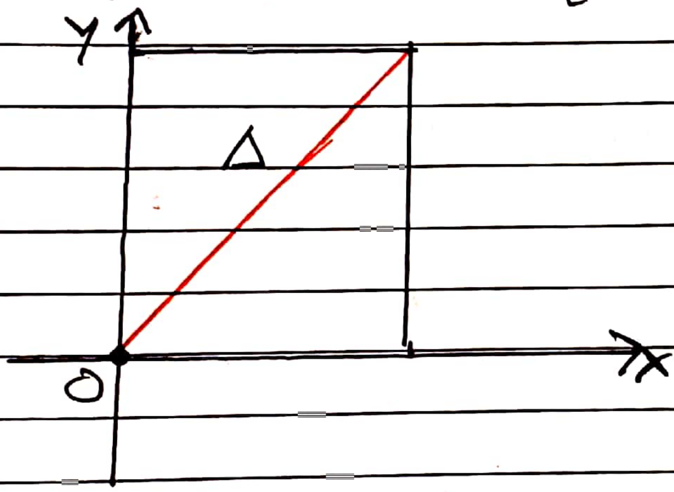
2. ΣΥΝΟΛΑ ΜΕΤΡΟΥ 0 — Θ. LEBESGUE ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ.

<u>Παράδειγμα:</u> $T = [0,1]\times[0,1]$, $f: T \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Α συνέχειες $= \Delta = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$.



"Εμβαδό" $(\Delta) = 0$.

$\Downarrow$

Αναμένεται

η f να είναι ολοκλ. με

$$\iint_T f = \iint_T 1 = 1.$$

Για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε το παρακάτω

<u>Λήμμα 2.1.</u> Έστω T ορθογώνιο, $f: T \to \mathbb{R}$ φραγμένη κ' $P^{(n)}$, $n \geq 1$ ακολουθία διαμερίσεων με

$$\lim_n \left[U(f, P^{(n)}) - L(f, P^{(n)}) \right] = 0.$$

Τότε, f ολοκληρώσιμη και

$$\iint_T f = \lim_n U(f, P^{(n)})$$
$$= \lim_n L(f, P^{(n)}).$$

Απόδειξη: $\forall\, n \geq 1$,

$$L(f, P^{(n)}) \leq \overbrace{L\text{-}\iint_T f}^{A} \leq \overbrace{U\text{-}\iint_T f}^{B} \leq$$
$$\leq U(f, P^{(n)})$$

$$\Rightarrow 0 \leq A - L(f, P^{(n)}) \leq B - L(f, P^{(n)})$$
$$\leq U(f, P^{(n)}) -$$
$$- L(f, P^{(n)})$$

(Κριτ. $\Rightarrow$ παρεμβ.) $$\lim_n L(f, P^{(n)}) = A = B$$

$\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη κ'

$$\iint_T f = \lim_n L(f, P^{(n)}) = \lim_n U(f, P^{(n)}).$$

$\boxtimes$

Επιστρέφουμε στη συνάρτηση f του Παραδείγματος, δηλ. $f: T=[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$

με
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

Έστω $n\geq 1$.

Θεωρούμε τη διαμέριση
$$P^{(n)}=\{T_{ij}^{(n)} \mid 1\leq i,j\leq n\}$$

με
$$T_{ij}^{(n)}=\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right],$$
$$1\leq i,j\leq n.$$

Προφανώς, $\forall i,j$, $\quad T_{ij}^{(n)}\not\subset\Delta.$

$\Rightarrow \exists (x,y)\in T_{ij}^{(n)}$ με $x\neq y$

$$\Rightarrow \sup_{T_{ij}^{(n)}} f=1$$

$$\Rightarrow \boxed{U(f,P^{(n)})=\sum_{1\leq i,j\leq n}|T_{ij}^{(n)}|= =|T|=1.}$$

Θέτουμε
$$J = \{(i,j) \mid T_{ij}^{(n)} \cap \Delta \neq \emptyset\}$$

$$\Rightarrow \inf_{T_{ij}^{(n)}} f = \begin{cases} 0, & (i,j) \in J \\ 1, & (i,j) \notin J \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(f, P^{(n)}) - L(f, P^{(n)}) =$$

$$= \sum_{i,j} |T_{ij}^{(n)}| \cdot [\overbrace{\sup_{T_{ij}^{(n)}} f}^{1} - \inf_{T_{ij}^{(n)}} f]$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{(i,j) \in J} 1 = \frac{1}{n^2} \text{πληθάριθμος}(J).$$

Έστω $(i,j) \in J \Rightarrow \exists x \in [0,1] \mid$
$$(x,x) \in T_{ij}^{(n)} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$$

$$\Rightarrow i-1 \leq j \text{ και } j-1 \leq i$$

$$\Rightarrow |i-j| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \underline{i=j} \\ \text{ή } \underline{i=j+1} \\ \text{ή } \underline{j=i+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = \{(i,i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup$$
$$\{(j+1,j) \mid 1 \leq j \leq n-1\} \cup$$
$$\{(i,i+1) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$$

$$\Rightarrow \#(J) = n + n-1 + n-1 = 3n-2$$

$$\Rightarrow U(f,P^{(n)}) - L(f,P^{(n)}) = \frac{3n-2}{n^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

(Λήμμα 2.1) $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη 5'

$$\iint_I f = \lim_n U(f,P^{(n)}) = 1.$$

Ερωτήματα:

- Εάν μια συνάρτηση $f: T \to \mathbb{R}$ (φραγμένη) έχει ασυνέχειες "εμβαδού" $=0$, είναι ολοκληρώσιμη;
- Πώς ορίζεται η έννοια "συνόλου εμβαδού 0";

Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι ασυνέχειες της f είναι το
$\Delta = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$.

Παρατηρούμε ότι $\forall n \geq 1$,

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} T_{ii}^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \right)$$

κ' $$\sum_{i=1}^{n} \left| T_{ii}^{(n)} \right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Δηλ. το Δ μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων με συνολικό εμβαδό "αυθαίρετα μικρό"!

<u>Ορισμός 2.2.</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$. Θα λέμε ότι το A <u>έχει μέτρο 0</u> ανν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ ακολουθία ορθογωνίων $\{T^{(n)}\}_{n \geq 1}$ ώστε

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{(n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |T^{(n)}| < \varepsilon.$$

<u>Παραδείγματα:</u>

<u>(i)</u> Κάθε το πολύ αριθμήσιμο $\subset \mathbb{R}^2$ έχει μέτρο 0.

Πράγματι· έστω $A = \{(x_n, y_n) : n \geq 1\}$.
Έστω $\varepsilon > 0$.
Θέτουμε

$$T^{(n)} = \left[x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}\right] \times [y_n - 1, y_n + 1],$$

$n \geq 1$.

Τότε, $\left|T^{(n)}\right| = \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \cdot 2 = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, n \geq 1,$

κ' $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|T^{(n)}\right| = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

$= \varepsilon/2 < \varepsilon.$

[Ειδικότερα, το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ έχει μέτρο 0.]

(ii) Εάν $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, το $Gr\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in [a,b]\}$ έχει μέτρο 0.

Απόδ: Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ διαμέριση $P = \{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$ του $[a,b]$ (σε υποδιαστήματα) ώστε

$$\sum_{i=1}^{k} |I_i| (M_i - m_i) < \varepsilon,$$

όπου $|I_i| =$ μήκος (I_i),

$M_i = \sup_{I_i} \varphi$, $m_i = \inf_{I_i} \varphi$, $1 \leq i \leq k$.

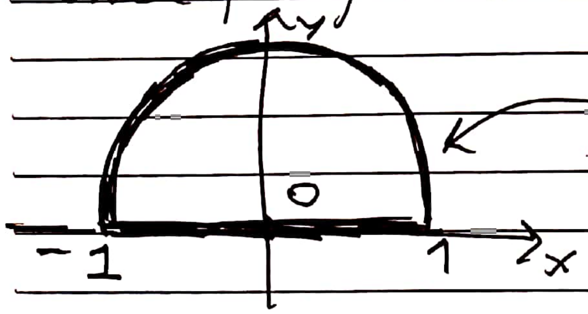
Θέτουμε $T_i = I_i \times [m_i, M_i]$, $1 \leq i \leq k$.

Προφανώς $G_{r\varphi} \subset \bigcup_{i=1}^{k} T_i$

κ' $\sum_{i=1}^{k} |T_i| = \sum_{i=1}^{k} |I_i| (M_i - m_i) < \varepsilon$.

(iii) Κάθε ευθεία ή ευθ. τμήμα στον $\mathbb{R}^2$ έχει μέτρο 0.

(iv) Εάν $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ τμηματικά λεία καμπύλη, το $\gamma^* = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$ έχει μέτρο 0



Π.χ. το ημικύκλιο μαζί με το ευθ. τμήμα έχει μέτρο 0.

<u>Συμβολισμός:</u> Εάν $A \subset \mathbb{R}^2$ μέτρου 0, γράφουμε $|A| = 0$.

<u>Πρόταση 2.3:</u>

<u>(i)</u> Εάν $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$ κ' $|B| = 0$, τότε κ' $|A| = 0$.

<u>(ii)</u> Εάν $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^2$ με $|A_n| = 0$, $n \geq 1$, τότε

$$\left| \bigcup_{n \geq 1} A_n \right| = 0.$$

<u>Απόδειξη:</u> (i) Άμεσο, από τον Ορισμό 2.2.

<u>(ii)</u> Έστω $\varepsilon > 0$. $\forall n \geq 1$, $\exists$ ακολουθία ορθογωνίων $\{T^{n,m}\}_{m \geq 1}$ ώστε

$$A_n \subset \bigcup_{m \geq 1} T^{n,m}$$

$$\sum_{m \geq 1} |T^{n,m}| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Τότε,

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \subset \bigcup_{n,m\geq 1} T^{n,m}$$

κ'

$$\sum_{n,m} |T^{n,m}| = \sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{m\geq 1} |T^{n,m}|\Big)$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

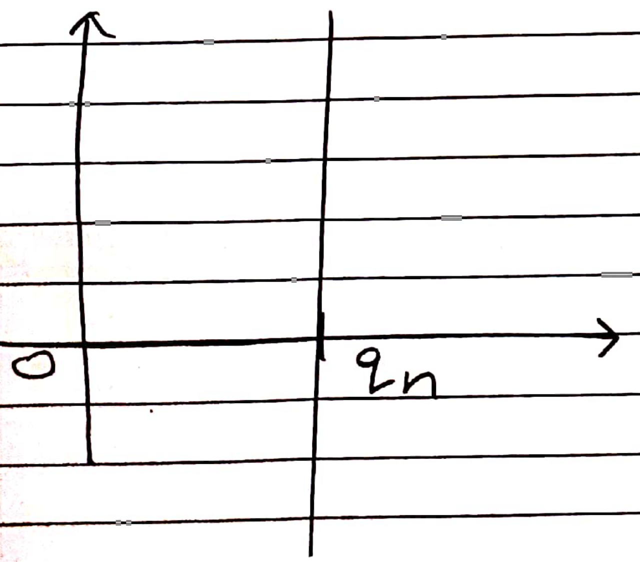
$\boxtimes$

(i) <u>Παραδείγματα:</u> $|\mathbb{Q}\times\mathbb{R}| = 0$.

Πράγματι· έστω $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n\geq 1}$.

Τότε, $$\mathbb{Q}\times\mathbb{R} = \bigcup_{n\geq 1}\underbrace{(\{q_n\}\times\mathbb{R})}_{\text{ευθεία}}$$

↳ μέτρου 0



$\xrightarrow{\text{(Πρότ. 2.3)}}$ $|\mathbb{Q}\times\mathbb{R}| = 0.$

(ii) Εάν $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε

$$|Gr\varphi| = 0.$$

Πράγματι: $$Gr\varphi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{Gr(\varphi|_{[-n,n]})}_{\text{μέτρου } 0}$$

$\overset{(\text{Πρότ. } 2.3)}{\Longrightarrow}$ $|Gr\varphi| = 0.$

Θεώρημα 2.4 (Θ. Lebesgue!):

Έστω $f : T \to \mathbb{R}$ φραγμένη κ'

$$A(f) = \{\xi \in T \mid f \text{ ασυνεχής στο } \xi\}.$$

Τότε, f ολοκληρ. ανν $|A(f)| = 0.$

Θεώρημα 2.5: Έστω $f, g : T \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\{\xi \in T \mid f(\xi) \neq g(\xi)\}$ έχει μέτρο 0. Τότε

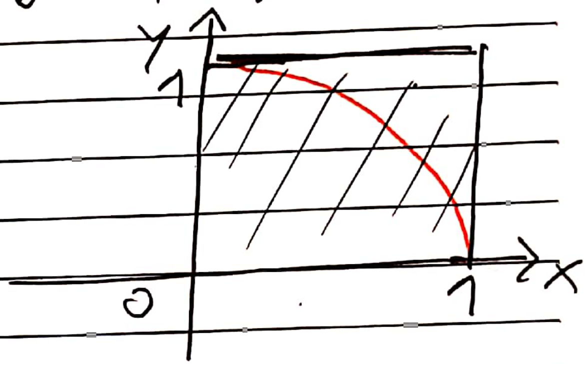
$$\iint_T f = \iint_T g.$$

Παραδείγματα:

(i) $T=[0,1]\times[0,1]$, $f: T\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} x, & x^2+y^2\neq 1 \\ e^{y^3}, & x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$A(f)\subseteq\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ = μέτρου 0
(λεία καμπύλη)



[Θ. Lebesgue] $\Rightarrow$ f ολοκληρ.

Επίσης, $\{(x,y)\mid f(x,y)\neq x\}\subseteq\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$
= μέτρου 0

κ' η $(x,y)\mapsto x$ είναι συνεχής (άρα ολοκλ.) οπότε από Θ. 2.5,

$$\iint_T f=\iint_T x\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^1 x\,dx\right)dy$$

$$=1/2.$$

(ii) $T = [0,1]\times[0,1]$, $f: T \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q} \\ 0, & y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$A(f) = [0,1]\times[0,1]$ (γιατί;)

$\Longrightarrow$ $A(f)$ όχι μέτρου 0

[Θ. Lebesgue] $\Longrightarrow$ η f δεν είναι ολοκλ.

Επίσης, $\{(x,y) \mid f(x,y) \neq 0\} =$

$= \{(x,y) \mid y \in \mathbb{Q}\}$

$= \mathbb{R}\times\mathbb{Q} =$ μέτρου 0.

Το παράδειγμα αυτό δηλώνει ότι η υπόθεση "f, g ολοκληρ." στο Θ.2.5 δεν μπορεί να παραλειφθεί.

ΛΥΣΗ ΑΣΚ. 2, ΣΕΛ. 16 $\longrightarrow$

Εάν (x_0,y_0) σημείο <u>συνέχειας</u> της f,

τότε $\quad 2x_0y_0 = y_0$ (γιατί;)

$\Rightarrow \; x_0 = 1/2$ ή $y_0 = 0$.

Τότε,

$$[0, \tfrac{1}{2}] \times (0,1] \subset A(f)$$

$\Rightarrow$ το $A(f)$ <u>δεν</u> έχει μέτρο 0

[Θ. Lebesgue] $\Rightarrow$ η f <u>δεν</u> είναι ολοκληρ.

Παρατηρούμε επίσης, ότι $\forall\, y \in [0,1]$,

η $\quad x \mapsto f(x,y)$ είναι συνεχής κ'

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = y \quad \text{(γιατί;)}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dx \right] dy = 1/2$$

δηλ. παρ' όλο που η f δεν είναι ολοκλ.

το ένα επάλληλο ολοκλ. υπάρχει.

Ασκήσεις:

(1) $T=[0,1]\times[0,1]$,

$f: T \to \mathbb{R}$ με
$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & x=\frac{1}{2} \text{ κ' } y\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αλλά η $y \mapsto f(\frac{1}{2},y)$ όχι.

(2) $T=[0,1]\times[0,1]$, $f: T\to\mathbb{R}$,
$$f(x,y)=\begin{cases} 2xy, & y\in\mathbb{Q} \\ y, & y\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι:

(i) Η f δεν είναι ολοκληρ.

(ii) $\displaystyle\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right]dy=\frac{1}{2}.$