ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

♣ Ο γενικός τύπος του πολυωνύμου Taylor με κέντρο το $a = 0$ είναι

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

♠ Με $\cos x$ συμβολίζουμε το *συνημίτονο του* x και με $\sin x$ το *ημίτονο του* x.

Άσκηση 1. Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor έως και τάξης $n \leq 4$ της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$ με κέντρο το $a = 0$.

Άσκηση 2. Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor έως και τάξης $n \leq 4$ της συνάρτησης $f(x) = \ln(1 + x)$, για $x \in (-1, +\infty)$ με κέντρο το $a = 0$

Άσκηση 3. (α) Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor $T_n(x)$ έως και τάξης $n \leq 5$ της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ με κέντρο το $a = 0$.

(β) Δείξτε ότι $|\cos x - T_5(x)| \leq \dfrac{|x|^6}{6!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4. (α) Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor $T_n(x)$ έως και τάξης $n \leq 4$ της συνάρτησης $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ με κέντρο το $a = 0$.

(β) Δείξτε ότι $|\sin x - T_4(x)| \leq \dfrac{|x|^5}{5!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5. *(α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{cx}$ όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά με $c \neq 0$. Δώστε τον γενικό τύπο του πολυωνύμου Taylor της f με κέντρο το $a = 0$.*

(β) Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ τάξης n με κέντρο το $a = 0$.

(γ) Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{e^x}$ τάξης n με κέντρο το $a = 0$.

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο $T_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$ υπολογίστε την $f^{(n)}(0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ποιά είναι η $f^{(2024)}(0)$?

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τρείς φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 3$ και κέντρου $x_0 = 0$ της συνάρτησης $g = f^2$ (δηλαδή της συνάρτησης $g(x) = f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$), αν το αντίστοιχο πολυώνυμο της f είναι $T(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

Άσκηση 8. (α) Έστω $n \geq 0$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $T_{n+1}(x)$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο ένα $a \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η παράγωγος $T'_{n+1}(x)$ του $T_{n+1}(x)$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f' με κέντρο το a.