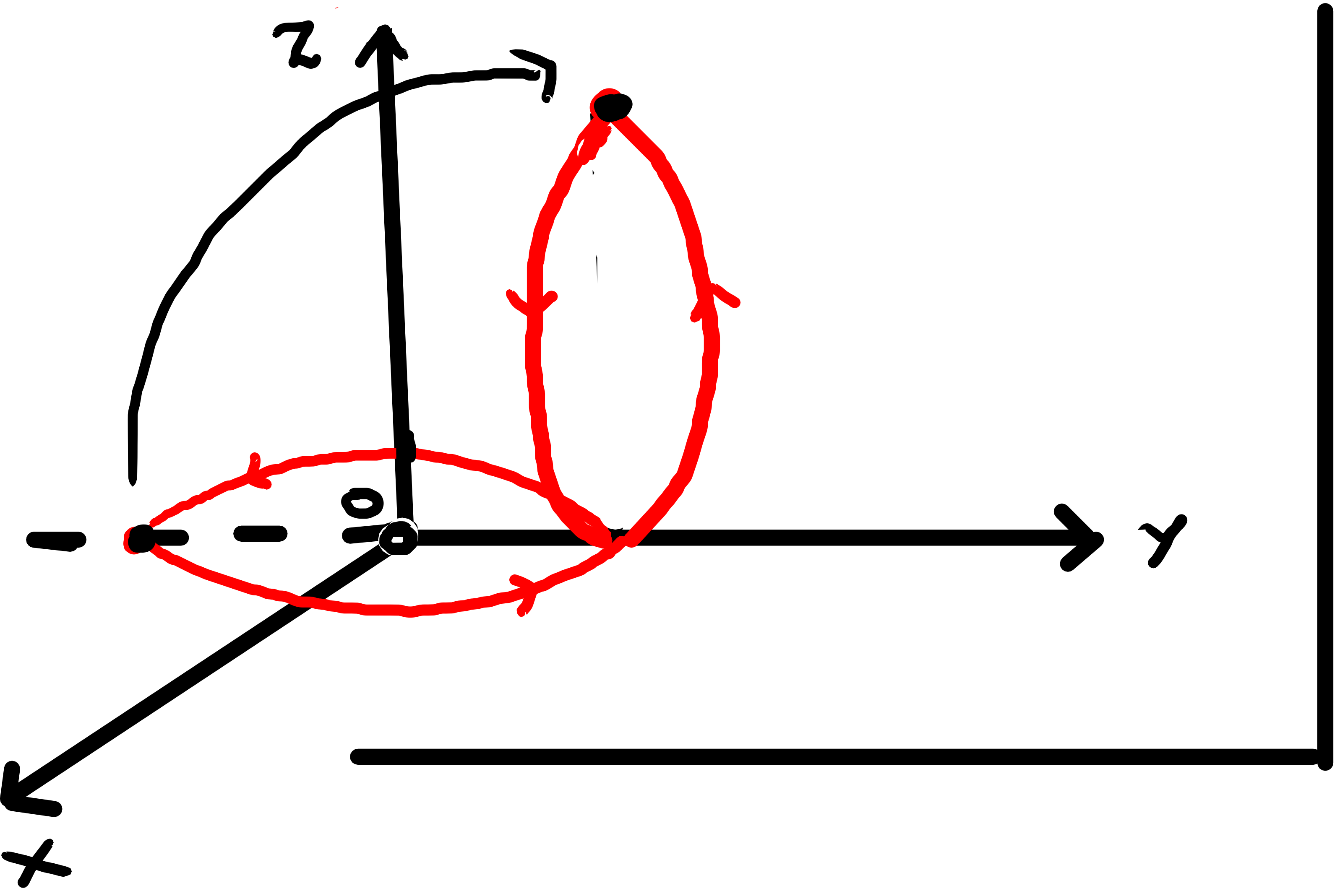
Το αντίστροφο της Πρότ. II.8 ισχύει <u>για απλώς συνεκτικά πεδία στον $\mathbb{R}^3$.</u>

**Ορισμός ΙΙ.9:** Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό, συνεκτικό. Το $\Omega$ λέγεται **απλά συνεκτικό** ανν κάθε απλή κλειστή τμημ. λεία καμπύλη του $\Omega$ μπορεί να "συρρικνωθεί" με "συνεχή" τρόπο σε σημείο, παραμένοντας μέσα στο $\Omega$ (καμπύλη ομότοπη με σημείο).

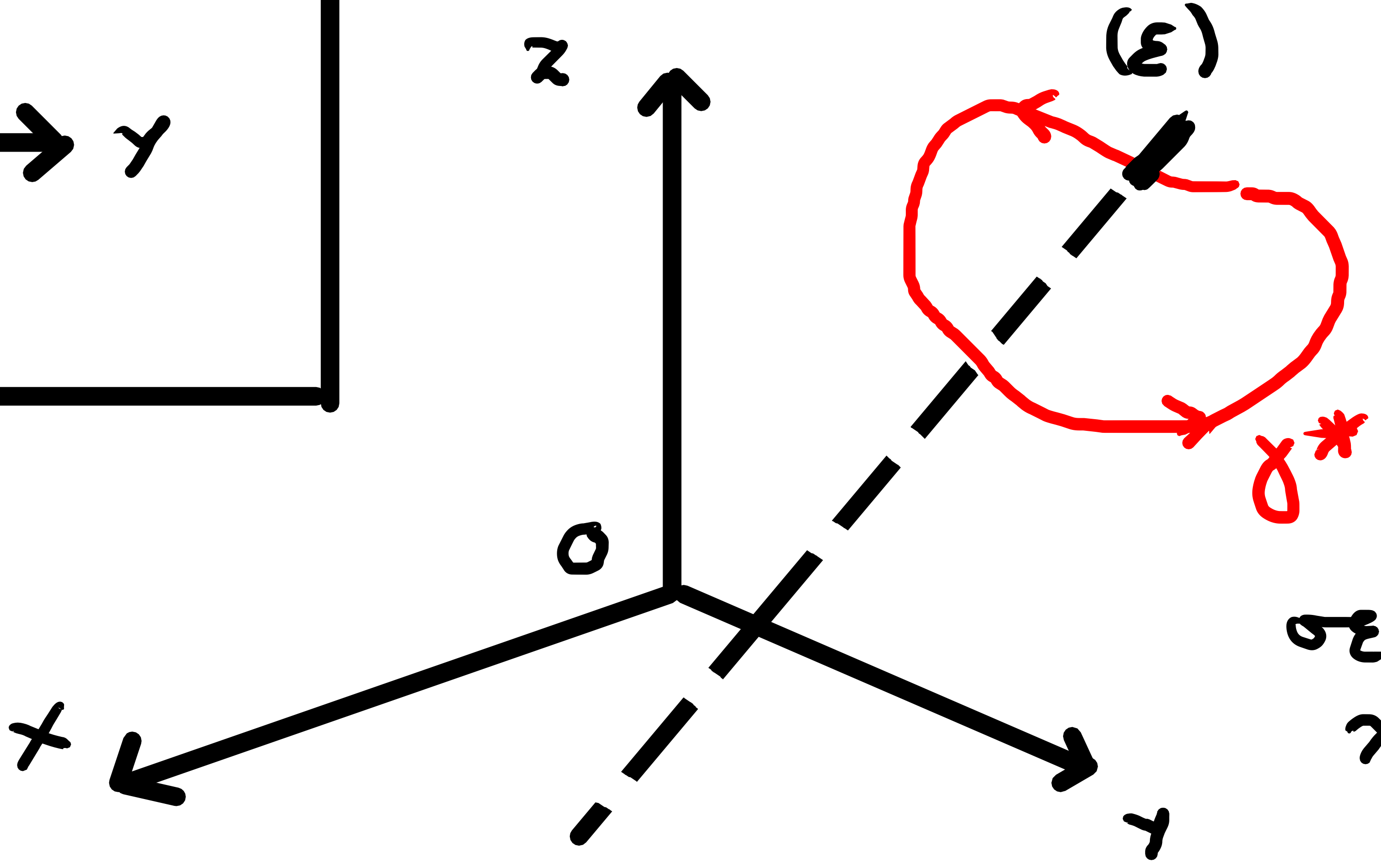
**Παραδείγματα:**

**(i)** Το $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ είναι απλά συνεκτικό.

Π.χ. αν θεωρήσουμε τον κύκλο $x^2+y^2=1$ στο $xy$-επίπεδο, στρέφουμε τον κύκλο κατά $90^\circ$ ώστε να γίνει παράλληλος στο $xz$-επίπεδο (χωρίς παραμόρφωση). Ο νέος κύκλος μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο.



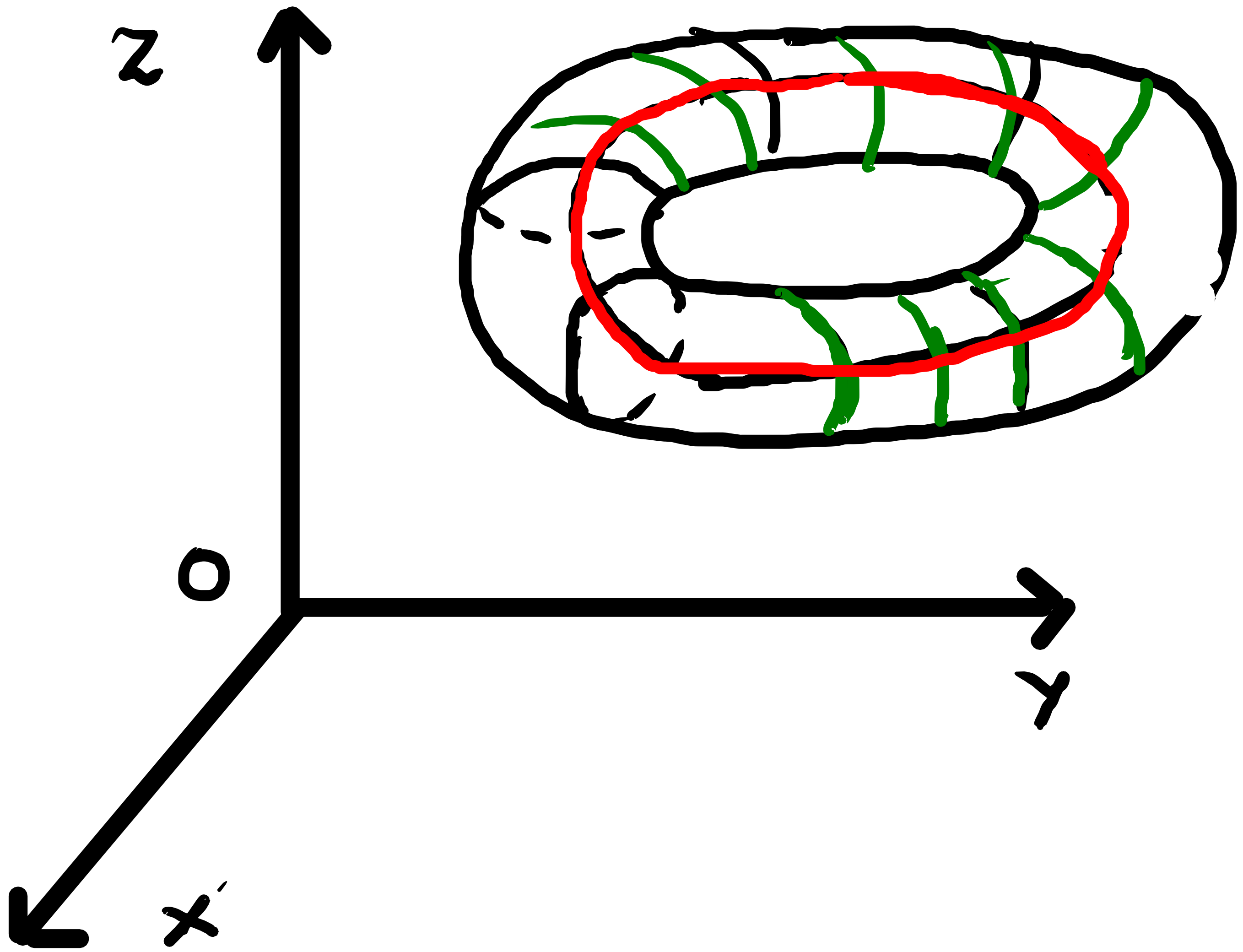

<u>(ii)</u> Αν εξαιρέσουμε μια ευθεία από τον $\mathbb{R}^3$, προκύπτει χωρίο <u>μη</u> απλώς συνεκτικό.




Το $\gamma^*$ δεν μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο χωρίς να "κόψει" την ευθεία (ε).

**(iii)** Κάθε ανοικτό κυρτό είναι απλώς συνεκτικό.

**(iv)** Η "σαμπρέλα" **δεν** είναι απλώς συνεκτικό



**Θεώρημα 2.10:** Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ απλά συνεκτικό κ' $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ διαν. πεδίο κλάσης $C^1$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $\vec{F}$ συντηρητικό στο $\Omega$

(ii) $\vec{F}$ αστρόβιλο (δηλ. $rot\vec{F} = \vec{0}$) στο $\Omega$

(iii) Το επικαμπ. ολοκλ. της $\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου.

**Σχόλιο:**

→ Η (i) ⇔ (iii) ισχύει για $\Omega$ ανοικτό συνεκτικό (όχι κατ' ανάγκη απλώς συνεκτικό).

→ Η (i) ⇒ (ii) ισχύει για τυχαίο ανοικτό $\Omega$.

Δηλ. η υπόθεση "απλά συνεκτικό" χρειάζεται μόνο για την

(ii) ⇒ (i).

__Παράδειγμα:__ Έστω $\vec{F}=(P,Q,R):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με

$$P=yz^2\cos(xy)+2xy,\quad Q=xz^2\cos(xy)+x^2+z,\quad R=2z\sin(xy)+y+2z.$$

__(i)__ Να δ.ο. $\vec{F}$ συντηρητικό.

__(ii)__ Να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για την $\vec{F}$.

__(iii)__ Να υπολογίσετε το $\int_{\vec{K\Lambda}} \vec{F}$, όπου $K(1,1,0)$, $\Lambda(1,2,1)$.

__Λύση:__

__(i)__

$$\left.\begin{aligned} P_y &= z^2[\cos(xy)-xy\sin(xy)]+2x,\\ Q_x &= z^2[\cos(xy)-xy\sin(xy)]+2x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underline{P_y=Q_x}.$$

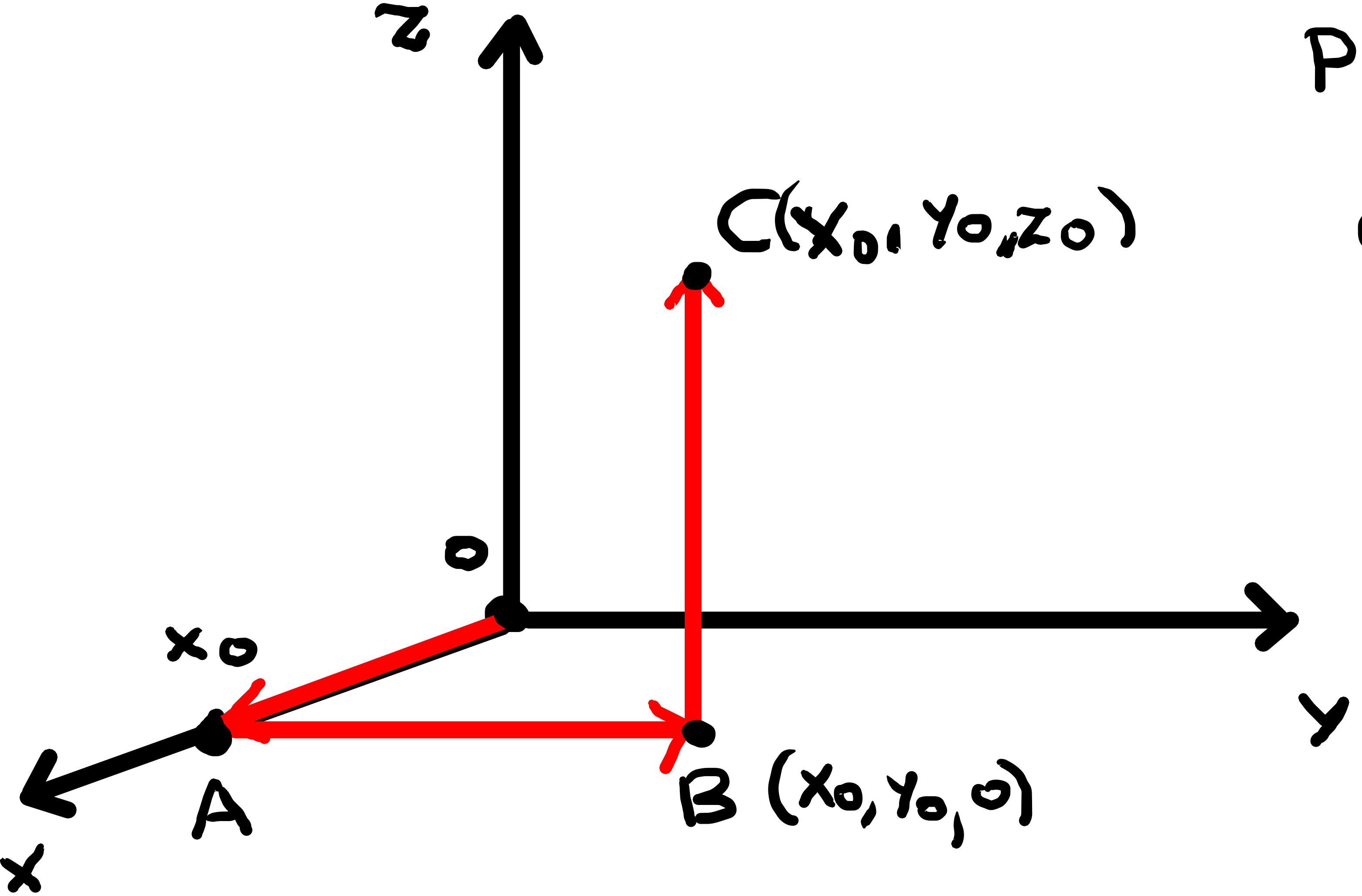
$$\left.\begin{aligned} P_z &= 2zy\cos(xy) \\ R_x &= 2zy\cos(xy) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{P_z = R_x}.$$

$$\left.\begin{aligned} Q_z &= 2xz\cos(xy)+1 \\ R_y &= 2xz\cos(xy)+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{Q_z = R_y}$$

Έπεται ότι $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$.

<u>(ii)</u> Έστω $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε την τεθλασμένη γραμμή $\gamma = OABC$, όπου $A(x_0, 0, 0)$, $B(x_0, y_0, 0)$, $C(x_0, y_0, z_0)$.

. .




$P = yz^2\cos(xy) + 2xy,$

$Q = xz^2\cos(xy) + x^2 + z,$

$R = 2z\sin(xy) + y + 2z.$

- Είναι $P = R = 0$, $dy = 0$ στο $\vec{OA}$

$$\Rightarrow \int_{\vec{OA}} \vec{F} = 0.$$

- Για $(x, y, z) \in \vec{AB}$ έχουμε

$z = 0$, $x = x_0 \Rightarrow dx = 0$

κ' $Q(x_0, y, 0) = x_0^2$, $\quad R(x_0, y, 0) = 0$, $\quad 0 \le y \le y_0$

$$\Rightarrow \int_{\vec{AB}} \vec{F} = \int_0^{y_0} x_0^2\, dy = x_0^2 y_0.$$

• Για $(x,y,z)\in\overrightarrow{BC}$, έχουμε $x=x_0$, $y=y_0 \Rightarrow dx=dy=0$ κ'

$0\leq z\leq z_0$, οπότε

$$\int_{\overrightarrow{BC}}\vec{F} = \int_0^{z_0}\left[2z\sin(x_0y_0)+y_0+2z\right]dz = \underline{z_0^2\left[\sin(x_0y_0)+1\right]+}$$

$$\underline{+\,y_0z_0}\,.$$

Άρα, $\int_\gamma \vec{F} = 0 + x_0^2y_0 + z_0^2\left[\sin(x_0y_0)+1\right]+y_0z_0$

$\Rightarrow$ μια συνάρτηση δυναμικού είναι

$$f(x,y,z) = x^2y + z^2\left[\sin(xy)+1\right]+yz,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

---

<u>(iii)</u> $\int_{\overrightarrow{K\Lambda}}\vec{F} = f(1,2,1)-f(1,1,0) = \sin 2 + 4.$

## Επιπλέον παραδείγματα

(1) Να δ.ο. το $\vec{F} = (e^x\cos y + yz,\ xz - e^x\sin y,\ xy + z)$ είναι συντηρητικό κ' να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού.

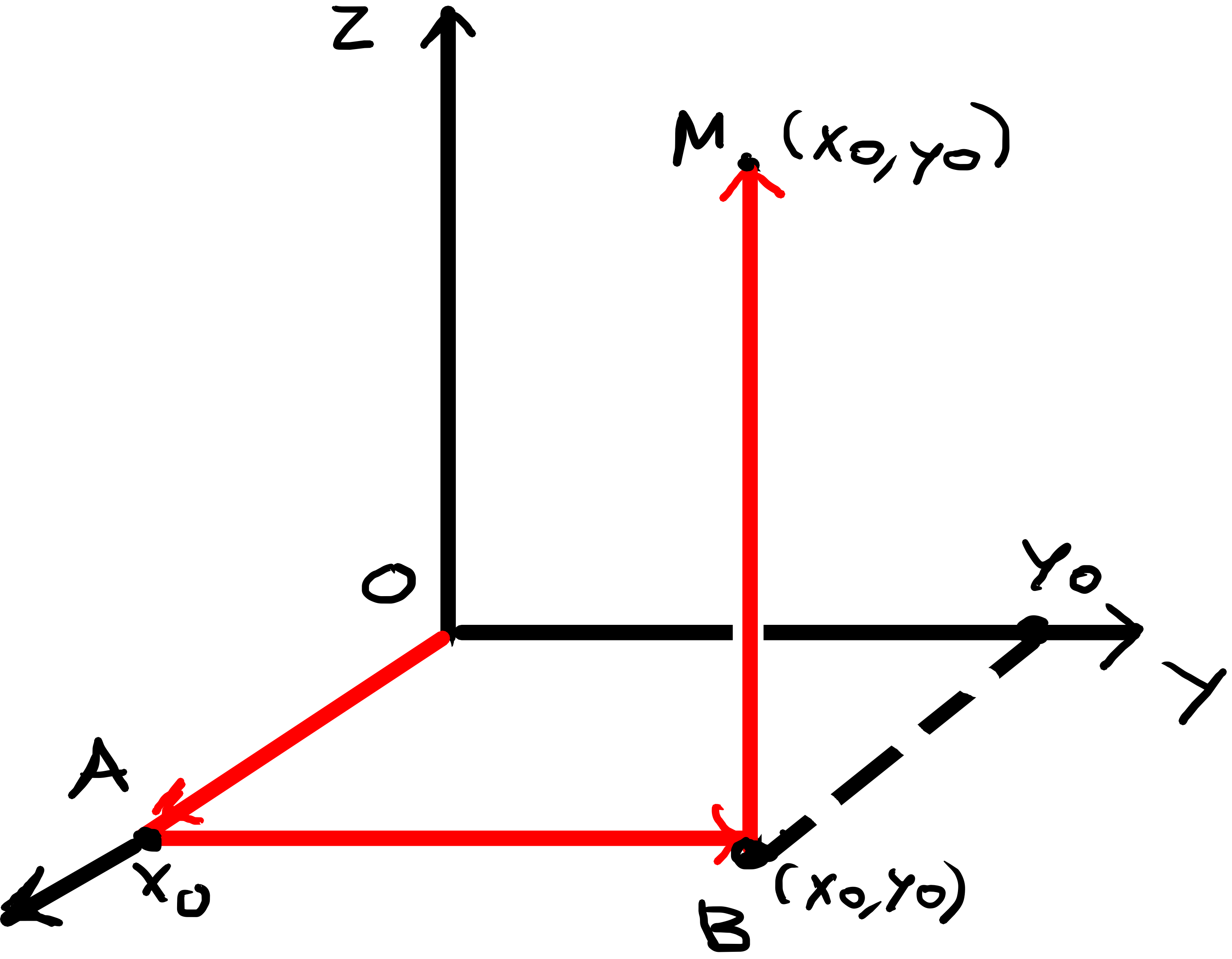
**Λύση:** $P = e^x\cos y + yz$, $Q = xz - e^x\sin y$, $R = xy + z$.

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$$

$$= (x - x,\ y - y,\ z - e^x\sin y - (-e^x\sin y + z))$$

$$= (0, 0, 0)$$

$\Rightarrow$ $\vec{F}$ συντηρητικό.




Έστω $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.
Εάν
$A(x_0, 0, 0)$, $B(x_0, y_0)$, θεωρούμε

την τεθλ. γραμμή

$\gamma = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BM}$. Τότε,

$$\int_{\vec{OA}} \vec{F} = \int_0^{x_0} P(x, 0, 0)\, dx =$$

$$= \int_0^{x_0} e^x\, dx = e^{x_0} - 1,$$

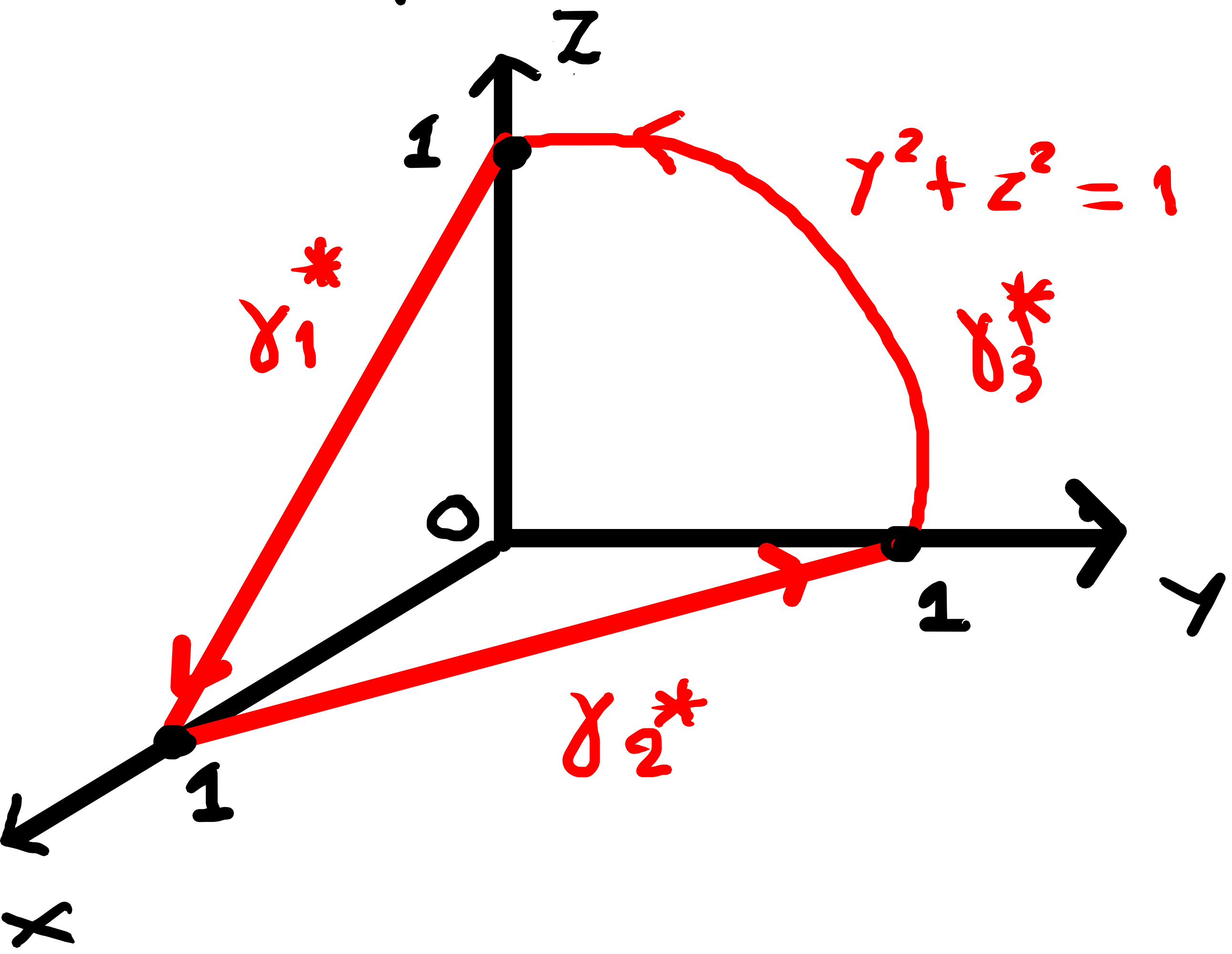
$$\int_{\vec{AB}} \vec{F} = \int_0^{y_0} Q(x_0, y, 0)\, dy = -e^{x_0} \int_0^{y_0} \sin y\, dy = e^{x_0}(\cos y - 1),$$

$$\int_{\overrightarrow{AM}} \vec{F} = \int_0^{z_0} R(x_0, y_0, z)\, dz = \int_0^{z_0} (x_0 y_0 + z)\, dz = x_0 y_0 z_0 + z_0^2/2 .$$

Άρα,
$$\int_\gamma \vec{F} = e^{x_0} - 1 + e^{x_0}(\cos y_0 - 1) + x_0 y_0 z_0 + z_0^2/2$$
$$= e^{x_0} \cos y_0 + x_0 y_0 z_0 + z_0^2/2 - 1 .$$

Οπότε, μια συνάρτηση δυναμικού είναι η
$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + z^2/2, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

(2) $\int_\gamma x^2dx + y^2dy + z^2dz = ?$ όπου $\gamma$ η καμπύλη του σχήματος




Λύση: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

• Για $(x,y,z) \in \gamma_1^*$, είναι $y=0$

κ' $x+z=1 \Leftrightarrow z = 1-x, \; x\in[0,1]$

$\Rightarrow dz = -dx$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} (x^2dx + y^2dy + z^2dz) =$$

$$= \int_0^1 x^2dx + (1-x)^2(-dx) =$$

$$= \int_0^1 \left[ x^2 - (1-x)^2 \right] dx = \int_0^1 (2x-1)\, dx = x^2 \Big|_0^1 - 1 = 0.$$

• Για $(x,y,z) \in \gamma_2^*$, είναι $z=0$, $x+y=1 \Leftrightarrow y = 1-x$

$\Rightarrow dy = -dx$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} (x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz) = \int_1^0 x^2 dx + (1-x)^2 (-dx) = 0$$

• Για $(x,y,z) \in \gamma_3^*$, είναι $x=0$, $y^2+z^2=1 \Leftrightarrow$

$y = \cos t$, $z = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz = \int_0^{\pi/2} \left[ \cos^2 t(-\sin t) + \sin^2 t \cos t \right] dt$$

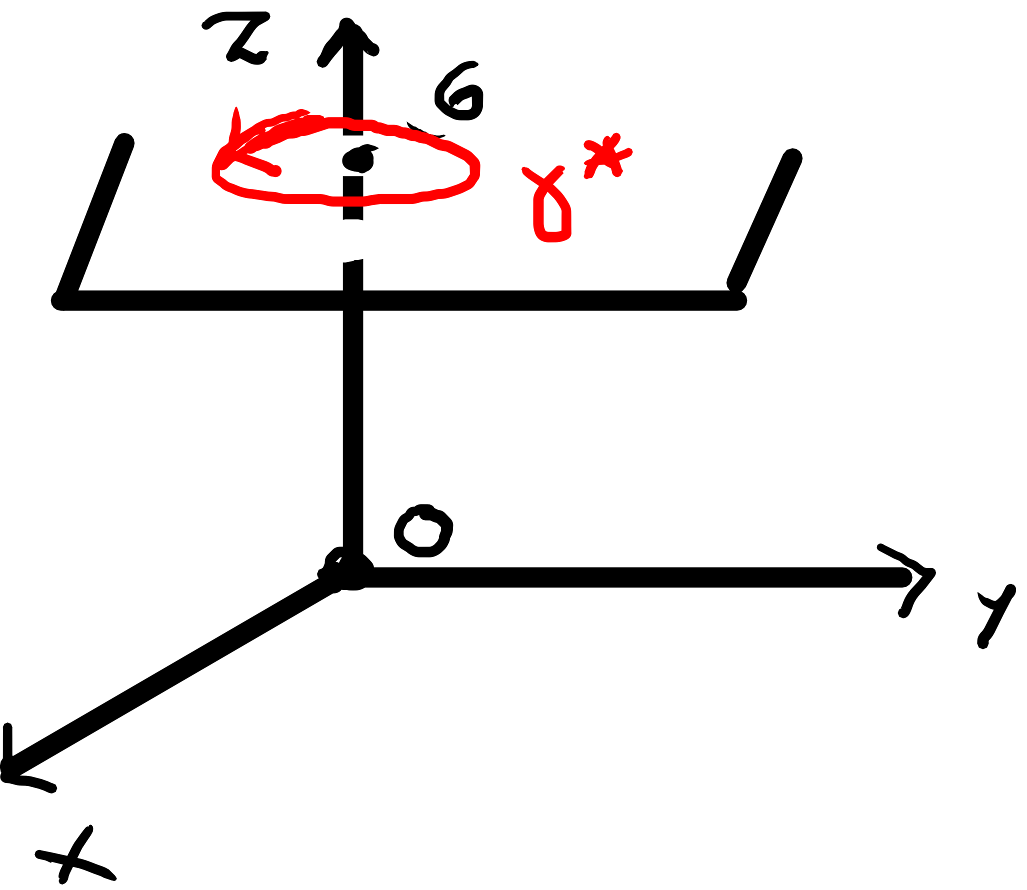
$$= -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \, dt + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t \, dt$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{3}\sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(0-1) + \frac{1}{3}(1-0) = 0.$$

Άρα, $\int_\gamma x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz = 0 + 0 + 0 = 0.$

(3) $\int_\gamma zy^2\,dx + x^2z^2\,dy + xz\,dz = ?$ όπου $\gamma$ η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια $x^2+y^2=4,\quad z=6$

Λύση: $\gamma(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 6),\quad t\in[0,2\pi]$




Το ολοκλ. γράφεται

$$= \int_\gamma 6y^2\,dx + 36x^2\,dy =$$

$$= 6\left(\int_\gamma y^2\,dx + 6x^2\,dy\right) =$$

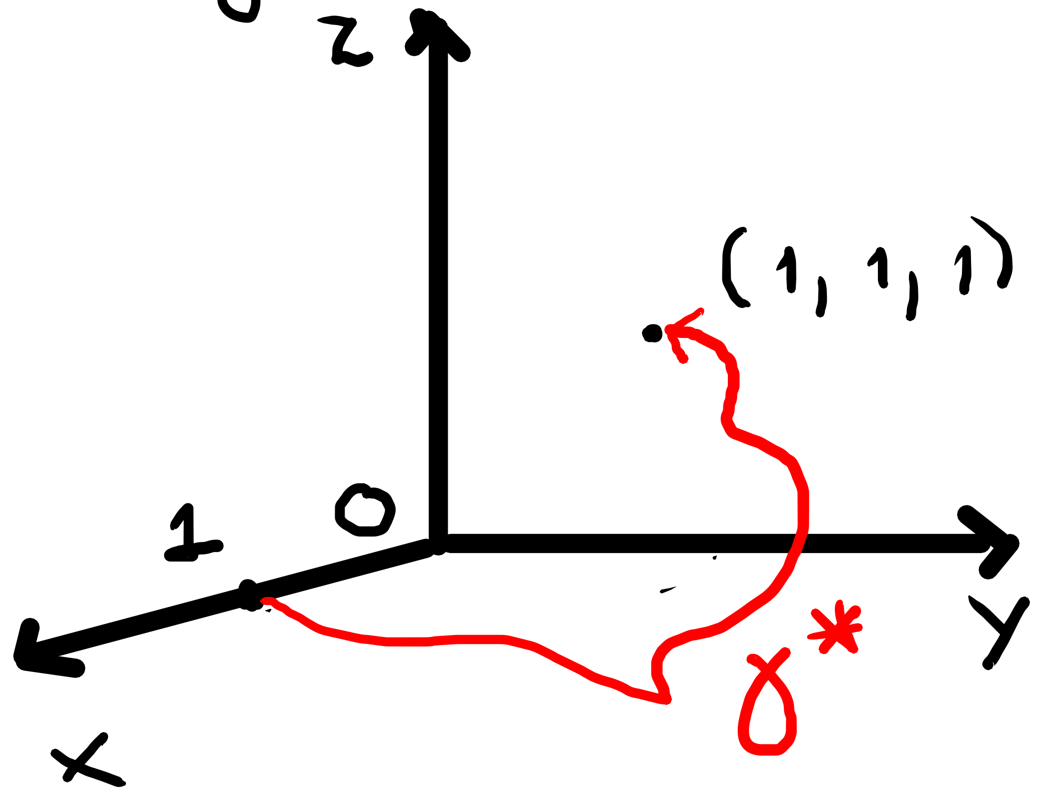
$$= 6\int_0^{2\pi} \left[ 4\sin^2 t(-2\sin t) + 6\cdot 4\cos^2 t\, 2\cos t \right] dt$$

$$= 6\left(-8\int_0^{2\pi} \sin^3 t\, dt + 48\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt\right) = 0, \text{ διότι}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 dt = \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = 0.$$

(4) $\int_\gamma \vec{F} = ?$, όπου $\vec{F} = \left(-\frac{x}{g^{3/2}}, -\frac{y}{g^{3/2}}, -\frac{z}{g^{3/2}}\right)$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

$g = x^2+y^2+z^2$ κ' $\gamma$ η καμπύλη του σχήματος




<u>Λύση:</u> Παρατηρούμε ότι $\vec{F} = \nabla f$,

όπου $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$,

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{F} = f(1,1,1) - f(1,0,0)$$

$$= 3^{-1/2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1.$$