

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Ασκήσεις στη Μαθηματική Ανάλυση

Φύλλο 2.

1. Έστω ένα σύνολο A που είναι άνω φραγμένο και $s = \sup A$. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in A$, τέτοιο ώστε να ισχύει $s - \varepsilon < x$.
2. Να αποδείξετε ότι
 - (a) Αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα, τότε αυτή είναι φραγμένη.
 - (b) Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε αυτή είναι συγκλίνουσα.

3. Δίνονται οι ακολουθίες:

(a) $\left\{ \frac{2n^2}{n^2+1} \right\}$,

(b) $\left\{ \frac{2n}{n^2+1} \right\}$,

(c) $\left\{ \sin \frac{1}{n} \right\}$,

(d) $\left\{ 2 - \frac{(-1)^n}{n} \right\}$,

(e) $\left\{ \frac{e^n}{\pi^{n/2}} \right\}$,

(f) $\left\{ \frac{2^n}{n^n} \right\}$.

Να εξετάσετε (α) αν είναι φραγμένες και αν είναι να γράψετε τα άνω ή κάτω φράγματα τους, κατόπιν να τις τοποθετήσετε σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών, (β) αν είναι μονότονες ή εναλλάσσουσες, (γ) αν είναι συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες.

4. Δίνεται η σειρά:

$$3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{16} - \frac{3}{64} + \dots$$

Να γράψετε τον γενικό όρο της σειράς και στη συνέχεια, αν συγκλίνει να υπολογίσετε το άθροισμά της.

5. Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς:

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} + \dots$$

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να γράψετε σε συνεκτική μορφή την ακολουθία των πεπερασμένων αθροισμάτων.

6. Να εξετάσετε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

(a) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(2+\pi)^{2n}}$,

(b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}}$,

(c) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,