Μαθηματική Ανάλυση

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Σχολή Τοπογράφων Μηχανικών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα – 2024

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR

Θα λέγαμε ότι οι πιο απλές πραγματικές συναρτήσεις είναι οι *πολυωνυμικές*, δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_n$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Στις πολυωνυμικές συναρτήσεις μπορούμε να βρούμε σχετικά εύκολα τις τιμές τους και γενικά να μελετήσουμε τις ιδιότητές τους. Όμως η πλειονότητα των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στην πράξη είναι συναρτήσεις που δεν μπορούν να γραφούν ως πολυώνυμα όπως πχ. οι εκθετικές συναρτήσεις a^x, η λογαριθμική συνάρτηση $\ln x$, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos x$ (συνημίτονο του x), $\sin x$ (ημίτονο του x) $\tan x$ (εφαπτομένη του x) κλπ. Το Θεώρημα Taylor λέει ότι κάτω από κάποιες προυποθέσεις ότι για πολλές μη πολυωνυμικές συναρτήσεις ορίζεται μια συγκεκριμένη ακολουθία πολυωνύμων που πλησιάζει οσο κοντ·α θέλουμε την συνάρτηση.

1.1 Συμβολισμοί

Ορισμός 1.1.1. *(n παραγοντικό) Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ με $n!$ συμβολίζουμε το γινόμενο όλων των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το n, δηλαδή*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \tag{1.1.1}$$

Επίσης ορίζουμε

$$0! = 1 \tag{1.1.2}$$

Πχ. $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, κοκ. Παρατηρείστε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ ισχύει ότι

$$(n+1)! = n!(n+1) \tag{1.1.3}$$

Ορισμός 1.1.2. *(n-τάξης παράγωγος) Αν $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$. Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ με $f^{(n)}$ συμβολίζουμε την παράγωγο n-τάξης της f. Επίσης θέτουμε $f^{(0)} = f$.*

Πχ. αν $n \geq 1$ ακέραιος και $f(x) = x^n$ τότε δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ισχύει ο τύπος

$$f^{(n)}(x) = n! \tag{1.1.4}$$

1.2 Πολυώνυμα Taylor

1.2.1 Προκαταρκτικά

Αν $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ μια πολυωνυμική συνάρτηση τότε μπορεί να δειχθεί ότι οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n$ του $p(x)$ δίνονται από την σχέση

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \tag{1.2.1}$$

για κάθε $k = 0, \ldots, n$. Δηλαδή,

$$a_0 = p(0),\ a_1 = p'(0),\ a_2 = \frac{p''(0)}{2},\ a_3 = \frac{p'''(0)}{3!} \ldots$$

Συνεπώς το $p(x)$ γράφεται και στην μορφή

$$p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{1.2.2}$$

Γενικότερα αν θεωρήσουμε πολυωνυμικές συναρτήσεις της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει ότι για κάθε $k = 0, \ldots, n$, ο συντελεστής a_k σχετίζεται με την k-τάξης παράγωγο της p στο a, $p^{(k)}(a)$, μέσω του τύπου

$$a_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!} \tag{1.2.3}$$

Συνεπώς αντίστοιχα το $p(x)$ γράφεται και στην μορφή

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.2.4}$$

1.2.2 Ορισμός πολυωνύμων Taylor

Γενικεύοντας τον τύπο (1.2.4) θέτοντας στην θέση του $p(x)$ μια n-φορές παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση $f(x)$ δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.2.1. *Έστω I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$. Έστω $n \geq 1$ ακέραιος και έστω ότι η f είναι n- φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τέλος έστω $a \in I$. Το πολυώνυμο*

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.2.5}$$

*καλείται **πολυώνυμο Taylor τάξης** n **της** f **με κέντρο το** a.*

Το σταθερό πολυώνυμο $T_0(x) = f(a)$ θεωρείται ως το πολυώνυμο Taylor τάξης 0 της f με κέντρο το a.

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο του αθροίσματος "$\sum$" και τις συμβάσεις $f^{(0)}(x) = f(x)$ και $0! = 1$, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το a γράφεται σύντομα με τον τύπο

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{1.2.6}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $a = 0$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το $a = 0$ παίρνει την πιο απλή μορφή

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{1.2.7}$$

Όταν μια συνάρτηση είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη τότε ορίζονται τα πολυώνυμα Taylor οποιασδήποτε τάξης της f. Παρατηρείστε επίσης ότι από τις (1.2.4) και (1.2.5) έχουμε ότι αν η f είναι πολυωνυμική βαθμού n,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$$

τότε τα πολυώνυμα Taylor τάξης n και πάνω με κέντρο το a ταυτίζονται με την f.

Παράδειγμα 1.2.2. Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x) = e^x$ με κέντρο $a = 0$ έχει τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \tag{1.2.8}$$

Πράγματι, $f^{(k)}(x) = e^x$ και άρα $f^{(k)}(0) = 1$, για κάθε $k \geq 0$. Αντικαθιστώντας στην (1.2.7) παίρνουμε την (1.2.8).

1.3 Το Θεώρημα Taylor

Η συνάρτηση f και τα πολυώνυμα Taylor της f όταν η f δεν είναι πολυώνυμο είναι αναγκαστικά διαφορετικές συναρτήσεις. Μια εκτίμηση για το πόσο διαφέρουν δίνεται από το Θεώρημα Taylor που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια. Το Θεώρημα Taylor καλείται και ***Θεώρημα Μέσης Τιμής ανώτερης τάξης*** γιατί στην ουσία όπως θα δούμε είναι μια γενίκευση του κλασσικού Θεω΄ρηματος Μέσης Τιμής. Θυμίζουμε ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής λέει το εξής.

Θεώρημα 1.3.1. ***(Θεώρημα Μέσης Τιμής)*** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε:*

(α) Η f συνεχής στο $[a,b]$.

(β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b).

Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιος ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi) \tag{1.3.1}$$

Για να διατυπώσουμε το Θεώρημα Taylor θα χρειασθούμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.3.2. *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος και I διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν $n \geq 1$ με $C^n(I)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : I \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχείς παραγώγους στο I τουλάχιστον έως και τάξης n. Αν $n = 0$ με $C^0(I)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : I \to \mathbb{R}$.*

Θεώρημα 1.3.3. (***Θεώρημα Taylor***) *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε:*

(α) $f \in C^n([a,b])$.

(β) *Η $f^{(n)}$ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b), δηλαδή η $f^{(n+1)}(x)$ ορίζεται για κάθε $x \in (a,b)$.*

Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιος ώστε

$$\frac{f(b) - T_n(b)}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{1.3.2}$$

όπου T_n το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το a. Ισοδύναμα, αν θέσουμε

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

τότε

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{1.3.3}$$

Το $R_n(x)$ καλείται ***υπόλοιπο Taylor τάξης*** n ***της*** f ***με κέντρο το*** a. Στην περίπτωση $n = 0$ το Θεώρημα 1.3.3 είναι ουσιαστικά το κλασσικό Θεώρημα Μέσης Τιμής. Πράγματι, $T_0(x) = f(a)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα $f(b) - T_0(b) = f(b) - f(a)$. Ένα άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 1.3.3, που χρησιμοποιείται συνήθως στην πράξη αντί του Θεωρήματος 1.3.3 είναι και το εξής:

Πόρισμα 1.3.4. *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $a \in I$ και έστω T_n το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το a. Τότε για κάθε $x \in I$ υπάρχει ένας αριθμός ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x τέτοιος ώστε*

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{1.3.4}$$

ή ισοδύναμα,

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{1.3.5}$$

Ειδικότερα για $n = 1$ έχουμε το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 1.3.5. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $a \in I$ και έστω $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το a.*

Τότε για κάθε $x \in I$ με $x \neq a$ υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x τέτοιος ώστε

$$\frac{f(x) - T_1(x)}{(x-a)^2} = \frac{f''(\xi)}{2} \tag{1.3.6}$$

ή ισοδύναμα

$$f(x) = T_1(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2 = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2 \tag{1.3.7}$$

Στην επόμενη παράγραφο θα δώσουμε μια απόδειξη του Πορίσματος 1.3.5 που στηρίζεται σε μια γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (το λεγόμενο *Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής*).

Στο επόμενο παράδειγμα δίνουμε μια εφαρμογή του θεωρήματος 1.3.3 για την συνάρτηση e^x.

Παράδειγμα 1.3.6. Για κάθε $n \geq 1$ και κάθε $0 < x \leq 1$, ισχύει ότι

$$T_n(x) < e^x < T_n(x) + \frac{3}{(n+1)!} \tag{1.3.8}$$

όπου $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x) = e^x$ με κέντρο το $a = 0$ (Παράδειγμα 1.2.2).

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $n \geq 1$ και ένα $x \in (0,1]$. Από το Θεώρημα 1.3.3 υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$e^x = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = T_n(x) + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{1.3.9}$$

Επειδή η $f(x) = e^x > 0$ και $0 < x \leq 1$ έχουμε ότι $e^{\xi} > 0$ και άρα από την (1.3.9) προκύπτει ότι

$$e^x > T_n(x) \tag{1.3.10}$$

Από την άλλη μεριά η $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $0 < \xi < x \leq 1$ έχουμε ότι $1 < e^{\xi} < e^x \leq e < 3$ και άρα

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Συνεπώς από την (1.3.9) παίρνουμε ότι

$$e^x < T_n(x) + \frac{3}{(n+1)!}. \tag{1.3.11}$$

Από τις (1.3.10) και (1.3.11) προκύπτει η (1.3.8). □

Παρατήρηση 1.3.7. Απο την ανισότητα (1.3.8) για $n = 9$ και $x = 1$ μπορούμε με πράξεις να συμπεράνουμε ότι

$$2,718281 < e < 2,718282 \tag{1.3.12}$$

που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση του e.

1.4 Απόδειξη του Θεωρήματος Taylor για $n = 1$

Εδώ δίνουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος Taylor για την περίπτωση $n = 1$ (Πόρισμα 1.3.5). Στην ουσία όπως θα δούμε η περίπτωση $n = 1$ ανάγεται στην περίπτωση $n = 0$ που είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Θα χρειασθούμε το εξής:

Θεώρημα 1.4.1. ***(Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής)*** *Έστω $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Έστω επίσης ότι $G'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο* *ώστε*

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \tag{1.4.1}$$

Απόδειξη. Επειδή $G'(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$ από το Θεώρημα Rolle (ή και από το καλσσικό Θεώρημα Μέσης Τιμής) έπεται ότι $G(a) \neq G(b) \Leftrightarrow G(b)-G(a) \neq 0$. Έστω $\lambda = \dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$ και $H(x) = F(x) - \lambda G(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Παρατηρούμε ότι η H είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{H(b)-H(a)}{b-a} = H'(\xi)$. Από τον ορισμό της συνάρτησης H εύκολα βλέπουμε ότι $H(b)-H(a) = 0$ και άρα

$$0 = H'(\xi) = F'(\xi) - \lambda G'(\xi) \Rightarrow \lambda = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

□

Παρατήρηση 1.4.2. Το Θεώρημα 1.4.1 δίνει το κλασικό Θεώρημα Μέσης Τιμής αν θέσουμε $G(x) = x$.

Απόδειξη του Πορίσματος 1.3.5. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in I$ με $x \neq a$ υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x τέτοιος ώστε

$$\frac{f(x)-T_1(x)}{(x-a)^2} = \frac{f''(\xi)}{2} \tag{1.4.2}$$

Για κάθε $x \in I$, θέτουμε $F(x) = f(x) - T_1(x)$ και $G(x) = (x-a)^2$.

Έχουμε $F(a) = f(a) - T_1(a) = 0$ και ομοίως $G(a) = 0$. Επίσης $G'(x) = 2(x-a) \neq 0$ για κάθε $x \neq a$ και $F'(x) = f'(x) - T_1'(x) = f'(x) - f'(a)$ (παρατηρείστε ότι $T_1'(x) = f'(a)$).

Σταθεροποιούμε τώρα ένα $x \neq a$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-T_1(x)}{(x-a)^2} &= \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} \\
&= \frac{F'(\xi')}{G'(\xi')} \quad \text{(Θεώρημα 1.4.1 με } \xi' \text{ μεταξύ των } x \text{ και } a) \\
&= \frac{1}{2}\frac{f'(\xi')-f'(a)}{\xi'-a} \\
&= \frac{f''(\xi)}{2} \quad \text{(Θεώρημα Μέσης Τιμής για την } f' \text{ με } \xi \text{ μεταξύ των } \xi' \text{ και } a).
\end{aligned}$$

□

1.5 Παράρτημα: Αναπτύγματα Taylor

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση, $a \in I$ και έστω $T_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το a. Αν $x \in I$ θα λέμε ότι το $f(x)$ είναι το ***όριο*** των $T_n(x)$ και θα γράφουμε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \tag{1.5.1}$$

αν οι τιμές $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, ..., που δίνουν τα πολυώνυμα Taylor στο x, πλησιάζουν, όσο μεγαλώνει το n, την τιμή $f(x)$.

Επειδή $T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f''(a)}{n!}(x-a)^n$, τον τύπο 1.5.1 τον γράφουμε συνήθως ως εξής

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \tag{1.5.2}$$

Η παράσταση

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

γράφεται και με την μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f''(a)}{n!}(x-a)^n$$

και καλείται ***ανάπτυγμα (ή σειρά) Taylor*** της f με κέντρο το a.

Δεν ισχύει πάντα ο τύπος 1.5.1 (ή ισοδύναμα ο 1.5.2). Οι απεριόριστα παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες αποτελούν μια ειδική κλάση συναρτήσεων (καλούνται ***αναλυτικές*** συναρτήσεις) που θα μπορούσαμε να πούμε είναι σαν πολυώνυμα απείρου βαθμού. Όμως με χρήση του Θεωρήματος Taylor αποδεικνύεται ότι οι εκθετικές, οι τριγωνομετρικές και άλλες συναρτήσεις είναι όντως αναλυτικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.5.1. *(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{1.5.3}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \tag{1.5.4}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{1.5.5}$$

(β) Για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \tag{1.5.6}$$

(γ) Για κάθε $x \in (-1, 1]$ ισχύει ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{1.5.7}$$

Παρατήρηση 1.5.2. Ο τύπος (1.5.3) για $x = 1$ δίνει ότι

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{1.5.8}$$

που σημαίνει ότι $e = \lim_{n\to\infty} s_n$ όπου $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

2.1.1 Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης.

Έστω

$$f(x) = \tan x, \;\; x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την καλούμε *τόξο εφαπτομένης* x και την συμβολίζουμε με $\arctan x$ (ή $\tan^{-1} x$), . Συνεπώς, η συνάρτηση $\arctan x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η $\arctan x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ το μοναδικό τόξο $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με εφαπτομένη x. Πχ. $\arctan 0 = 0$, $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

2.1.2 Η συνάρτηση τόξο συνημιτόνου.

Έστω

$$f(x) = \cos x, \;\; x \in [0, \pi]$$

Η f είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arccos x$, (διαβάζεται "τόξο συνημιτόνου x"). Η συνάρτηση $\arccos x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, σύνολο τιμών το $[0, \pi]$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Η συνάρτηση $\arccos x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1, 1]$ το μοναδικό $y \in [0, \pi]$ με $\cos y = x$. Πχ. $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2.1.3 Η συνάρτηση τόξο ημιτόνου.

Έστω
$$f(x) = \sin x,\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arcsin x$, (διαβάζεται "τόξο ημιτόνου x"). Η συνάρτηση $\arcsin x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, σύνολο τιμών το $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση $\arcsin x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1, 1]$ το μοναδικό τόξο $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $\sin y = x$. Πχ. $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2.1.4 Παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων που υπολογίζονται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.1. ***(Θεώρημα Παραγώγου Αντίστροφης Συνάρτησης)*** *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη και συνεχής. Έστω $J = f[I] = \{f(x); x \in I\}$ το σύνολο τιμών της f και έστω $f^{-1} : J \to I$ η αντίστροφη συνάρτηση της f. Έστω $y_0 \in J$ και $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε $y_0 = f(x_0)$ (ή ισοδύναμα $x_0 = f^{-1}(y_0)$). Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) \neq 0$ τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο y_0 και ισχύει ότι $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Πρόταση 2.1.2. *Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$.*

Απόδειξη. Έστω $y_0 \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $y_0 = f(x_0) = \tan x_0$. Επειδή
$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x = 1 + f^2(x) \end{aligned}$$
έχουμε $f'(x_0) = 1 + y_0^2 \neq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 2.1.1, για την παράγωγο της $f^{-1} = \arctan$ στο y_0 θα έχουμε
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1+y_0^2}$$
Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$ έπεται ότι $(\arctan y)' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. □

Παρατηρείστε ότι από την Πρόταση 2.1.2 έχουμε και την εξής συνέπεια στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Πόρισμα 2.1.3.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c \tag{2.1.1}$$

Άρα

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\big|_a^b = \arctan b - \arctan a. \tag{2.1.2}$$

Παράδειγμα 2.1.4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$

Πρόταση 2.1.5. *Για κάθε $y \in (-1,1)$ ισχύει ότι* $(\arccos y)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Απόδειξη. Έστω $y_0 \in (-1,1)$ και $x_0 \in (0,\pi)$ με $y_0 = f(x_0) = \cos x_0$. Για κάθε $x \in (0,\pi)$ έχουμε $-1 < \sin x < 0$. Οπότε

$$f'(x) = (\cos x)' = \sin x = -\sqrt{1 - cos^2 x} \neq 0$$

και άρα από το Θεώρημα 2.1.1, για την $(f^{-1})'(y_0)$ παίρνουμε

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x_0}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $y_0 \in (-1,1)$ έχουμε ότι $(\arccos y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ για κάθε $y \in (-1,1)$. □

Από την Πρόταση 2.1.5 έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.1.6.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + c \tag{2.1.3}$$

και άρα για κάθε $-1 \leq a < b \leq 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos a - \arccos b \tag{2.1.4}$$

Πρόταση 2.1.7. *Για κάθε $y \in (-1,1)$ ισχύει ότι* $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Απόδειξη. Έστω $y_0 \in (-1,1)$ και $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(x_0) = \sin x_0 = y_0$. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $0 < \cos x < 1$ και άρα

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \neq 0$$

Άρα από το Θεώρημα 2.1.1, παίρνουμε

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $y_0 \in (-1,1)$ και η $f^{-1} = \arcsin$ έχουμε ότι $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ για κάθε $y \in (-1,1)$. □

Από την Πρόταση 2.1.7 έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 2.1.8.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \tag{2.1.5}$$

Άρα για κάθε $-1 \le a < b \le 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x|_a^b = \arcsin b - \arcsin a \tag{2.1.6}$$

2.2 Οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

2.2.1 Η συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο.

Η συνάρτηση

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2.2.1}$$

καλείται *υπερβολικό συνημίτονο* και ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\cosh x$ είναι *άρτια* συνάρτηση δηλαδή

$$\cosh(-x) = \cosh x,\ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.2}$$

αφού,

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$

Επίσης,

$$\cosh x \ge 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.3}$$

αφού αν θέσουμε $y = e^x$ τότε $y > 0$ και

$$\cosh x = \frac{y + \frac{1}{y}}{2} = \frac{y^2+1}{2y} \ge 1 \Leftrightarrow y^2 + 1 \ge 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 \ge 0$$

Ακόμη, επειδή ο μέσος όρος δύο πραγματικών αριθμών είναι πάντα μεταξύ των αριθμών αυτών έχουμε ότι

$$e^{-x} < \cosh x < e^x,\ \ \forall x > 0 \tag{2.2.4}$$

και αντίστοιχα

$$e^{x} < \cosh x < e^{-x},\ \ \forall x < 0 \tag{2.2.5}$$

Επίσης,

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2.2.6}$$

Παρατηρούμε ότι $(\cosh x)' < 0$ για $x < 0$ και $(\cosh x)' > 0$ για $x > 0$. Άρα η $\cosh x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με $\cosh(0) = 1$ να είναι η ελάχιστη τιμή της. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty. \tag{2.2.7}$$

και άρα το σύνολο τιμών της $\cosh x$ (δηλαδή το σύνολο $\{\cosh x : x \in \mathbb{R}\}$) είναι το $[1, +\infty)$. Η καμπύλη που σχηματίζει η γραφική παράσταση της $\cosh x$ μοιάζει με παραβολή (δηλαδή σαν αυτήν της συνάρτησης x^2) και καλείται *αλυσσοειδής* γιατί είναι το σχήμα που παίρνει μια αλυσίδα όταν την κρεμάσουμε οριζόντια από τα δύο άκρα της.

2.2.2 Η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο.

Η συνάρτηση

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2.2.8}$$

καλείται *υπερβολικό ημίτονο* και ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι *περιττή* συνάρτηση δηλαδή

$$\sinh(-x) = -\sinh x \tag{2.2.9}$$

Έχουμε

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \tag{2.2.10}$$

και άρα η $\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή επιπλέον

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty \tag{2.2.11}$$

το σύνολο τιμών της είναι όλο το $\mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση μοιάζει με της συνάρτησης $f(x) = x^3$.

Παρατηρείστε ότι από την (2.2.6) έχουμε

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \tag{2.2.12}$$

Επίσης είναι εύκολο να επαληθεύσουμε με πράξεις την εξής ταυτότητα

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.13}$$

Παρατήρηση 2.2.1. Η (2.2.13), δείχνει την σχέση των συναρτήσεων $\cosh x$ και $\sinh x$ με την ισοσκελή υπερβολή, δηλαδή την καμπύλη του επιπέδου που αποτελείται από όλα τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν την σχέση $x^2 - y^2 = 1$. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι ένα σημείο (x, y) του επιπέδου ανήκει στον δεξί κλάδο της ισοσκελούς υπερβολής αν και μόνο αν τα x, y γράφονται υπό την μορφή

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \tag{2.2.14}$$

όπου $t \in \mathbb{R}$. Αυτό το γεγονός έρχεται σε αναλογία με τα σημεία (x, y) του μοναδιαίου κύκλου του οποίου τα σημεία δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{2.2.15}$$

2.2.3 Η συνάρτηση υπερβολική εφαπτομένη.

Η συνάρτηση

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ \ x \in \mathbb{R} \tag{2.2.16}$$

καλείται *υπερβολική εφαπτομένη.* Η $\tanh x$ είναι περιττή,

$$\tanh(-x) = -\tanh x, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.17}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\begin{aligned} (\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' &= \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} > 0 \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

και άρα η $\tanh x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = +1 \tag{2.2.19}$$

Πράγματι

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

Παρόμοια, έχουμε

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1 \tag{2.2.20}$$

Με άλλα λόγια οι ευθείες $y = \pm 1$ αποτελούν οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης της $\tanh x$. Η γραφική παράσταση της $\tanh x$ μοιάζει με αυτήν της $\arctan x$.

2.2.4 Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

Όπως είδαμε η συνάρτηση $\sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως αύξουσα και άρα αντιστρέψιμη συνάρτηση. Η αντίστροφή της συμβολίζεται με $\sinh^{-1} x$.

Πρόταση 2.2.2. *(1) Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\sinh x$ *δίνεται από τον τύπο*

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.21}$$

(2) Η συνάρτηση $\sinh^{-1} x$*,* $x \in \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\sinh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{2.2.22}$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \sinh^{-1} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \tag{2.2.23}$$

Απόδειξη. (1) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω

$$y = \sinh^{-1} x \tag{2.2.24}$$

Άρα $x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Θέτοντας $w = e^y$, έχουμε

$$x = \frac{w - \frac{1}{w}}{2} = \frac{w^2-1}{2w} \Leftrightarrow w^2 - 2xw - 1 = 0 \tag{2.2.25}$$

Η (2.2.25) έχει λύσεις

$$w_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Επειδή $w = e^y > 0$ και $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} w = x + \sqrt{x^2+1} &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

(2) Από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\sinh^{-1} x\right)' &= \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

□

Η συνάρτηση $\cosh x$, $x \in \mathbb{R}$ ως άρτια δεν είναι $1-1$ και άρα δεν αντιστρέφεται. Όμως αν περιοριστούμε στα $x \geq 0$ η $\cosh x$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση από το $[0, +\infty)$ στο $[1, +\infty)$. Αν συμβολίσουμε με $\cosh^{-1} x$ την αντίστροφη της $\cosh x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ παίρνουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 2.2.3. *(1) Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\cosh x$ *στο διάστημα* $[0, +\infty)$*, δίνεται από τον τύπο*

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad \forall x \in [1, +\infty) \tag{2.2.26}$$

(2) Η συνάρτηση $\cosh^{-1} x$*,* $x \in [1, +\infty)$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\cosh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \tag{2.2.27}$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = \cosh^{-1} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + c \tag{2.2.28}$$

Η απόδειξη της Πρότασης 2.2.3 είναοι ανάλογη με εκείνη της Πρότασης 2.2.2 και αφήνεται ως άσκηση.

Τέλος, όπως είδαμε η $\tanh x$ είναι μια γνησιως αύξουσα συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $(-1, 1)$. Η αντίστροφή της συμβολίζεται με $\tanh^{-1} x$ και είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση από το $(-1, 1)$ στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.2.4. *(1) Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\cosh x$ *στο διάστημα* $[0, +\infty)$*, δίνεται από τον τύπο*

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad \forall x \in (-1, 1) \tag{2.2.29}$$

(2) Η συνάρτηση $\tanh^{-1} x$*,* $x \in (-1, 1)$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\tanh^{-1} x\right)' = \frac{1}{1 - x^2} \tag{2.2.30}$$

Απόδειξη. (1) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned} y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y &= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \\ \Leftrightarrow e^{2y} &= \frac{1 + x}{1 - x} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \left(\tanh^{-1} x\right)' &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)' \\ &== \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x}{1 + x} \cdot \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x}{1 + x} \cdot \frac{2}{(1 - x)^2} = \frac{1}{1 - x^2} \end{aligned}$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

3.1 Βασικοί ορισμοί και Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

3.1.1 Βασικοί ορισμοί

Για τους επόμενους ορισμούς σταθεροποιούμε ένα κλειστο φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.1.1. *Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $[a, b]$ που περιέχει τα άκρα a, b του $[a, b]$ θα καλείται **διαμέριση** του $[a, b]$.*

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

μια διαμέριση του $[a, b]$ με $n + 1$ σημεία. Η P χωρίζει το διάστημα $[a, b]$ σε n διαστήματα

$$\begin{aligned}[a, b] &= [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n] \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]\end{aligned}$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, με Δx_i συμβολίζουμε το ***μήκος*** του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$, δηλαδή

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Ορισμός 3.1.2. *Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ με $n + 1$ σημεία. Ένα υποσύνολο $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ του $[a, b]$ τέτοιο ώστε $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ θα καλείται **επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την** P.*

Ορισμός 3.1.3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ και $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την P. Το άθροισμα*

$$S(f, P, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$$

*καλείται **άθροισμα Riemann της f ως προς την διαμέριση P και την επιλογή** T.*

Ορισμός 3.1.4. *Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Η **λεπτότητα** της P*

*ορίζεται να είναι το **μέγιστο** από τα μήκη Δx_i και συμβολίζεται με $\lambda(P)$, δηλαδή,*

$$\lambda(P) = \max\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$$

3.1.2 Ολοκληρωσιμότητα συναρτήσεων

Μία συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ καλείται **ολοκληρώσιμη** αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός I τέτοιος ώστε

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f, P, T) \tag{3.1.1}$$

Ο αριθμός I με την παραπάνω ιδιότητα θα καλείται **ολοκλήρωμα** της f και συμβολίζεται με $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Η σχέση (3.1.1) σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα της f είναι το όριο των αθροισμάτων Riemann καθώς η λεπτότητα των διαμερίσεων τείνει προς στο μηδέν και ανεξατήτως των επιλογών ενδιάμεσων σημείων. Σε πιο αυστηρά μαθηματική γλώσσα η (3.1.1) σημαίνει το εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ με $\lambda(P) < \delta$ και για οποιαδήποτε επιλογή T ενδιάμεσων σημείων ως προς την P, έχουμε ότι

$$|S(f, P, T) - I| < \varepsilon$$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα στην θεωρία ολοκλήρωσης είναι το εξής.

Θεώρημα 3.1.5. *Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.*

Παρατήρηση 3.1.6. Το Θεώρημα 3.1.5 λέει ότι η κλάση των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων περιλαμβάνει όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. Δεν είναι όμως μόνο οι συνεχείς συναρτήσεις ολοκληρώσιμες. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι κάθε μονότονη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ασχέτως αν είναι συνεχής ή όχι.

Επίσης, υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι ολοκληρώσιμες. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \text{ ρητός} \\ 0 \text{ αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

αποδεικνύεται ότι δεν είναι ολοκληρώσιμη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα αθροίσματα Riemann δεν συγκλίνουν καθώς η λεπτότητα των διαμερίσεων τείνει στο μηδέν.

3.2 Παράγωγος και Ολοκλήρωμα

3.2.1 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Το επόμενο θεώρημα συνδέει την Ολοκλήρωση με την Διαφόριση και παίζει καθοριστικό ρόλο στους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{3.2.1}$$

Μια συνεχής συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$ θα καλείται ***αρχική*** (ή ***παράγουσα***) της f. Αν μια συνάρτηση f έχει μια αρχική F τότε αυτή θα είναι στην ουσία μοναδική με την έννοια ότι όλες οι άλλες αρχικές της f θα είναι της μορφής $F + c$ όπου c σταθερά (πράγματι, αν F_1, F_2 δύο αρχικές της f τότε $F_1' = F_2' = f$ και άρα $(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = 0 \Rightarrow F_2 - F_1 = c$). Ως συνέπεια έχουμε ότι η διαφορά $F(b) - F(a)$ στην (3.2.1) είναι η ίδια για κάθε αρχική της f. Την διαφορά $F(b) - F(a)$ θα την συμβολίζουμε στην συνέχεια με $[F(x)]_a^b$.

Η απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1 στηρίζεται στην επόμενη πρόταση που είναι συνέπεια του θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Πρόταση 3.2.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική της f. Τότε για κάθε διαμέριση P υπάρχει επιλογή ενδιάμεσων σημείων T_P τέτοια ώστε*

$$S(f, P, T_P) = F(b) - F(a) \tag{3.2.2}$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Καταρχάς παρατηρούμε ότι

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \tag{3.2.3}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, υπάρχει $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i)$$

και άρα

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i$$

Θέτουμε $T_P = \{t_1, \ldots, t_n\}$ και παρατηρούμε ότι το T_P αποτελεί μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την διαμέριση P.

Τώρα από την (3.2.3) έχουμε

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = S(f, P, T_P)$$

□

Η απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1 είναι σχεδόν άμεση από την Πρόταση 3.2.2. Πράγματι, από τον ορισμό του ολοκληρώματος έχουμε ότι

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(f, P, T)$$

Επειδή το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο της επιλογής T χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T = T_P$, με άλλα λόγια

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(f, P, T_P)$$

Όμως κάθε άθροισμα Riemann $S(f, P, T_P)$ είναι σταθερό και ίσο με $F(b) - F(a)$ όποια και αν είναι η P.

Συνεπώς $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P,T_P) = F(b) - F(a)$ και άρα $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Παράδειγμα 3.2.3. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. Γενικότερα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^k\,dx = \left[\frac{x^k}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

3.2.2 Το αόριστο Ολοκλήρωμα

Το Θεώρημα 3.2.1 λέει ότι για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ μιας συνάρτησης f αρκεί να βρούμε μια αρχική της, δηλαδή μια συνάρτηση F με $F' = f$ και τότε το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι απλώς η διαφορά των τιμών της συνάρτησης F στα άκρα a και b του διαστήματος ολοκλήρωσης. Άρα ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος ανάγεται στην ουσία σε μια διαδικασία που είναι αντίστροφη σε αυτή της παραγώγου.

Ορισμός 3.2.4. *Το **αόριστο ολοκλήρωμα** (ή **γενικό ολοκλήρωμα**) μιας συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f. Το αόριστο ολοκλήρωμα της f θα συμβολίζεται με $\int f(x)\,dx$.*

Επειδή δύο αρχικές της f διαφέρουν κατά σταθερά, έχουμε ότι

$$\int f(x)\,dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

όπου F είναι μια αρχική της f. Στα επόμενα για απλότητα θα γράφουμε

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \text{ή πιο απλά} \quad \int f(x)\,dx = F(x)$$

Παράδειγμα 3.2.5.

$$\int x^a\,dx = \frac{x^a}{a+1}, \text{ για όλα τα } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

Παρατήρηση 3.2.6. Το Θεώρημα 3.2.1 είναι πολύ σημαντικό και χρήσιμο αλλά υπάρχουν και κάποιες περιπτώσεις που δεν μπορεί να εφαρμοσθεί. Ο λόγος είναι ότι δεν έχουν όλες οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις αρχική. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0 \\ 1 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη αλλά δεν έχει αρχική.

3.2.3 Συνεχείς συναρτήσεις και ολοκλήρωση

Για συνεχείς συναρτήσεις έχουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.7. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **συνεχής** συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(a) = 0$ και*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

για κάθε $x \in (a,b]$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Παρατήρηση 3.2.8. Παρατηρείστε ότι το Θεώρημα 3.2.7 συνεπάγεται το Θεώρημα 3.2.1 όταν η f είναι συνεχής συνάρτηση. Επίσης έχει ως συνέπεια ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει αρχική.

3.3 Βασικές ιδιότητες Ολοκληρώματος και Μεθοδοι Ολοκληρωσης

3.3.1 Βασικές ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα έχει τις επόμενες τρείς βασικές ιδιότητες.

Πρόταση 3.3.1. ***(Προσθετικότητα)*** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $c \in (a,b)$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c.b]$ και ισχύει ότι*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Πρόταση 3.3.2. ***(Μονοτονία)*** *Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε*

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$$

Πρόταση 3.3.3. ***(Γραμμικότητα)*** *Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

3.3.2 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Η πρώτη μέθοδος Ολοκλήρωσης είναι το ανάλογο του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο συναρτήσεων

$$(fg)' = f'g + fg'$$

και καλείται *Ολοκλήρωση κατά παράγοντες*.

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο. Τότε*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx \tag{3.3.1}$$

ή με τον συμβολισμό του αορίστου ολοκληρώματος

$$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx \tag{3.3.2}$$

Απόδειξη. Επειδή $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ έχουμε ότι $f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$. Άρα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx \\ &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.3.5.

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e (x)' \ln x\,dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\,dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx \\ &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e = [x(\ln x - 1)]_1^e \end{aligned}$$

3.3.3 Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής

Η δεύτερη μέθοδος ολοκλήρωσης είναι το αντίστοιχο του κανόνα παραγώγισης της σύνθεσης δύο συναρτήσεων (κανόνας αλυσίδας):

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

και καλείται *ολοκλήρωση με αντικατάσταση* (ή *ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής*). Θα χρειασθούμε και τον εξής συμβολισμό.

Θεώρημα 3.3.6. *Έστω $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ με $\varphi(t) \in I$ για κάθε $t \in [c, d]$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε*

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(u)\,du \tag{3.3.3}$$

Απόδειξη. Έστω $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια αρχική της f (υπάρχει από Θεώρημα 3.2.7). Τότε, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θεώρημα 3.2.1),

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = F \circ \varphi\ (d) - F \circ \varphi\ (c) \tag{3.3.4}$$

Από την άλλη μεριά, από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt &= \int_c^d F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \\ &= \int_c^d (F \circ \varphi)'(t)\,dx \\ &= F \circ \varphi\ (d) - F \circ \varphi\ (c) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Από (3.3.4) και (3.3.5) έπεται το συμπέρασμα. □

Στην πράξη για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.1.1, θέτουμε

$$\text{“}u = \varphi(t)\text{” και “}du = \varphi'(t)\, dt\text{”}$$

Παράδειγμα 3.3.7.

$$\int_a^b \varphi(t)\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} u\, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b = \left[\frac{\varphi^2(x)}{2}\right]_a^b$$

όπου θέσαμε $u = \varphi(t)$, $du = \varphi'(t)\, dt$. Π.χ.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t\, dt &= \int_0^{\pi/2} \sin t (\sin t)'\, dt \\ &= \int_{\sin 0}^{\sin(\pi/2)} u\, du = \frac{\sin^2(\pi/2) - \sin^2 0}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.3.8. Έστω $\varphi : [c, d] \to (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Τότε

$$\int_c^d \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \frac{du}{u}\, du = [\ln u]_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} = \ln \varphi(d) - \ln \varphi(c)$$

Πχ.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \tan t\, dt = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos t}\, dt &= -\int_0^{\pi/3} \frac{(\cos t)'}{\cos t}\, dt \\ &\overset{u=\cos t}{=} -\int_1^{1/2} \frac{du}{u} = \int_{1/2}^1 \frac{du}{u} = [\ln u]_{1/2}^1 = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2\end{aligned}$$

Ο τύπος (3.3.3), χρησιμοποιείται και ως εξής: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\, dx$. Αν $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ γνησίως αύξουσα με $\varphi(c) = a$ και $\varphi(d) = b$ τότε ο τύπος (3.3.3) γράφεται υπό την μορφή

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \tag{3.3.6}$$

Στην πράξη, θέτουμε

$$x = \varphi(t) \text{ και } dx = \varphi'(t)\, dt$$

Το δύσκολο εδώ είναι να βρούμε την κατάλληλη συνάρτηση $\varphi : [c, d] \to [a, b]$.

Παράδειγμα 3.3.9. Χρησιμοποιώντας ότι $\displaystyle\int \cos^2 t\, dt = \frac{\cos t \cdot \sin t + t}{2}$ δείξτε ότι

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x$, $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Τότε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,(\sin t)'\,dt\\ &= \int \cos^2 t\,dt\\ &= \frac{1}{2}(\cos t\cdot \sin t + t)\\ &= \frac{1}{2}(\cos(\arcsin x)\cdot \sin(\arcsin x) + \arcsin x)\\ &= \frac{1}{2}(x\cos(\arcsin x) + \arcsin x)\\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)\end{aligned}$$

διότι $\sin(\arcsin x) = x$ και $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$. □

3.4 Μερικές γεωμετρικές Εφαρμογές του ολοκληρώματος

3.4.1 Εμβαδά επίπεδων χωρίων

Όπως είδαμε ο ορισμός του ολοκληρώματος συνδέεται άμεσα με τον υπολογισμό του εμβαδού του υπογραφήματος μιας μη αρνητικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμμένα έχουμε το εξής.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση. Έστω*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \text{ και } 0 \le y \le f(x)\}$$

το υπογράφημα της f, δηλαδή το χωρίο του επιπέδου που περιορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης, τον άξονα x και τις δύο κάθετες στον άξονα x στα σημεία $x = a$ και $x = b$. Τότε το εμβαδό του S ισούται με $\int_a^b f(x)\,dx$.

Παράδειγμα 3.4.2. Το εμβαδό E ενός κύκλου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $E = \pi R^2$.

Απόδειξη. Ο κύκλος του $\mathbb{R}^2$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R αποτελείται από όλα τα σημεία (x,y) που ικανοποιούν την σχέση

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{3.4.1}$$

Θεωρώντας το άνω ημικύκλιο, δηλαδή τα σημεία (x,y) με $y > 0$ και λύνοντας την (3.4.1) ως προς y βλέπουμε ότι αυτό είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \le x \le R$$

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα R είναι το διπλάσιο του εμβαδού του ημικυκλίου, το οποίο με την σειρά του είναι το εμβαδό του υπογραφήματος της συνάρτησης f. Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.4.1, έχουμε

$$E = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} = 2R\int_{-R}^{R} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\,dx \tag{3.4.2}$$

και κάνωντας την αντικατάσταση $y = x/R$ $dy = dx/R$ παίρνουμε

$$E = 2R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy \tag{3.4.3}$$

Από το Παράδειγμα 3.3.9 έχουμε $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy = \pi/2$ και άρα

$$E = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} = 2R^2 \frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

□

3.4.2 Μήκος επίπεδης καμπύλης

Με τον όρο *(επίπεδη) καμπύλη* θα εννοούμε ένα υποσύνολο του C του $\mathbb{R}^2$ για το οποίο υπάρχουν δύο συνεχείς συναρτήσεις

$$x(t), y(t) : I \to \mathbb{R}$$

όπου I ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t) \quad \text{και } y = y(t),\ t \in [a, b]\}$$

Το ζεύγος $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ αποτελεί όπως λέμε *μια παραμετρική αναπαράσταση* της καμπύλης (δεν είναι μοναδική). Αν οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι επιπλέον και παραγωγίσιμες ως προς t με συνεχείς παραγώγους τότε η καμπύλη θα καλείται *συνεχώς διαφορίσιμη*. Αν $I = [a, b]$ τότε τα *άκρα* της καμπύλης ορίζονται να είναι τα σημεία $A = (x(a), y(a))$ και $B = (x(b), y(b))$. Αν τα άκρα ταυτίζονται η καμπύλη καλείται *κλειστή*. Αν για κάθε σημείο (x, y) της καμπύλης εκτός ίσως των άκρων υπάρχει μοναδικό $t \in (a, b)$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ τότε η καμπύλη καλείται *απλή*.

Το *μήκος* της C ορίζεται μέσω των τεθλασμένων γραμμών με κορυφές σημεία της καμπύλης. Αποδεικνύεται ότι αν μια καμπύλη C έχει μια παραμετρική αναπαράσταση $(x(t), y(t))$ $t \in [a, b]$ είναι απλή και συνεχώς διαφορίσιμη τότε το μήκος $L(C)$ της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \tag{3.4.4}$$

Στην περίπτωση όπου η C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο τότε μια παραμετρική αναπαράσταση της C δίνεται από τους τύπους $x(t) = t$ και $y(t) = f(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$ και άρα η (3.4.4) παίρνει την μορφή

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{3.4.5}$$

Παράδειγμα 3.4.3. Η περιφέρεια L ενός κύκλου ακτίνας $R > 0$ δίνεται από τον τύπο $L = 2\pi R$.

Απόδειξη. Πράγματι, οι συναρτήσεις

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις ενός κύκλου ακτίνας $R > 0$ και κέντρου $(0, 0)$. Άρα, από τον τύπο

(3.4.4), έχουμε

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\ dt = R^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\ dt = R^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

□

3.5 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Με τον όρο *ρητή συνάρτηση* εννοούμε μια συνάρτηση της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα με πραγματικο'υς συντελεστές. Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ που βρίσκεται στον αριθμητή είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x)$ που είναι στον παρονομαστή τότε από την ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\Pi(x)$ (*το πηλίκο*) και $R(x)$ (*το υπόλοιπο*) με τον βαθμό του $R(x)$ να είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$ τέτοια ώστε $P(x) = \Pi(x) \cdot Q(x) + R(x)$ και άρα

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Οπότε,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx = \int \Pi(x)\ dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\ dx \tag{3.5.1}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα ενός πολυωνύμου υπολογίζεται εύκολα,

$$\begin{aligned}\int (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\ dx &= a_n \int x^n\ dx + \cdots + a_1 \int x\ dx + a_0 \int dx \\ &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x\end{aligned}$$

από την σχέση (3.5.1) βλέπουμε ότι η ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης ανάγεται στην ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι *γνήσια μικρότερος* του βαθμού του παρονομαστή. Τέτοιες ρητές συναρτήσεις τις καλούμε *γνήσιες*.

Για να ολοκληρώσουμε μια γνήσια ρητή συνάρτηση χρησιμοποιούμε μια μέθοδο που καλείται *διάσπαση σε απλά κλάσματα*. Το πρώτο βήμα αυτής της μεθόδου είναι η παραγοντοποίηση του παρονομαστή.

Αποδεικνύεται ότι ένα πολυώνυμο $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ με πραγματικούς συντελεστές και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_{n+1} = 1$ παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο σε ένα γινόμενο πρωτοβαθμίων όρων της μορφής $x - \rho$, όπου $\rho \in \mathbb{R}$ και σε ένα γινόμενο δευτεροβαθμίων όρων (τριωνύμων) της μορφής $x^2 + bx + c$, τα οποία δεν έχουν πραγματικές ρίζες, με άλλα λόγια η διακρίνουσά τους είναι αρνητική. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής.

Θεώρημα 3.5.1. *Κάθε πολυώνυμο $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ με πραγματικούς συντελεστές και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_{n+1} = 1$ γράφεται στην μορφή*

$$Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$$

όπου

$$Q_1(x) = \prod_{i=1}^{m} (x-\rho_i)^{n_i} \text{ και } Q_2(x) = \prod_{j=1}^{\ell} (x^2 + b_j x + c_j)^{k_j} \tag{3.5.2}$$

όπου $n_i, k_j \in \mathbb{N}$, $\rho_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ *και* $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$.

Την μορφή $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$ με $Q_1(x), Q_2(x)$ όπως στην (3.5.2) θα την καλούμε *ανάλυση του* $Q(x)$. Αντιστοιχεί κατά κάποιο τρόπο στην γνωστή ανάλυση των ακεραίων σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Όπως οι πρώτοι αριθμοί δεν γράφονται ως γινόμενο μικρότερων αριθμών, τα πρωτοβάθμια πολυώνυμα καθώς και τα δευτεροβάθμια με αρνητική διακρίνουσα είναι τα μοναδικά πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές που δεν μπορούν να αναλυθούν σε γινόμενο άλλων απλούστερης μορφής.

Η διάσπαση τώρα μιας ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *μία γνήσια ρητή συνάρτηση.*

(i) *Αν* $Q(x) = (x-\rho)^n \cdot G(x)$, *όπου* $\rho \in \mathbb{R}$ *και το* $x-\rho$ *δεν διαιρεί το* $G(x)$ *(ισοδύναμα* $G(\rho) \neq 0$*) τότε υπάρχουν μοναδικοί* $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ *τέτοιοι ώστε*

$$\frac{P(x)}{(x-\rho)^n \cdot G(x)} = \frac{A_1}{x-\rho} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\rho)^n} + \frac{R(x)}{G(x)} \tag{3.5.3}$$

όπου ο βαθμός του $R(x)$ *είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του* $G(x)$.

(ii) *Αν* $Q(x) = (x^2+bx+c)^k \cdot G(x)$ *με* $\Delta = b^2 - 4c < 0$ *και το* x^2+bx+c *δεν διαιρεί το* $G(x)$, *τότε υπάρχουν μοναδικοί* $B_1, C_1, \dots, B_k, C_k \in \mathbb{R}$ *τέτοιοι ώστε*

$$\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^k \cdot G(x)} = \frac{B_1 x + C_1}{x^2+bx+c} + \cdots + \frac{B_k x + C_k}{(x^2+bx+c)^k} + \frac{R(x)}{G(x)} \tag{3.5.4}$$

όπου ο βαθμός του $R(x)$ *είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του* $G(x)$.

Παράδειγμα 3.5.3. Υπάρχουν μοναδικοί $A_1, \dots, A_5 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2} + \frac{A_4 x + A_5}{x^2+2x+5}$$

Από το Θεώρημα 3.5.2 έχουμε ότι η ολοκλήρωση των γνήσια ρητών συναρτήσεων ανάγεται στην ολοκλήρωση κλασμάτων της μορφής

$$\frac{1}{(x-\rho)^n} \qquad \text{και} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} \text{ με } b^2-4c<0$$

Παράδειγμα 3.5.4. Να αναλυθεί η συνάρτηση $\dfrac{10x}{(x+1)(x^2+9)}$ σε απλά κλάσματα και να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\,dx$..

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.2 έχουμε

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \tag{3.5.5}$$

όπου $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Για να βρούμε τις σταθερές A, B, C εργαζόμαστε ως εξής: Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα και εκτελώντας τις πράξεις στο δεξί μέλος της (3.5.5) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \\ &= \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C}{(x+1)(x^2+9)}\end{aligned}$$

και άρα

$$(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C = 10x$$

Συνεπώς έχουμε το σύστημα

$$A+B=0, B+C=10, 9A+C=0$$

απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι

$$A=-1, B=1, C=9$$

Άρα

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+9}{x^2+9}$$

Οπότε

$$\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\,dx = -\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{x+9}{x^2+9}\,dx \tag{3.5.6}$$

Έχουμε

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

και

$$\begin{aligned}\int \frac{x+9}{x^2+9}\,dx &= \frac{1}{9}\int \frac{x+9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx \\ &\overset{t=x/3, dx=3dt}{=} \frac{1}{9}\int \frac{3t+9}{t^2+1}\,3\,dt \\ &= \int \frac{t+3}{t^2+1}\,dt \\ &= \int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{3}{t^2+1}\,dt \\ &\overset{u=t^2+1, du=2t\ dt}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + 3\arctan t = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 3\arctan t \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{9}+1\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right).\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= -\ln|x+1| + \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}}{|x+1|}\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 3.5.5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$.

Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1-1+5} \\
&= \int \frac{1}{(x+1)^2+4} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx \\
&\overset{t=\frac{x+1}{2},\ dt=dx/2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 3.5.6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$.

Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+x}\,dx &= \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx \\
&= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)
\end{aligned}
$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ, ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

4.1 Βασικές έννοιες στον χώρο $\mathbb{R}^n$

Ο **διανυσματικός χώρος** $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των σημείων (**διανυσμάτων**) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, (όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$), εφοδιασμένο με τις πράξεις της *πρόσθεσης*:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

για κάθε $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και του *βαθμωτού πολλαπλασιασμού*:

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ αποτελούν την λεγόμενη **συνήθη βάση** του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρείστε ότι αν $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

Ορισμός 4.1.1. *Για κάθε* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, *και* $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *ορίζουμε*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Το $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ *καλείται* ***(το συνήθες) εσωτερικό γινόμενο των*** $\mathbf{x}$ *και* $\mathbf{y}$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις εξής ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ και άρα $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

3. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

4. $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

Αν $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ τότε τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ καλούνται **ορθογώνια**. Παρατηρείστε ότι $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ για κάθε $i \neq j$ δηλαδή οποιαδήποτε δύο διαφορετικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια.

Ορισμός 4.1.2. *Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε την **νόρμα** (ή **μέτρο**) του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. (***Τριγωνική Ανισότητα***) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Πρόταση 4.1.3. *(**Ανισότητα Cauchy-Schwarz**) Αν $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^d$ τότε*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \tag{4.1.1}$$

ή ισοδύναμα

$$\left| \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{d} y_i^2}$$

για κάθε $x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d \in \mathbb{R}$.

Ειδικότερα, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ (αντίστοιχα $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) αν και μόνο αν είτε (α) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είτε (β) $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και υπάρχει $\lambda \geq 0$ (αντ. $\lambda \leq 0$) τέτοιο ώστε $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$.

Ορισμός 4.1.4. *Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε την **απόσταση των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$** να είναι η νόρμα της διαφοράς τους δηλαδή*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

Από τις ιδιότητες της νόρμας προκύπτει ότι η απόσταση έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$,

Ορισμός 4.1.5. *Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\delta > 0$. Το σύνολο*

$$B_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta\}$$

*καλείται **ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας** δ.*

Με άλλα λόγια το $B_r(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν απο το $\mathbf{x}_0$ απόσταση *γνήσια μικρότερη* του δ. Οι ανοικτές μπάλες $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ καλούνται και *(βασικές ανοικτές) περιοχές* του $\mathbf{x}_0$.

Ορισμός 4.1.6. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(1) Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ θα καλείται ***εσωτερικό*** *σημείο του A αν το A περιέχει μια ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}_0$, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$.*

(2) Το A θα καλείται ***ανοικτό*** *αν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό του σημείο.*

4.2 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Οι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ταξινομούνται ως εξής:

(I) ***Πραγματικές*** (ή ***βαθμωτές***.) Είναι οι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$.

2) $f : D \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4) $f : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, όπου $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική συναρτήσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιστοιχίσουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη (όπως πχ. η θερμοκρασία, η ατμοσφαιρική πίεση) στα σημεία του χώρου.

(II) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις μιας μεταβλητής***, ***Παραμετρικές Καμπύλες***. Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ και $m \geq 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (t, t^2)$.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ με τύπο $f(t) = \left(t, t^2, \ldots, t^m\right)$.

Οι συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}^m$ με $X \subseteq \mathbb{R}$ γράφονται πάντα στην μορφή

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

όπου $f_1(t), \ldots, f_m(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής από το X στο $\mathbb{R}$.

Αν $X = I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια m-**διάστατη παραμετρική καμπύλη**. Πχ. η $f(t) = (\cos t, sint)$, μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο, η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t σαν χρόνο συναρτήσεις της μορφής $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να απεικονίζουν την θέση ενός κινητού στον χώρο την χρονική στιγμή t.

(III) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $n, m \geq 2$ (αν $n = m$ οι συναρτήσεις αυτές καλούνται και **διανυσματικά πεδία**).

Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = (-y, x)$.

Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να περιγράψουν ένα πεδίο βαρύτητας, ή ένα πεδίο ταχύτητας ρευστού.

4.3 Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Θα δώσουμε εδώ τους ορισμούς των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης για μια βαθμωτή συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Για ευκολία θα διατυπώσουμε τους ορισμούς για βαθμωτές συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Οι ορισμοί αυτοί γενικεύονται άμεσα για βαθμωτές συναρτήσεις τριών ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Ορισμός 4.3.1. ***(Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης)*** *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $(x_0, y_0) \in A$.*

Το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

αν υπάρχει καλείται **μερική παράγωγος ως προς** *x της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0) και συμβολίζεται με*

$$f_x(x_0, y_0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad ή \quad \partial_x f(x_0, y_0)$$

Ομοίως το όριο

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

αν υπάρχει καλείται **μερική παράγωγος ως προς** *y της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0) και συμβολίζεται με*

$$f_y(x_0, y_0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad ή \quad \partial_y f(x_0, y_0)$$

Οι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ καλούνται ***μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης*** *της f στο σημείο (x_0, y_0).*

Ορισμός 4.3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Αν υπάρχουν οι μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της f σε κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in A$ και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε η f θα καλείται* ***μερικώς παραγωγίσιμη****.*

Παράδειγμα 4.3.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 y + x y^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$ και $f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$.

Παράδειγμα 4.3.4. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = |x| + |y|$. Τότε οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν. Πράγματι,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

(β) Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|y|^2}}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{|y|}{y}$$

Όπως και στο (α) και τα δύο αυτά όρια δεν υπάρχουν.

Τέλος δίνουμε και τον παρακάτω ορισμό της *κλίσης* μιας συνάρτησης σε ένα σημείο (x_0, y_0).

Ορισμός 4.3.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, το διάνυσμα $\big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\big)$ θα καλείται* ***κλίση*** *(ή* ***ανάδελτα****) της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ και θα συμβολίζεται με $\nabla f(x_0, y_0)$ δηλαδή*

$$\nabla f(x_0,y_0) = \big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\big)$$

4.4 Παράγωγος κατά κατεύθυνση πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ θα καλείται *κατεύθυνση* στο $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 4.4.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Το όριο*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

καλείται ***παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο*** (x_0, y_0).

Η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο (x_0, y_0) συμβολίζεται με

$$f_{\mathbf{u}}(x_0,y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0,y_0) \quad \text{ή} \quad \partial_{\mathbf{u}} f(x_0,y_0)$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο (x_0, y_0) είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην κατευθυνόμενη ευθεία $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$. Πράγματι ας υποθέσουμε για απλότητα ότι $A = \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Επίσης αν $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

και ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Άρα η έννοια της κατευθυνόμενης παραγώγου γενικεύει την έννοια των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης.

Παράδειγμα 4.4.2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$. Υπολογίστε την $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Στην συνέχεια υπολογίστε τις $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$.

Λύση. Από τον ορισμό της παραγώγου κατά κατεύθυνση έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^4u_1^4 + t^3u_2^3}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4u_1^4 + t^3u_2^3}{t^3u_1^2 + t^3u_2^2} = \lim_{t\to 0}(tu_1^4 + u_2^3) = u_2^3$$

Έχουμε $f_x(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0) = 0$ και αντίστοιχα $f_y(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0) = 1$.

Ο Ορισμός 4.4.1 γενικεύεται και για πραγματικές συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών ως εξής.

Ορισμός 4.4.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ μοναδιαίο (δηλαδή $\|\mathbf{u}\| = 1$). Το όριο*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

καλείται παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0$.

4.5 Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

4.5.1 Βασικοί Ορισμοί

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0. \tag{4.5.1}$$

Πράγματι η (4.5.1) ισχύει αν και μόνο αν

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a \tag{4.5.2}$$

και άρα ο πραγματικός αριθμός a που ικανοποιεί την (4.5.1) είναι μοναδικός και ειδικότερα $a = f'(x_0)$.

Γενικεύουμε τώρα τα παραπάνω για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών ως εξής.

Ορισμός 4.5.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Λέμε ότι η f είναι* ***παραγωγίσιμη*** *(ή* ***διαφορίσιμη****)* ***στο σημείο*** *$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν υπάρχει ένα διάνυσμα $\mathbf{a} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε*

$$\lim_{\mathbf{h}\to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \tag{4.5.3}$$

ισοδύναμα

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{4.5.4}$$

Οι πραγματικοί αριθμοί a, b που ικανοποιούν την (4.5.4) είναι μοναδικοί όπως προκύπτει από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.5.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A. Αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιείται η (4.5.4), τότε τα a, b είναι μοναδικά και ισχύει ότι $a = f_x(x_0, y_0)$ και $b = f_y(x_0, y_0)$.*

Απόδειξη. Απο την (4.5.4) για $k = 0$ έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{|h|} = 0$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{h} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = a \\ &\Leftrightarrow f_x(x_0, y_0) = a\end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $f_y(x_0, y_0) = b$. □

Από τα παραπάνω έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό παραγωγισιμότητας.

Πρόταση 4.5.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι παραγωγισιμη στο (x_0, y_0).

(2) Η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) και ισχύει ότι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{4.5.5}$$

Ορισμός 4.5.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).*

1) Ο πίνακας γραμμή

$$\begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

*θα καλείται **παράγωγος της f στο σημείο** (x_0, y_0) και θα συμβολίζεται με $f'(x_0, y_0)$.*

2) Η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$T(x, y) = f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y$$

*θα καλείται **διαφορικό της f στο σημείο** (x_0, y_0).*

Παρατήρηση 4.5.5. 1) Ταυτίζοντας τον πίνακα γραμμή $[a \;\; b]$ με το διάνυσμα (a, b) μπορούμε να πούμε ότι η παράγωγος της f στο (x_0, y_0) είναι η κλίση $\nabla f(x_0, y_0) = \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big)$ της f στο (x_0, y_0).

2) Το διαφορικό της f στο (x_0, y_0) γράφεται και υπό την μορφή εσωτερικού γινομένου ως εξής

$$T(x, y) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x, y)$$

4.5.2 Γραμμικοποίηση παραγωγίσιμης συνάρτησης

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). Η συνάρτηση $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

καλείται **γραμμικοποίηση της f στο** (x_0, y_0).

Παρατήρηση 4.5.6. Αν θέσουμε

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - T_1(x_0 + h, y_0 + k) = R(h, k)$$

από την (4.5.5) παίρνουμε ότι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το $|R(h, k)|$ είναι πολύ μικρό όταν πλησιάζουμε το $(0, 0)$. Άρα αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε για σημεία (x, y) αρκετά κοντά στο (x_0, y_0) θα έχουμε ότι

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Άρα αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε η γραμμικοποίηση της f είναι μια πολύ καλή προσέγγιση της για (x, y) αρκετά κοντά στο (x_0, y_0).

4.5.3 Συνέχεια μερικών παραγώγων και παραγωγισιμότητα

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια μερικώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται κλα΄σης C^1 αν οι συναρτήσεις f_x και f_y είναι συνεχείς. Ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 4.5.7. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι κλα΄σης C^1 τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.*

Παράδειγμα 4.5.8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = e^x y + x^2 e^y$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης βρείτε την παράγωγο στο σημείο $(1, 0)$.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = ye^x + 2xe^y$ και $f_y(x, y) = e^x + x^2 e^y$. Οι f_x, f_y είναι συνεχείς και άρα η f είναι παραγωγίσιμη. Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο (x, y) εξ ορισμού είναι ο πίνακας γραμμή $f'(x, y) = [f_x(x, y) \quad f_y(x, y)]$. Άρα $f'(1, 0) = [2 \quad e + 1]$.

4.5.4 Επιφάνειες και εφαπτόμενα επίπεδα

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Η **επιφάνεια της f** (ή το **γράφημα της f**) είναι το σύνολο

$$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in A \text{ και } z = f(x, y)\} \tag{4.5.6}$$

Έστω (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). Έστω $z_0 = f(x_0, y_0)$. Το επίπεδο π του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το (x_0, y_0, z_0) και περιέχει όλα τα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{4.5.7}$$

θα καλείται ***εφαπτόμενο επίπεδο*** της επιφάνειας της f στο σημείο (x_0, y_0, z_0). Παρατηρείστε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο είναι στην ουσία η επιφάνεια της γραμμικοποίησης $T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ της f.

4.5.5 Κλίση και παράγωγος κατά κατεύθυνση για παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Ισχύει η εξής πρόταση για την κατά κατεύθυνση παράγωγο όταν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

Πρόταση 4.5.9. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). Τότε για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} \\ &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

Η Πρόταση 4.5.9 δεν ισχύει απαραίτητα αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). Παραθέτουμε σχετικά τα επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.5.10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^3u_1^3 + t^3u_2^3}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3 + u_2^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3 + u_2^3.$$

αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

Ειδικότερα, για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $f_x(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0, 0) = 1$, και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$, $f_y(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0, 0) = 1$.

Από την Πρόταση 4.5.9 αν η f ήταν C^1 τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1 + u_2$$

Άρα θα είχαμε

$$u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$$

για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, άτοπο.

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 4.5.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $(x_0, y_0) \in A$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι C^1 και $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ τότε οι κατευθύνσεις*

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

είναι αυτές για τις οποίες η f έχει την μέγιστη και αντίστοιχα ελάχιστη κατευθυνόμενη παράγωγο.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμηστο $\mathbf{x}_0$ απο την Πρόταση 4.5.9

έχουμε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| = |\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\cdot\|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{4.5.9}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot \mathbf{u}_1 = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}\\ = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (4.5.9) παίρνουμε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0)$$

Ομοίως για το $\mathbf{u}_2$. □

4.6 Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, τέτοια ώστε οι $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ υπάρχουν σε κάθε $(x,y)\in A$. Έστω $(x_0,y_0)\in A$. Τα όρια

$$f_{xx}(x_0,y_0) = (f_x)_x(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f_x(x,y_0)-f_x(x_0,y_0)}{x-x_0},$$
$$f_{xy}(x_0,y_0) = (f_x)_y(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f_x(x_0,y)-f_x(x_0,y_0)}{y-y_0}$$
$$f_{yx}(x_0,y_0) = (f_y)_x(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f_y(x,y_0)-f_y(x_0,y_0)}{x-x_0}$$
$$f_{yy}(x_0,y_0) = (f_y)_y(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f_y(x_0,y)-f_y(x_0,y_0)}{y-y_0},$$

αν υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί καλούνται ***μερικές παράγωγοι της*** f ***στο*** (x_0,y_0) ***δεύτερης τάξης***. Ειδικότερα οι $f_{xy}(x_0,y_0)$ και $f_{yx}(x_0,y_0)$ καλούνται ***μεικτές*** μερικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0,y_0) δεύτερης τάξης.

Επίσης χρησιμοποιούνται και οι συμβολισμοί

$$f_{xx}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \quad f_{xy}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

$$f_{yx}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \quad f_{yy}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Παράδειγμα 4.6.1. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^3+y^3+x^2y+xy^2$. Για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, έχουμε $f_x(x,y) = 3x^2+2xy+y^2$, $f_y(x,y) = 3y^2+x^2+2xy$ και

$$f_{xx}(x,y)(=(f_x)_x(x,y)) = 6x+2y, \quad f_{xy}(x,y)(=(f_x)_y(x,y)) = 2x+2y,$$
$$f_{yx}(x,y)(=(f_y)_x(x,y)) = 2x+2y \quad f_{yy}(x,y)(=(f_y)_y(x,y)) = 6y+2x.$$

Στο παραπάνω παράδειγμα οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για την συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 4.6.2. *(Schwarz) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f εως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τότε οι μεικτές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} της f είναι ίσες.*

Ορισμός 4.6.3. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται **κλάσης** $C^2(A)$ αν οι μερικές παράγωγοι της f εως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς συναρτήσεις.*

Ορισμός 4.6.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f : A \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in A$. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης υπάρχουν στο (x_0, y_0). Ο **Εσσιανός πίνακας της** f **στο** (x_0, y_0) είναι ο πίνακας*

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \tag{4.6.1}$$

Παρατήρηση 4.6.5. Παρατηρείστε ότι αν η f είναι κλάσης $C^2(A)$ τότε από το Θεώρημα 4.6.2 $f_{xy} = f_{yx}$ και άρα σε κάθε $(x_0, y_0) \in A$ ο Εσσιανός της πίνακας είναι συμμετρικός.

Στα επόμενα θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι **κλάσης** C^2 αν οι συναρτήσεις των μερικών παραγώγων της έως και δεύτερης τάξης ορίζονται και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Θυμίζουμε ότι αν η f είναι κλάσης C^2, τότε $f_{xy} = f_{yx}$ και άρα ο πίνακας $f''(x_0, y_0)$ θα είναι **συμμετρικός**. Ο Εσσιανός πίνακας της f θεωρείται ως η δεύτερη παράγωγος της f στο (x_0, y_0).

4.7 Πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης

Ορισμός 4.7.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Υποθέτουμε ότι η f είναι C^2 συνάρτηση. Έστω επίσης ένα σημείο $(a_1, a_2) \in A$. Το πολυώνυμο*

$$T_1(x, y) = f(a_1, a_2) + f_x(a_1, a_2)(x - a_1) + f_y(a_1, a_2)(y - a_2).$$

*καλείται **πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της** f **με κέντρο το** (a_1, a_2).*

Αντίστοιχα, το πολυώνυμο

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= T_1(x, y) + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(a_1, a_2)(x - a_1)^2 + 2f_{xy}(a_1, a_2)(x - a_1)(y - a_2) + f_{yy}(a_1, a_2)(y - a_2)^2\Big) \\ &= f(a_1, a_2) + f_x(a_1, a_2)(x - a_1) + f_y(a_1, a_2)(y - a_2) \\ &+ \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(a_1, a_2)(x - a_1)^2 + 2f_{xy}(a_1, a_2)(x - a_1)(y - a_2) + f_{yy}(a_1, a_2)(y - a_2)^2\Big]. \end{aligned}$$

*καλείται **πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της** f **με κέντρο το** (a_1, a_2).*

Παράδειγμα 4.7.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{3x+2y}$. Υπολογίστε τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 1)$.

Απάντηση: Έχουμε

$$f_x(x, y) = 3e^{3x+2y}, \quad f_y(x, y) = 2e^{3x+2y}$$

και

$$f_{xx}(x,y) = (f_x)_x(x,y) = 9e^{3x+2y},\ \ f_{xy}(x,y) = (f_x)_y(x,y) = 6e^{3x+2y}$$
$$f_{yx}(x,y) = (f_y)_x(x,y) = 6e^{3x+2y},\ f_{yy}(x,y) = (f_y)_y(x,y) = 4e^{3x+2y}.$$

Επίσης βλέπουμε ότι

$$f_x(0,1) = 3e^2,\ \ f_y(0,1) = 2e^2$$

και

$$f_{xx}(0,1) = 9e^2,\ \ f_{xy}(0,1) = f_{yx}(0,1) = 6e^2,\ \ f_{yy}(0,1) = 4e^2.$$

Συνεπώς το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $(a_1,a_2) = (0,1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1) \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y-1) \\ &= -e^2 + 3e^2x + 2e^2y. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,1)x^2 + 2f_{xy}(0,1)x(y-1) + f_{yy}(0,1)(y-1)^2\right] \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y-1) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[9e^2x^2 + 12e^2x(y-1) + 4e^2(y-1)^2\right]. \end{aligned}$$

Στη Παράγραφο όπου ορίσαμε την παράγωγο μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είδαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο (a_1,a_2) αν και μόνο αν οι μερικές παράγωγοι $f_x(a_1,a_2)$ και $f_y(a_1,a_2)$ υπάρχουν και επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - f_x(a_1,a_2)(x-a_1) - f_y(a_1,a_2)(y-a_2)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|} = 0. \tag{4.7.1}$$

Επειδή το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το (a_1,a_2) είναι το

$$T_1(x,y) = f(a_1,a_2) + f_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f_y(a_1,a_2)(y-a_2),$$

ο τύπος (4.7.1) γράφεται

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|} = 0. \tag{4.7.2}$$

Το επόμενο θεώρημα γενικεύει την (4.7.2) όταν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης.

Θεώρημα 4.7.3 (θεώρημα Taylor). *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f\in C^2$ συνάρτηση. Έστω $(a_1,a_2)\in A$ και $T_2(x,y)$ το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το (a_1,a_2). Τότε,*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|^2} = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = 0. \tag{4.7.3}$$

Συνεπώς για κάθε $(x, y) \in A$,

$$f(x, y) = T_m(x, y) + R_2(x, y) \tag{4.7.4}$$

με

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{R_2(x, y)}{\|(x - a_1, y - a_2)\|} = 0. \tag{4.7.5}$$

Με άλλα λόγια θα μπορούσαμε να πούμε ότι το πολυώνυμο Taylor $T_2(x, y)$ προσεγγίζει με πολύ καλή ακρίβεια την $f(x, y)$ για σημεία (x, y) που είναι αρκετά κοντά στο (a_1, a_2).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

5.1 Τοπικά ακρότατα και Κρίσιμα σημεία

Ορισμός 5.1.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in X$.*

(1) Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ***τοπικό μέγιστο*** *αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$f(a_1, a_2) \geq f(x, y) \tag{5.1.1}$$

για όλα τα $\mathbf{x} = (x, y) \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.

(2) Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ ***τοπικό ελάχιστο*** *αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$f(a_1, a_2) \leq f(x, y) \tag{5.1.2}$$

για όλα τα $\mathbf{x} = (x, y) \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.

(3) Λέμε ότι η f έχει στο το $\mathbf{x}_0$ ***τοπικό ακρότατο*** *αν η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.*

Ορισμός 5.1.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ καλείται *κρίσιμο* σημείο της f αν

$$f_x(\mathbf{a}) = f_y(\mathbf{a}) = 0$$

ή ισοδύναμα αν

$$\nabla f(a_1, a_2) = (0, 0)$$

Παρατήρηση 5.1.3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο (a_1, a_2) είναι

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2).$$

Συνεπώς, αν το (a_1, a_2) είναι κρίσιμο σημείο της f τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο (a_1, a_2) γίνεται $z = f(a_1, a_2)$ και άρα είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο.

Πρόταση 5.1.4 (σχέση τοπικών ακροτάτων και κρίσιμων σημείων). *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Τότε, κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της f είναι και κρίσιμο σημείο της f.*

Όπως συμβαίνει και στις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, το αντίστροφο της Πρότασης 5.1.4 δεν ισχύει. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ένα σημείο $\mathbf{a} \in A$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν σημεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_\delta(\mathbf{a})$, τέτοια ώστε

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x}_2).$$

Γεωμετρικά (δείτε και Παρατήρηση 5.1.3) αυτό σημαίνει ότι το εφαπτόμενο οριζόντιο επίπεδο $z = f(a_1, a_2)$ *δεν αφήνει την επιφάνεια της f από τη μία πλευρά του.*

Σε πολλές περιπτώσεις το γράφημα της $f(x, y)$ σε ένα κρίσιμο σημείο που δεν είναι τοπικό ακρότατο μοιάζει με την επιφάνεια μιας σέλας και το σημείο καλείται για τον λόγο αυτό σημείο *σέλας* ή *σαγματικό*. Ειδικότερα υπάρχουν δύο ευθείες που διέρχονται από το σημείο αυτό και στην μια από αυτές το σημείο θα είναι τοπικό μέγιστο για την f ενώ στην άλλη θα είναι τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 5.1.5. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 - y^2$. (α) Δείξτε το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f. (β) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Απάντηση: (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 2x$ και $f_y(x, y) = 2y$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη. Από το Θεώρημα 5.1.4 έχουμε ότι τα τοπικά ακρότατα της f αν υπάρχουν θα είναι κρίσιμα σημεία δηλαδή θα είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το $(0, 0)$ είναι η μοναδική λύση.

(β) Παρατηρούμε ότι

(1) για κάθε σημείο $(x, y) \neq (0, 0)$ της ευθείας $y = 0$ έχουμε $f(x, 0) = x^2 > 0$ και άρα $f(x, 0) \geq f(0, 0)$ δηλαδή το $(0, 0)$ είναι ελάχιστο για την f στην ευθεία $y = 0$.

(2) για κάθε σημείο $(x, y) \neq (0, 0)$ της ευθείας $x = 0$ έχουμε $f(0, y) = -y^2 < 0$ και άρα $f(0, y) \leq f(0, 0)$ δηλαδή το $(0, 0)$ είναι μέγιστο για την f στην ευθεία $x = 0$..

Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Από το (α) η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη και άρα από το Θεώρημα 5.1.4 όλα τα τοπικά ακρότατά θα είναι κρίσιμα σημεία της. Όμως είδαμε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο, το $(0, 0)$, που είναι σαγματικό σημείο. Άρα δεν υπάρχουν σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

Παράδειγμα 5.1.6. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^4$. (α) Δείξτε το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f. (β) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Απάντηση: (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3$ και $f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3 = 0 \\ f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3 = 0 \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων, παίρνουμε ότι $x^3 + y^3 = 0$ ή ισοδύναμα

$$y = -x \tag{5.1.3}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$4x^3 - 4(x-y)^3 = 4x^3 - 4(2x)^3 = 4x^3 - 32x^3 = -28x^3 = 0$$

και άρα $x = 0$. Οπότε απο την (5.1.3) παίρνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$.

(β) Παρατηρούμε ότι

(1) $f(0,0) = 0$,

(2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$ και

(3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,-x) = 2x^4 - 16x^4 < 0$.

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Από το (α) η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη και άρα από το Θεώρημα 5.1.4 όλα τα τοπικά ακρότατά θα είναι κρίσιμα σημεία της. Όμως είδαμε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο, το $(0,0)$, που είναι σαγματικό σημείο. Άρα δεν υπάρχουν σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

5.2 Το Κριτηριο Δευτερης Παραγωγου συναρτησης δυο μεταβλητών

Θεώρημα 5.2.1. ***(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών)*** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, και $f : A \to \mathbb{R}$ κλάσης $C^2(A)$. Έστω $(x_0, y_0) \in A$ κρίσιμο σημείο της f, δηλαδή $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Έστω*

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

ο Εσσιανός πίνακας της f στο (x_0, y_0) και

$$\Delta(x_0, y_0) = \det f''(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left(f_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 \tag{5.2.1}$$

η ορίζουσά του.

(i) *Αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ και $\Delta(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0, y_0).*

(ii) *Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ και $\Delta(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0, y_0).*

(iii) *Αν $\Delta(x_0, y_0) < 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f.*

Παρατηρήσεις 5.2.2. (α) Αν $\Delta(x_0, y_0) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν μπορεί να αποφανθεί αν το (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο ή όχι. Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνάρτησης που μελετούμε για να εξάγουμε πληροφορία για το εν λόγω σημείο.

(β) Επίσης υπάρχουν κάποιες λίγες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετούμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου το κριτήριο δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί. Πχ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0,0)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο που έχει η $f(x,y) = x^2 + y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$ και άρα η f έχει στο $(0,0)$ ολικό ελάχιστο. Αν τώρα υπήρχε και άλλο τοπικό ακρότατο τότε θα έπρεπε αυτό να ήταν κρίσιμο σημείο ισοδύναμα θα ήταν λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned}$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0,0)$, η f δεν έχει άλλο τοπικό ακρότατο εκτός του $(0,0)$.

Παράδειγμα 5.2.3. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y \\ f_y(x,y) &= 3y^2 + 3x \\ f_{xx}(x,y) &= 6x \\ f_{yy}(x,y) &= 6y \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 3 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y = 0 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 + 3x = 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = -x^2$ και άρα αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

Άρα έχουμε δύο κρίσιμα σημεία, τα $(0,0)$ και $(-1,-1)$.

Για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = 36xy - 9$$

Έχουμε $\Delta(0,0) = -9 < 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(-1,-1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$. Άρα το $(-1,-1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Παράδειγμα 5.2.4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση: Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y \\ f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y \\ f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - 4 \\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2 - 4 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4 \end{aligned}$$

όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) = 0$$
$$f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y) = 0$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \;\text{ και }\; (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = (12x^2-4)\cdot(12y^2-4) - 16$$

(1) $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε σημείο $(x,y) \neq (0,0)$ της ευθείας $y = 0$ με $x \in (-1,1)$ είναι $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και

(γ) για κάθε σημείο $(x,y) \neq (0,0)$ της ευθείας $y = x$ είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$.

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.