ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
ΣΕΜΦΕ - Ε.Μ.Π.
13/09/2022
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 Ω.

ΘΕΜΑ 1 (2 μ.): Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int\int_D \frac{xy}{x^2+y^2} e^{x^2+y^2} dxdy \ ,$$

όπου

$$D = \{ \ (x,y) : 1 \ \le \ x^2+y^2 \ \le \ 2x, \quad 0 \ \le \ y \ \le \ x \ \}.$$

ΘΕΜΑ 2 (2 μ.): Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_\gamma \frac{-y}{(x+1)^2+y^2}\, dx + \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\, dy,$$

όπου γ η θετικά προσανατολισμένη έλλειψη $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

ΘΕΜΑ 3 (3 μ.): Να επαληθεύσετε το θεώρημα Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(z^2, x^2, y^2), \ \ x,y,z \ \in \mathbb{R}$ και την επιφάνεια S με

$$S^* = \{ \ (x,y,z) : z = x^2+y^2, \quad 1 \le z \le 4 \ \}.$$

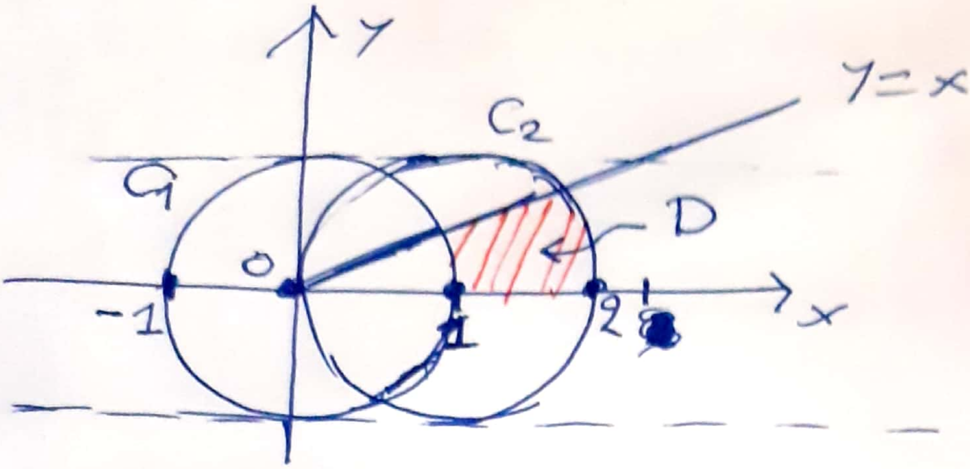
ΘΕΜΑ 4 (3 μ.): Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x,y,z) = (\ x^2e^z + x, \ y - xe^z, \ x^2 - 2xe^z \ ), \quad x,y,z \ \in \ \mathbb{R}.$$

Με κατάλληλη χρήση του θεωρήματος του Gauss, να υπολογίσετε τη ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της *ανοικτής* επιφάνειας S με

$$S^* = \{ \ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, \quad z \ge 0 \ \}.$$

Θ.1:



$C_1: x^2+y^2=1$

$C_2: x^2+y^2=2x$

$\Updownarrow$

$(x-1)^2+y^2=1$

$$\left.\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \le x^2+y^2 \le 2x$$

$$\boxed{0 \le \varphi \le \pi/4} \qquad \Rightarrow 1 \le \rho^2 \le 2\rho\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{1 \le \rho \le 2\cos\varphi}$$

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} e^{x^2+y^2}\, dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[\int_1^{2\cos\varphi} \frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2} e^{\rho^2} \rho\, d\rho \right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} e^{\rho^2}\Big|_{\rho=1}^{\rho=2\cos\varphi} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \longrightarrow$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(e^{4\cos^2\varphi} - e\right)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

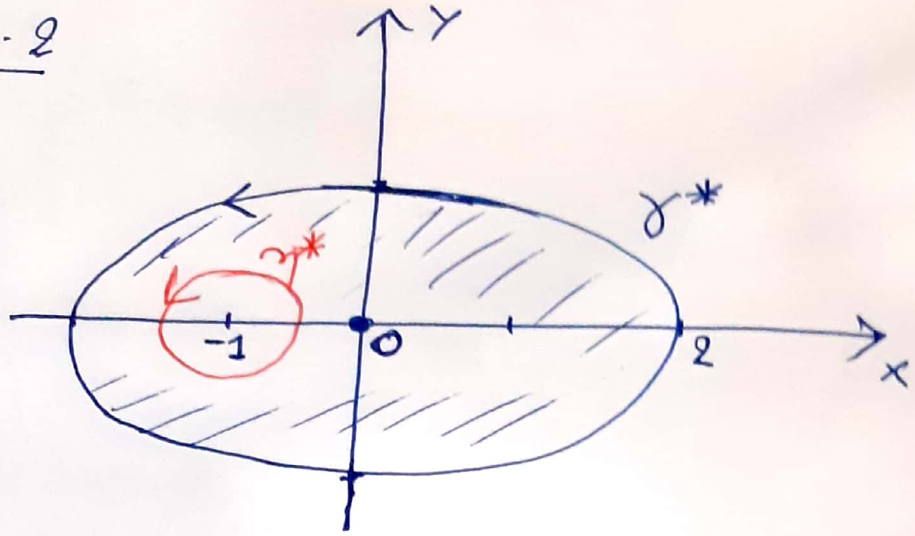
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} e^{4\cos^2\varphi}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi - \frac{e}{2}\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{16}\, e^{4\cos^2\varphi}\Big|_0^{\pi/4} - \frac{e}{4}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= -\frac{1}{16}\left(e^2 - e^4\right) - \frac{e}{4}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^4 - e^2}{16} - \frac{e}{8}.$$

$\underline{\theta.2}$ ③



Επιλέγουμε θετικά προσανατολισμένο κύκλο η με

$$\eta^*: (x+1)^2+y^2=\rho^2, \ (\rho>0)$$

ώστε $\eta^* \subset int\gamma^*$.

Οι συναρτήσεις $P(x,y) = -\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$,

$Q(x,y) = \dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$ είναι κλάσης C^1 στο πεδίο

μεταξύ των η^*, γ^* κι' επιπλέον

$$P_y = -\frac{(x+1)^2+y^2-y\cdot 2y}{[(x+1)^2+y^2]^2} = -\frac{(x+1)^2-y^2}{[(x+1)^2+y^2]^2}$$

$$Q_x = \frac{(x+1)^2+y^2-(x+1)\cdot 2(x+1)}{[(x+1)^2+y^2]^2} = \frac{y^2-(x+1)^2}{[(x+1)^2+y^2]^2}$$

$\Rightarrow P_y = Q_x$ στο U. $\longrightarrow$

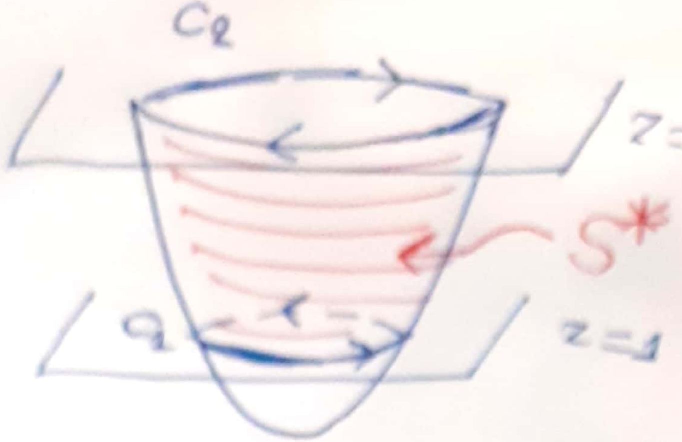
Αρχή Παραμόρφωσης $\Rightarrow I = \int_\eta -\frac{y}{(x+1)^2+y^2}dx + \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}dy$.

Μια παραμέτρηση της η είναι $\begin{cases} x = -1+\rho\cos t \\ y = \rho\sin t \\ t\in[0,2\pi] \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{\rho\sin t}{\rho^2}(-\rho\sin t) + \frac{\rho\cos t\,\rho\cos t}{\rho^2}\right]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi.$$

Θ.3:



• <u>Υπολογισμός ροής του $\overrightarrow{\mathrm{rot}F}$ μέσω της S.</u>

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(2y, 2z, 2x) = (y, z, x).$$

$S: \Delta \to \mathbb{R}^3, \quad \Delta = \{(u,v) : 1 \leq u^2+v^2 \leq 4\},$

$S(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$

$S_u \times S_v = (-2u, -2v, 1), \quad (S_u \times S_v)\cdot S(u,v) = -(u^2+v^2) \leq 0$

$\Rightarrow$ το $S_u \times S_v$ "δείχνει" στο εσωτερικό της S^* (όπως σχεδιάστηκε με αρχή πάνω στο S^*)

$\Rightarrow n(u,v) = -(S_u \times S_v) = (2u, 2v, -1).$

Η ροή ισούται με

$$\iint_{\Delta} (v, u^2+v^2, u)\cdot(2u, 2v, -1)\,du\,dv =$$

$$= \iint_{\Delta} 2uv\,du\,dv + 2\iint_{\Delta} v(u^2+v^2)\,du\,dv -$$

$$- \iint_{\Delta} u\,du\,dv$$

$$\underset{v=\rho\sin\varphi}{\overset{u=\rho\cos\varphi}{=\!=}} 2\int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi + 2\int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho^3\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi -$$

$$- \int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\sin(2\varphi)\,d\varphi\cdot\int_1^2 \rho^3\,d\rho + 2\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_1^2\rho^3\,d\rho -$$

$$- \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\cdot\int_1^2\rho^2\,d\rho = 0,$$

αφού $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi =$

$= 0.$

• Υπολογισμός Επικαμπυλίου (7)

$$\int_{C_1} \vec{F} = \frac{1}{2}\int_{C_1} \left(z^2dx + x^2dy + y^2dz\right) \overset{(z=1)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{C_1}\left(dx + x^2dy\right) \overset{[\text{Green}]}{=} \frac{1}{2}\iint_{(x^2+y^2\leq 1)} 2x\,dx\,dy$$

$$\overset{\substack{[x=\rho\cos\varphi]\\ [y=\rho\sin\varphi]}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^2 d\rho = 0,$$

$$\int_{C_2} \vec{F} = \frac{1}{2}\int_{C_2}\left(z^2dx + x^2dy + y^2dz\right) \overset{[z=4]}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{C_2}\left(16\,dx + x^2dy\right) \overset{(\text{Green})}{=}$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_{[x^2+y^2\leq 4]} 2x\,dx\,dy \overset{(\text{όμοια})}{=} 0.$$

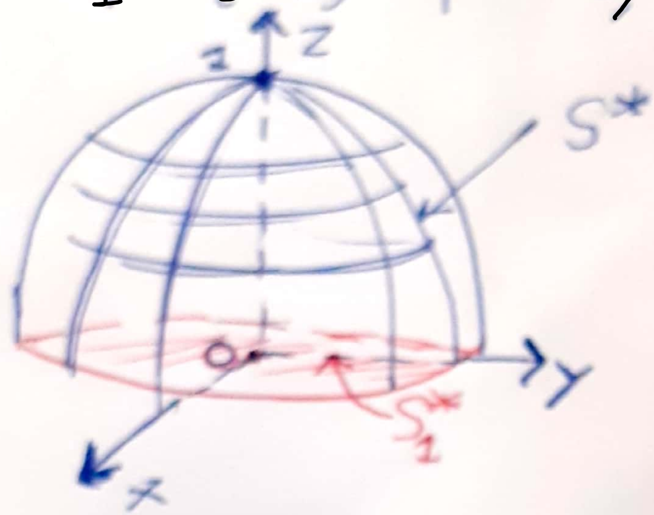
Άρα, $\int_{C_1+C_2} \vec{F} = 0.$

Θ. 4: Η S δεν είναι κλειστή!

Θεωρούμε την επιφάνεια Σ με

$$\Sigma^* = S^* \cup S_1^*,$$

όπου $S_1^* = \{(x,y,z) \mid z=0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$



Η Σ είναι κλειστή, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Gauss:

$$\mathcal{P}_\Sigma = (\text{Ροή του } \vec{F} \text{ μέσω της } \Sigma) =$$

$$= \iiint_K \operatorname{div}\vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_K (2xe^z + 1 + 1 - 2xe^z)$$

$$= 2\iiint_K = 2\,\text{όγκος}\,(K),$$

όπου K το άνω στερεό ημισφαίριο

$$\Rightarrow \mathcal{P}_\Sigma = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = 4\pi/3$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη ροή p_{S_1} μέσω της S_1.

$S_1 : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $\Delta = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$,

$S_1(u,v) = (u, v, 0)$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} \times \frac{\partial S_1}{\partial v} = (0,0,1)$$ «αντίθετη» στο εσωτερικό

$$\Rightarrow \quad n(u,v) = (0,0,-1)$$

$$\Rightarrow \quad p_{S_1} = \iint_\Delta \vec{F}(u,v,0) \cdot (0,0,-1)\, du\, dv$$

$$= \iint_\Delta (u^2+u,\ v-u,\ u^2-2u) \cdot (0,0,-1)\, du\, dv$$

$$= \iint_\Delta (2u-u^2)\, du\, dv =$$

$$= 2\iint_\Delta u\, du\, dv - \iint_\Delta u^2\, du\, dv \overset{[u=\rho\cos\varphi]}{\underset{[v=\rho\sin\varphi]}{=}}$$

Scanned with CamScanner

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi - \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\cos^2\varphi\, d\rho\, d\varphi$$

$$= 2\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi}_{0}\cdot\int_0^1 \rho^2\, d\rho - \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^1 \rho^3\, d\rho$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi = \boxed{-\pi/4}.$$

Επομένως, η ροή μέσω της S είναι

$$\Phi_S = \Phi_\Sigma - \Phi_{S_1} = 4\pi/3 + \pi/4 = \frac{19\pi}{12}.$$