1. ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ.

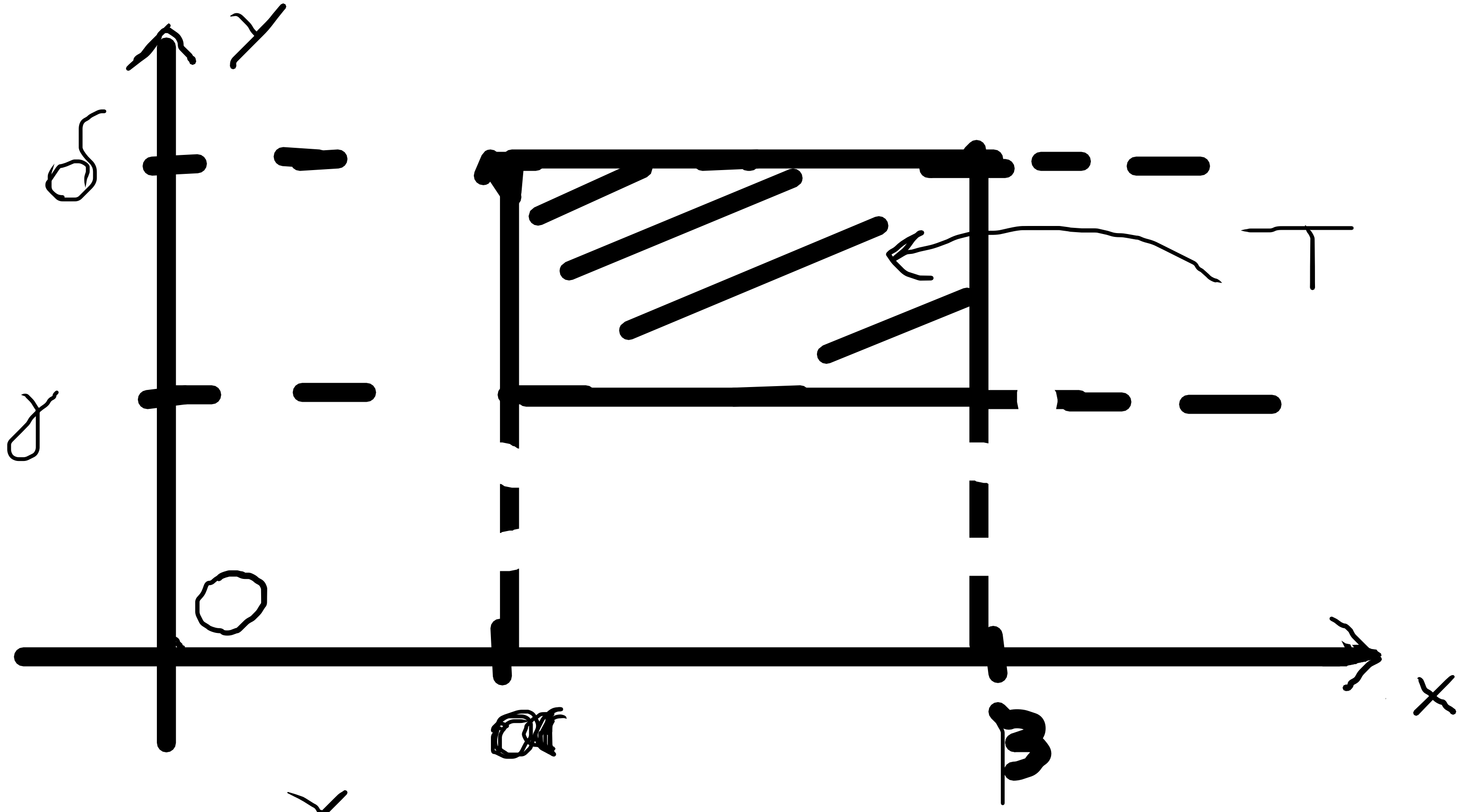
1.1. <u>Ορθογώνιο</u> στον $\mathbb{R}^2$ είναι ένα σύνολο της μορφής

$$T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \quad (\alpha < \beta, \ \gamma < \delta)$$

δηλ.

$$T = \{ (x, y) \mid \alpha \leq x \leq \beta, \quad \gamma \leq y \leq \delta \}$$

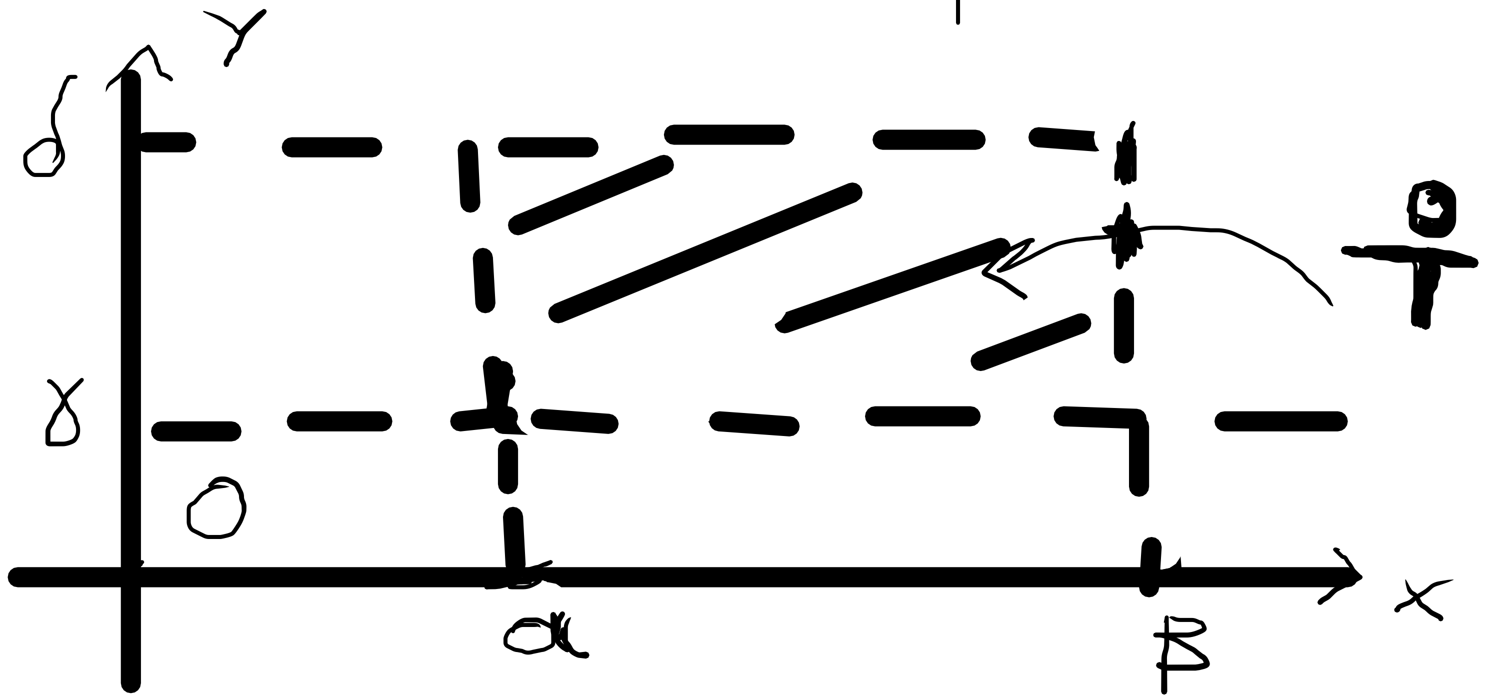
<u>Εσωτερικό</u>$(T) = \mathring{T} = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta).$

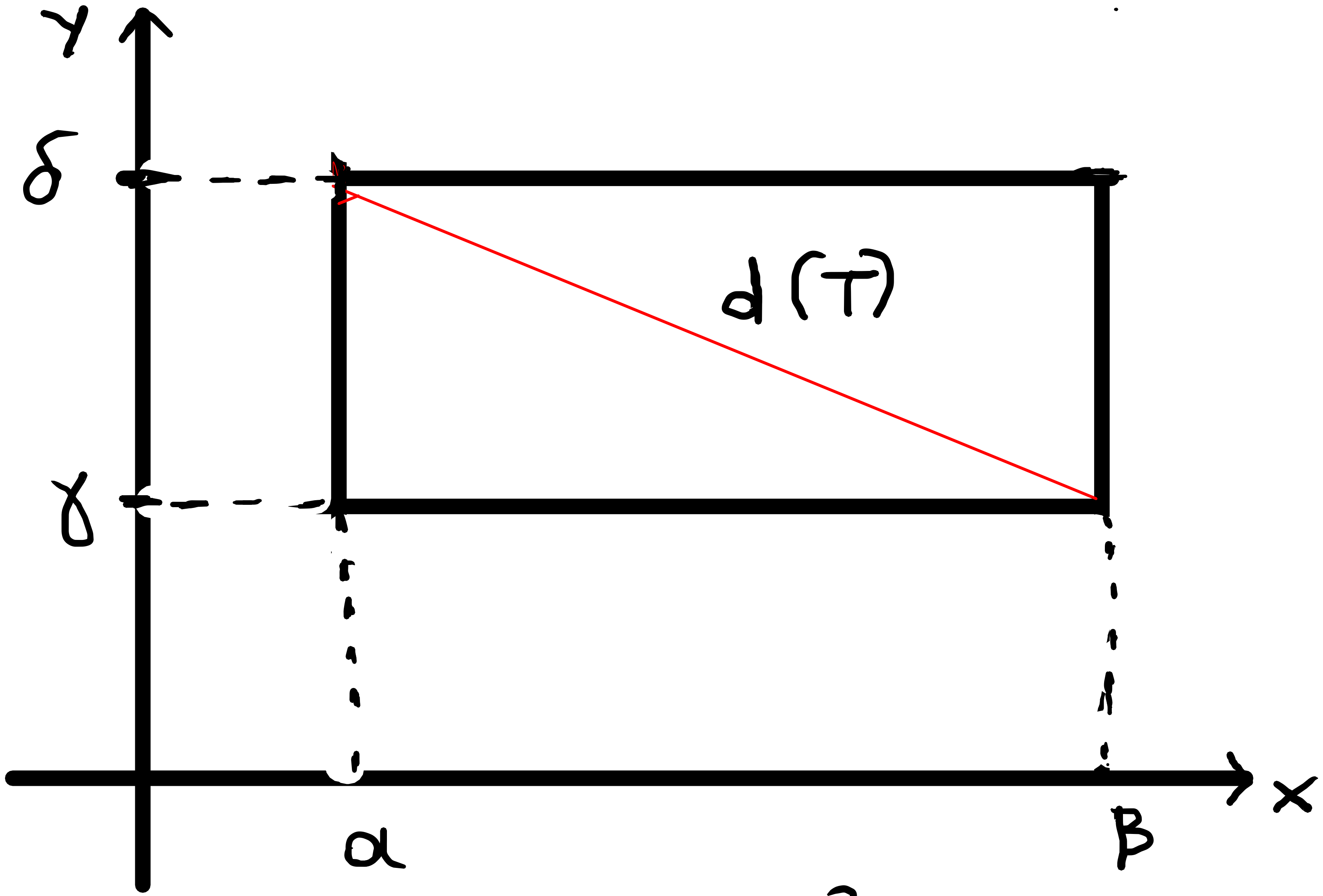


Εμβαδό $(T) =$

$= |T| =$

$= (\beta-\alpha)\cdot(\delta-\gamma).$





$T=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$.

<u>διάμετρος(T)</u> $\doteq$

$= \sup\{\|\xi-\eta\| : \xi,\eta\in T\}$

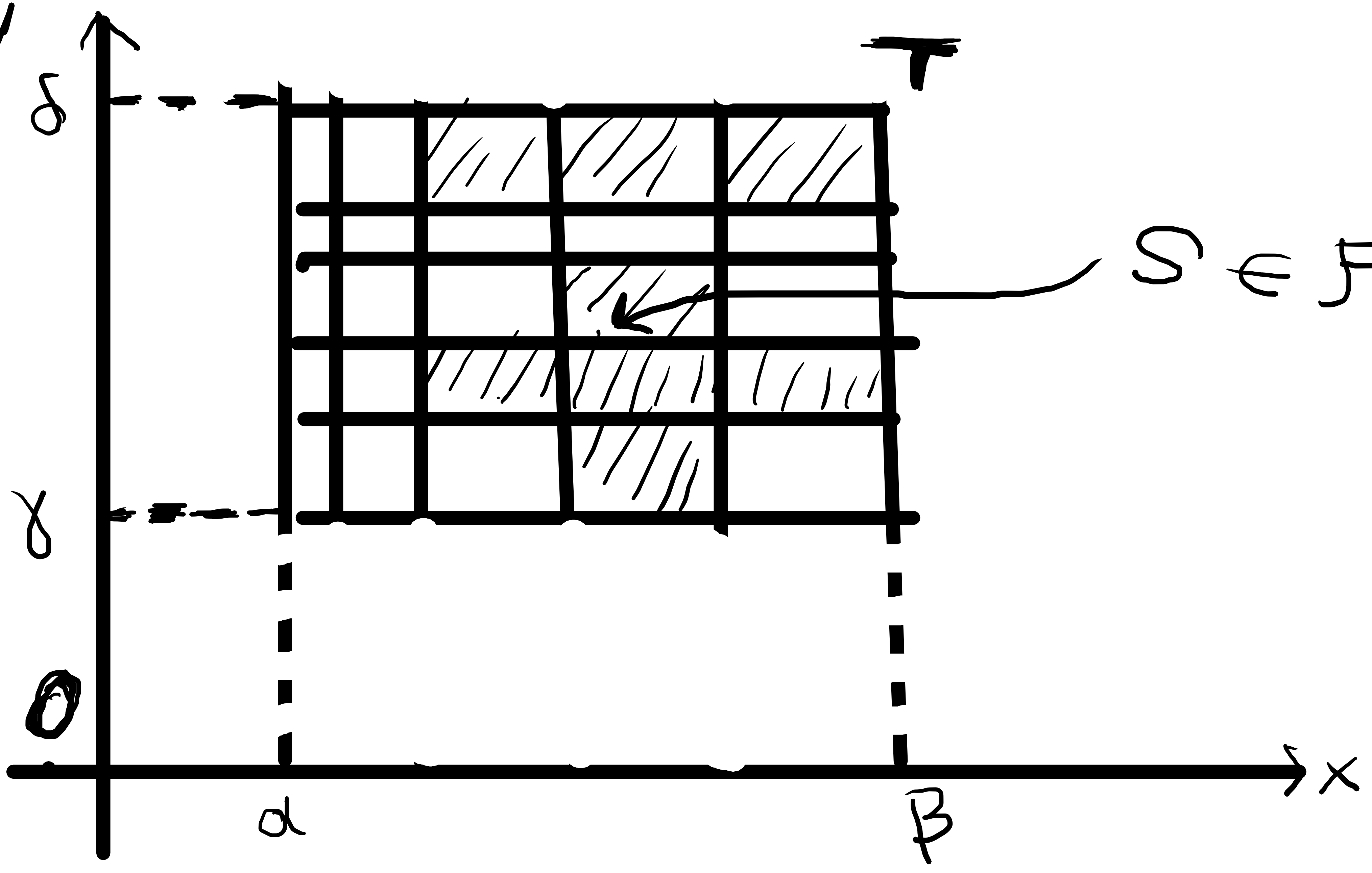
$= d(T)$

$= \sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\delta-\gamma)^2}$.

$\rightarrow \quad |T| \leq \dfrac{d(T)^2}{2}$.

1.2. <u>Διαμέριση</u> ενός ορθογωνίου T είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ορθογωνίων με <u>ξένα ανά δύο εσωτερικά</u> των οποίων <u>η ένωση ισούται με T</u>.

Συμβολ: P_T ή R_T . . .



Ισχύει $\sum_{S \in P} |S| = |T|$.

<u>Παράδειγμα:</u> $T = [0,1] \times [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$T_{ij}^{(n)} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$$

$$1 \leq i, j \leq n.$$

Το $P^{(n)} = \{ T_{ij}^{(n)} \mid 1 \leq i, j \leq n \}$ είναι διαμέριση του T.

Πράγματι:

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \text{, διότι:}$$

$\longrightarrow$ $\forall x \in [0,1)$, θέτω $i = [nx+1] =$

$=$ (ακέραιο μέρος του $nx+1$)

$\Rightarrow i \leq nx+1 < i+1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{i-1}{n} \leq x < \frac{i}{n}}$ κ' $i \leq nx+1 < n+1$

$\Rightarrow \boxed{i \leq n}$

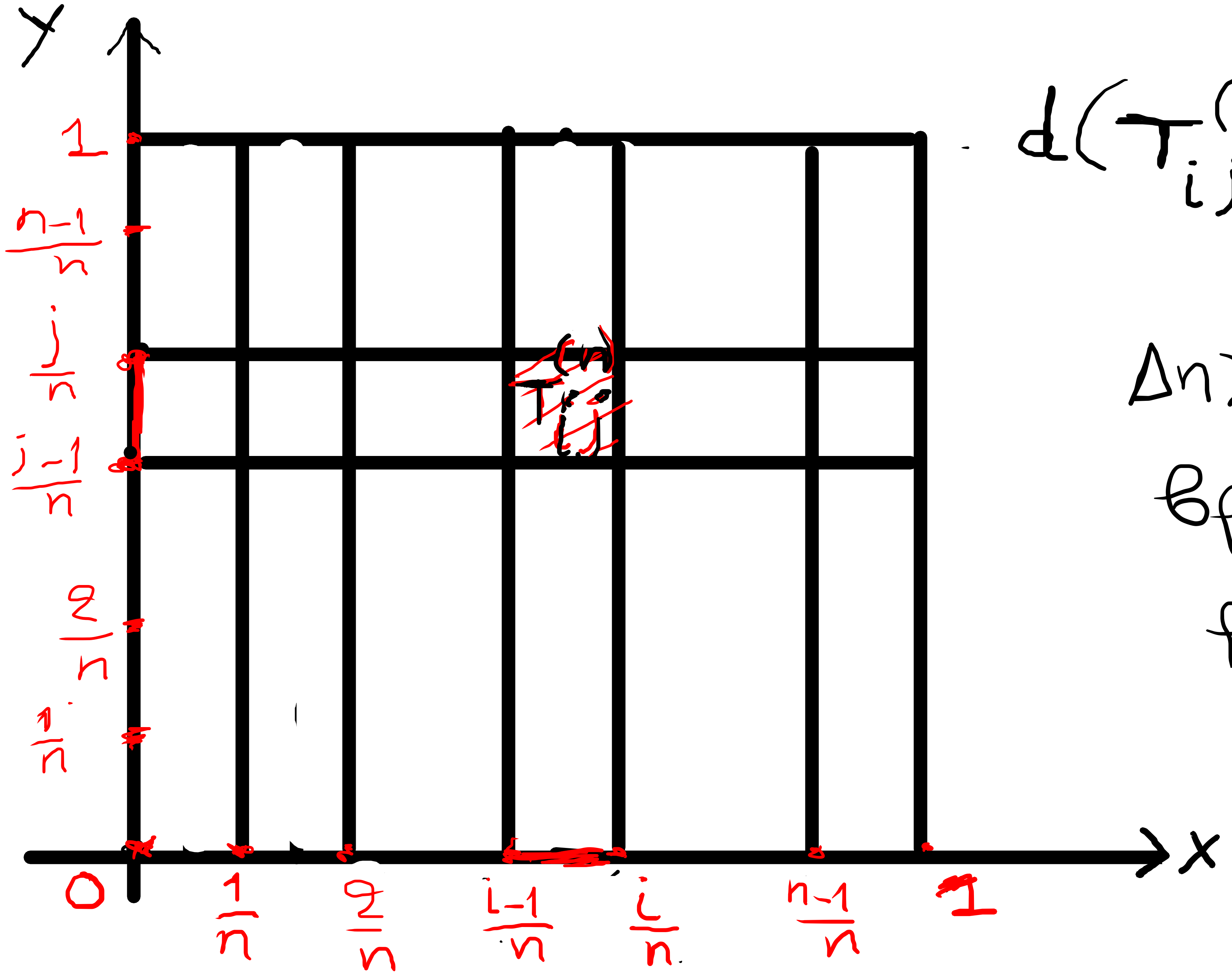
→ Εάν $x=1$, θέτω $i=n$ και

$$\boxed{x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]}.$$

Συνεπώς, $\forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \exists\, i, j \mid 1 \le i, j \le n$, $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $y \in \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T = \bigcup_{1 \le i, j \le n} T_{ij}^{(n)}}.$$

Επιπλέον, τα $T_{ij}^{(n)}$, $1 \leq i, j \leq n$, έχουν ξένα ανά δύο εσωτερικά (δείτε το!)



$$d(T_{ij}^{(n)}) = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Δηλ. μπορούμε να βρίσκουμε διαμερίσεις του T με ορθογώνια αυθαίρετα "μικρής" διαμέτρου.

Γενικότερα: Έστω $T=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ ορθογώνιο. Τότε, $\forall \epsilon>0$, $\exists$ διαμέριση P του T | $\forall S\in P$, $d(S)<\epsilon$.

Πράγματι: έστω $\epsilon>0$. Επιλέγω $n\in\mathbb{N}$ |

$$\frac{d(T)}{n}<\epsilon.$$

$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, θέτω

$$x_k = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} k, \qquad y_k = \gamma + \frac{\delta - \gamma}{n} k.$$

$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, θέτω

$$T_{ij}^{(n)} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Η $P = \{ T_{ij}^{(n)} \mid 1 \leq i, j \leq n \}$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

(Δείτε το!)

1.3 Έστω $f: T \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση κ' P μια διαμέριση του T.

Άνω [αντ. κάτω] άθροισμα της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P είναι το

$$U(f,P) = \sum_{S \in P} |S| \sup_S f$$

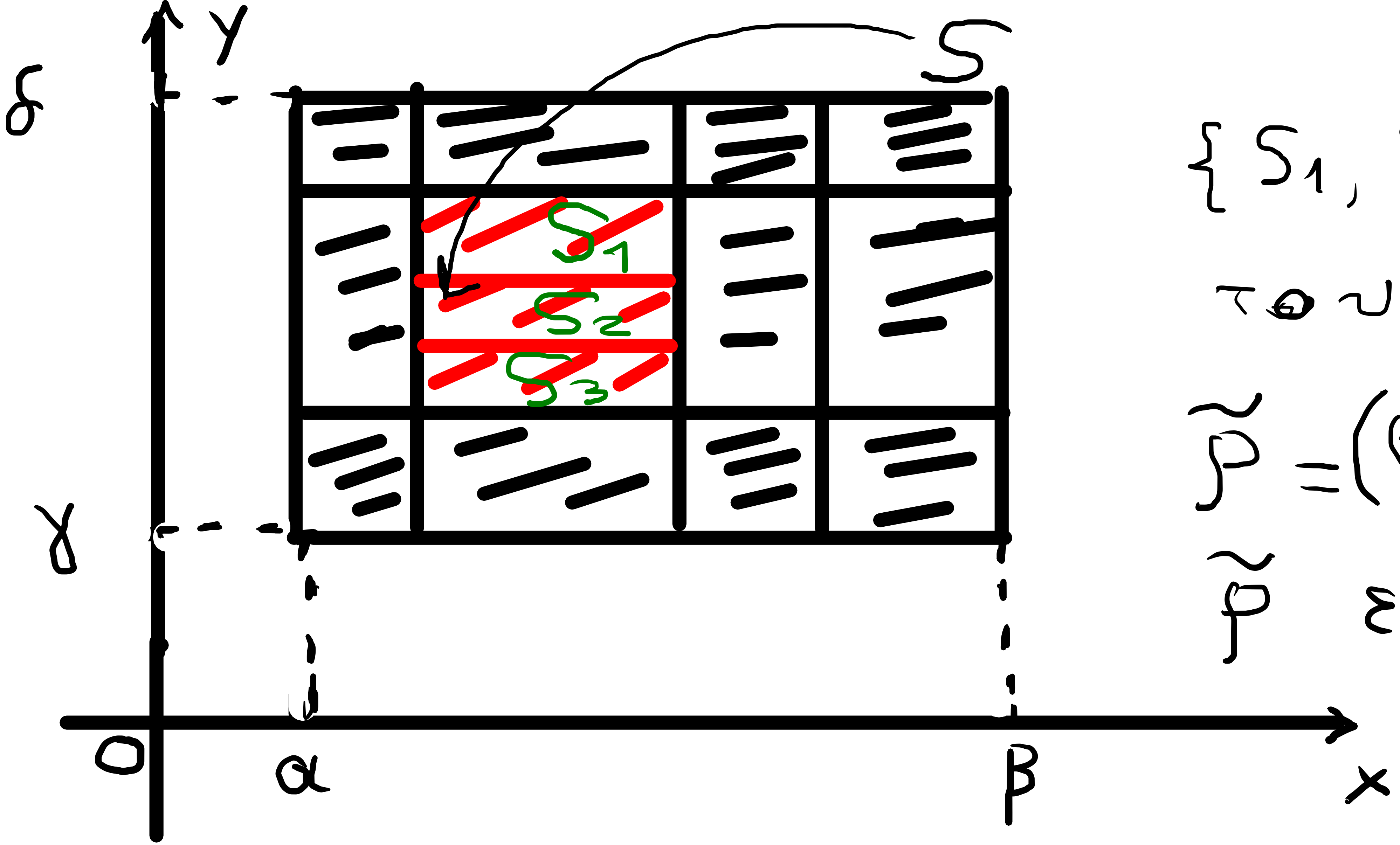
[αντ. το

$$L(f,P) = \sum_{S \in P} |S| \inf_S f.$$]

1.3α) Έστω P, $\tilde{P}$ διαμερίσεις του ορθογωνίου T.

Η $\tilde{P}$ λέγεται <u>εκλέπτυνση</u> της P ανν κάθε μέλος της P γράφεται σαν ένωση μελών της $\tilde{P}$.

Πρακτικά, για να κατασκευάσουμε μια εκλέπτυνση της P, διαμερίζουμε ένα ή περισσότερα μέλη της P σε επιμέρους ορθογώνια.



$\{S_1, S_2, S_3\}$ διαμέριση του $S \in P$

$\tilde{P} = (P \setminus \{S\}) \cup \{S_1, S_2, S_3\}$

$\tilde{P}$ εκλέπτυνση της P.

- $|S| \sup_S f \geq |S_1| \sup_{S_1} f + |S_2| \sup_{S_2} f + |S_3| \sup_{S_3} f$

$$\Rightarrow \underline{U(f, P) \geq U(f, \tilde{P})}.$$

- $$|S| \inf_S f \leq |S_1| \inf_{S_1} f + |S_2| \inf_{S_2} f + |S_3| \inf_{S_3} f$$

$$\Rightarrow \underline{L(f, P) \leq L(f, \tilde{P})}.$$

<u>Γενικά, εκλεπτύνοντας την P, τα άνω (αντ. κάτω) αθροίσματα μικραίνουν (αντ. μεγαλώνουν).</u>

Πρόταση 1.4: Έστω $P, \tilde{P}$ διαμερίσεις του T με $\tilde{P}$ <u>εκλέπτυνση της</u> P. Τότε,

$$L(f,P) \leq L(f,\tilde{P}) \leq U(f,\tilde{P}) \leq U(f,P).$$

Πρόταση 1.5: Εάν P, R διαμερίσεις του T, τότε

$$L(f,P) \leq U(f,R).$$

Η Πρότ. 1.5 μας λέει ότι το τυχαίο κάτω άθροισμα είναι $\leq$ από το τυχαίο άνω.

Με κίνητρο αυτό το σχόλιο, δίνουμε τον παρακάτω Ορισμό:

Ορισμός 1.6:

$\longrightarrow$ <u>κάτω ολοκλήρωμα της f στο T</u> $=$

$$L\text{-}\iint_T f = \sup\{L(f,P) \mid P \text{ διαμέριση του } T\}.$$

→ Άνω ολοκλήρωμα της f στο T =

$$U-\iint_T f = \inf\{U(f,P) \mid P \text{ διαμέριση του } P\}.$$

Λόγω της Πρότ. 1.5, ισχύει

$$L-\iint_T f \leq U-\iint_T f.$$

<u>Ορισμός 1.7:</u> Έστω T ορθογώνιο και $f: T \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f λέγεται <u>ολοκληρώσιμη στο T</u> ανν $\exists\, I \in \mathbb{R}$ |

$$L - \iint_T f = U - \iint_T f = I.$$

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\iint_T f = \iint_T f(x,y)\,dx\,dy = I =$$

$= \boxed{\text{διπλό ολοκλ. της } f \text{ στο } T.}$

Παραδείγματα:

(i) $f(x,y) = c \in \mathbb{R}$. Τότε, $\iint_T f = c|T|$.

Πράγματι: $\forall$ διαμέριση P του T,

$$L(f,P) = \sum_{S \in P} |S| \inf_S f = c \sum_{S \in P} |S| = c|T|$$

κ' όμοια

$$U(f,P) = c|T|.$$

Δηλ. το μοναδικό κάτω (άνω) άθροισμα είναι το $c|T| \Longrightarrow L-\iint_T f = U-\iint_T f = c|T|.$

(ii) $T=[0,1]\times[0,1]$, $f: T\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\cap T\\ 0, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Η f είναι φραγμένη αλλά όχι ολοκληρώσιμη.

Πράγματι· έστω P διαμέριση του T κ' $S\in P$. Λόγω πυκνότητας των ρητών κ' των αρρήτων στο $[0,1]$, το ορθογώνιο S περιέχει σημεία εντός κ' εκτός του $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, οπότε

$$\sup_S f=1,\quad \inf_S f=0,\quad \forall S\in P.$$

Άρα,

$$U(f,P)=\sum_{S\in P}|S|\sup_S f=\sum_{S\in P}|S|=|T|=1,$$

$$L(f,P)=\sum_{S\in P}|S|\inf_S f=0,$$

$\forall$ διαμέριση P του T

$$\Rightarrow \quad L\text{-}\iint_T f=0<1=U\text{-}\iint_T f$$

$\Rightarrow$ f όχι ολοκληρώσιμη!!

Πρόταση 1.8 (κριτήριο Riemann).

Έστω T ορθογώνιο κ' $f: T \to \mathbb{R}$ φραγμένη.

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) f ολοκληρώσιμη στο T.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ διαμέριση P του T |

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Πρόταση 1.9: Έστω f συνεχής στο ορθογώνιο T.
Τότε, f ολοκληρώσιμη στο T.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Riemann.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι **ομοιόμορφα συνεχής**

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\, \rho > 0 \mid \forall\, \xi, \eta \in T \text{ με } \|\xi - \eta\| < \rho, \text{ ισχύει} \\ \qquad |f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon / |T| . \end{array}\right\} \quad (1)$$

Επιλέγουμε διαμέριση P του T ώστε
$$d(S) < \rho, \quad \forall\, S \in P, \text{ δηλ.}$$

$$\sup\{\|\xi-\eta\| : \xi,\eta\in S\} < \rho, \ \forall S\in P \quad (2)$$

Έστω $S\in P$. Επειδή f συνεχής,

$\exists\ \xi,\eta\in S \mid$

$$\sup_S f = f(\xi), \qquad \inf_S f = f(\eta)$$

$$\Rightarrow \sup_S f - \inf_S f = f(\xi) - f(\eta) \overset{(1),(2)}{<} \frac{\varepsilon}{|T|} \quad (3)$$

$\forall\ S\in P.$

Τελικά έχουμε

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{S\in P}|S|\sup_S f-\sum_{S\in P}|S|\inf_S f$$

$$=\sum_{S\in P}|S|\left(\sup_S f-\inf_S f\right)\overset{(3)}{<}\frac{\varepsilon}{|T|}\sum_{S\in P}|S|$$

$$=\frac{\varepsilon}{|T|}|T|=\varepsilon. \quad \boxtimes$$

Βασικές ιδιότητες του διπλού ολοκλ.

Έστω T ορθογώνιο, $f, g : T \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσ.
κ' $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε:

(i) $\lambda f + \mu g$, $f \cdot g$, $|f|$ ολοκληρώσιμες.

(ii $\iint_T (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_T f + \mu \iint_T g$.

(iii) $\left| \iint_T f \right| \leq \iint_T |f|$.

(iv) Εάν $f \leq g$ στο T, τότε $\iint_T f \leq \iint_T g$.

Θεώρημα 1.10 (Θ. Fubini): Έστω $T=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ και $f: T \to \mathbb{R}$ ώστε:

(i) f ολοκληρώσιμη

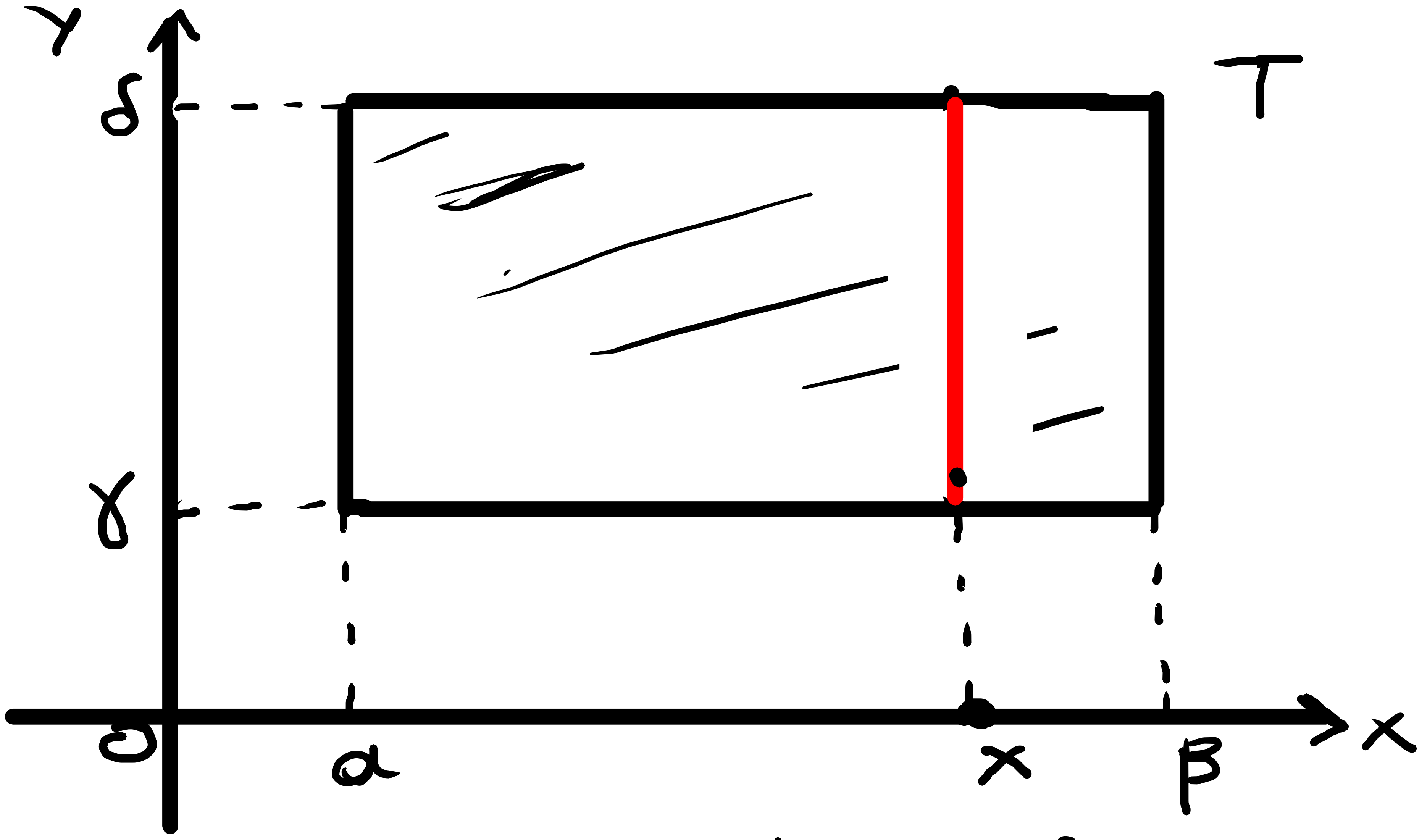
(ii) $\forall x \in [\alpha,\beta]$, η $[\gamma,\delta] \ni y \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy, \quad x\in[\alpha,\beta].$$

Τότε, F ολοκληρώσιμη και

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_\alpha^\beta\left[\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy\right]dx = \iint_T f.$$



$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left[\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right] dx$$

Πόρισμα 1.11: Έστω T, f όπως στο Θ.1.10. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\forall y \in [\gamma, \delta]$, η

$$[\alpha, \beta] \ni x \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$$

είναι ολοκληρώσιμη. Τότε,

$$\iint_T f = \underbrace{\int_\alpha^\beta \left[\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy\right] dx = \int_\gamma^\delta \left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right] dy}_{\text{Επάλληλα Ολοκληρώματα}}.$$

Πόρισμα 1.12: Εάν $f: T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ συνεχής, τότε

$$\iint_T f = \int_\alpha^\beta \left[\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right] dx = \int_\gamma^\delta \left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \right] dy.$$

<u>Σχόλιο 1:</u> Εάν $f: T \to \mathbb{R}$ <u>όχι ολοκλ.</u>, ενδέχεται τα επάλληλα ολοκλ. (αν υπάρχουν) να είναι <u>διαφορετικά ή ίσα</u>.

<u>Παράδειγμα 1:</u> $T = [0,1] \times [0,1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$\forall x > 0$, $f(x,0) = \dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$

$\Rightarrow$ <u>f μη φραγμένη $\Rightarrow$ f όχι ολοκλ.</u>

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy \right] dx = \int_0^1 \left. \frac{y}{x^2+y^2} \right|_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \left. \operatorname{Arctan} x \right|_{x=0}^{x=1} = \pi/4,$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \right] dy = -\int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy$$

$$= -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\pi/4$$

$\Rightarrow$ τα επάλληλα ολοκλ. είναι διαφορε-τικά!

Παράδειγμα 2: $T=[-1,1]\times[-1,1]$, $f: T\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$\forall x\in(0,1)$, $f(x,x)=\dfrac{1}{x^2}\xrightarrow{x\to 0^+}+\infty$.

$\Rightarrow f$ μη φραγμένη $\Rightarrow f$ όχι ολοκλ.

Επειδή οι

$$x \mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad y \mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

είναι <u>περιττές</u> ως προς x, y αντίστοιχα, τα επάλληλα ολοκληρώματα είναι κ' τα δύο <u>μηδέν</u>!

Επιπλέον παραδείγματα:

(1) $\iint_T y\sin(xy)\,dx\,dy = ?$, $T = [1,2]\times[0,\pi]$.

Λύση: Η $f(x,y) = y\sin(xy)$ είναι συνεχής στο T

Θ. Fubini $\Longrightarrow$ (Πόρισμα 1.11)

$$\iint_T f = \int_0^\pi \left[\int_1^2 y\sin(xy)\,dx \right] dy$$

$$= -\int_0^\pi \left[\cos(xy) \Big|_{x=1}^{x=2} \right] dy = \text{κλπ (απλό)}.$$

(2) $\forall b>0$, θέτουμε $T_b=[0,b]\times[0,b]$ κ'

$$I_b=\iint_{T_b} e^{-xy}\sin x\,dx.$$

(i) Να εκφράσετε το I_b με 2 τρόπους.

(ii) Παίρνοντας το $\lim_{b\to+\infty} I_b$, να δ.ο.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi/2.$$

Λύση:

(i) $I_b = \int_0^b \left(\int_0^b e^{-xy}\, dy \right) \sin x \, dx =$

$$= -\int_0^b \left. \frac{e^{-xy}}{x} \right|_{y=0}^{y=b} \sin x dx = \int_0^b \frac{1 - e^{-bx}}{x} \sin x dx. \quad (3)$$

$$I_b = \int_0^b \Big(\underbrace{\int_0^b e^{-xy} \sin x dx}_{J_y} \Big) dy$$

$$J_y = -\int_0^b e^{-xy}(\cos x)'\,dx = -e^{-xy}\cos x\Big|_{x=0}^{x=b} -$$

$$-y\int_0^b e^{-xy}\cos x\,dx$$

$$= 1 - e^{-by}\cos b - y\int_0^b e^{-xy}(\sin x)'\,dx$$

$$\Longrightarrow \cdots$$

$$J_y = \frac{1}{1+y^2} - \boxed{\frac{e^{-by}(\cos b + y\sin b)}{1+y^2}}\ \varphi_b(y)$$

$$\Rightarrow \quad I_b = \int_0^b \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^b \varphi_b(y)\,dy$$

$$= \operatorname{Arctan} b - \int_0^b \varphi_b(y)\,dy,$$

$$|\varphi_b(y)| = \frac{e^{-by}}{1+y^2}\,|\cos b + y \sin b| \leq \frac{1+y}{1+y^2} e^{-by}$$

$$\leq \frac{3}{2} e^{-by}, \quad y \in [0,b]$$

$$\Longrightarrow \left| \int_0^b \varphi_b(y)\,dy \right| \leq \frac{3}{2} \int_0^b e^{-by}\,dy =$$

$$= \frac{3}{2} \, \frac{1-e^{-b^2}}{b} \xrightarrow{b \to +\infty} 0$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} \boxed{I_b \xrightarrow{b \to +\infty} \pi/2} \quad (5).$$

Ταυτόχρονα,

$$I_b = \int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^b \frac{e^{-bx}}{x} \sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \left| I_b - \int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \leq \int_0^b e^{-bx} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

$$\leq \int_0^b e^{-bx}\,dx \xrightarrow{b \to +\infty} 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b \to +\infty} I_b. \quad (6)}$$

$$(5), (6) \Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi/2.$$