Διανυσματικός λογισμός II

Κατσουλέας Γεώργιος

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

gekats@mail.ntua.gr

31 Οκτωβρίου 2020

Περιεχόμενα

Οι χώροι $\mathbb{R}^n$ ως διανυσματικοί χώροι

Το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

εφοδιάζόμενο με τις πράξεις

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_1 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)\end{aligned}$$

μπορεί να θεωρηθεί δ.χ.
Δύο στοιχεία $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ του $\mathbb{R}^n$ λέγονται ίσα (συμβ. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$) αν και μόνο αν

$$x_i = y_i, \quad \text{για κάθε} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ένα στοιχείο $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ αναλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= x_1 \overrightarrow{e}_1 + x_2 \overrightarrow{e}_2 + \cdots + x_n \overrightarrow{e}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i,\end{aligned}$$

όπου συμβολίζουμε $\overrightarrow{e}_i = \left(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{Θέση}-i}, 0, \ldots, 0\right)$.

Βάσεις του $\mathbb{R}^n$

Ορισμός

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{e}_i\} \subset \mathbb{R}^n$ καλείται βάση του $\mathbb{R}^n$ όταν:

- Τα διανύσματα $\{\vec{e}_i\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή ικανοποιείται η σχέση

  $$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

  Με άλλα λόγια, το σύστημα των εξισώσεων

  $$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n \neq \vec{0}$$

  έχει μοναδική λύση τη μηδενική ($\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$).

- Τα διανύσματα $\{\vec{e}_i\}$ παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^n$, δηλαδή κάθε διάνυσμα $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτών ως εξής:

  $$\overrightarrow{OA} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n,$$

  για κάποιους συντελεστές $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Οι αριθμοί $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ καλούνται συντεταγμένες του σημείου A ως προς τη βάση $\{\vec{e}_i\}$.

Παρατηρήσεις στον ορισμό της βάσης

- Όταν ένα σύνολο διανυσμάτων $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k\right\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, κάποιο από αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικώς συνδυασμός των υπολοίπων.
- Αν $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right\}$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, τότε αποδεικνύεται ότι αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^n$ ακριβώς όταν

$$k = n.$$

- Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει άπειρο πλήθος βάσεων.
- Αν $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k\right\} \subset \mathbb{R}^n$ με

$$k > n,$$

τότε τα διανύσματα $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k\right\}$ είναι οπωσδήποτε γραμμικώς εξαρτημένα.

Παρατηρήσεις στον $\mathbb{R}^2$

- Οποιαδήποτε δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν είναι μη παράλληλα.
- Δύο διανύσματα $\overrightarrow{OA} = (x_1, x_2)$ και $\overrightarrow{OB} = (y_1, y_2)$ του $\mathbb{R}^2$ είναι παράλληλα (άρα γραμμικώς εξαρτημένα) ακριβώς όταν:

Παρατηρήσεις στον $\mathbb{R}^2$

- Οποιαδήποτε δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν είναι μη παράλληλα.
- Δύο διανύσματα $\overrightarrow{OA} = (x_1, x_2)$ και $\overrightarrow{OB} = (y_1, y_2)$ του $\mathbb{R}^2$ είναι παράλληλα (άρα γραμμικώς εξαρτημένα) ακριβώς όταν:
  - Το σύστημα
    $$\lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
    έχει και μη μηδενικές λύσεις.
  - Εύκολο κριτήριο: $\overrightarrow{OA} = (x_1, x_2) // \overrightarrow{OB} = (y_1, y_2) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$
- Όταν $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$, κάθε σημείο G του $\mathbb{R}^2$ με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OG}$ αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\overrightarrow{O\Gamma} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$.
- Περισσότερα των τριών διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ είναι πάντα γρ. εξαρτημένα.
- Κριτήριο για την καθετότητα δύο διανυσμάτων θα παρουσιαστεί παρακάτω, σε σχέση με το εσωτ. γινόμενό τους.

Παρατηρήσεις στον $\mathbb{R}^3$

- Οποιαδήποτε δύο μη παράλληλα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. (Ωστόσο, δεν αποτελούν βάση.)
- Τρία διανύσματα $\overrightarrow{OA} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{OB} = (y_1, y_2, y_3)$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = (z_1, z_2, z_3)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ακριβώς όταν είναι μη συνεπίπεδα:

Παρατηρήσεις στον $\mathbb{R}^3$

- Οποιαδήποτε δύο μη παράλληλα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. (Ωστόσο, δεν αποτελούν βάση.)
- Τρία διανύσματα $\overrightarrow{OA} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{OB} = (y_1, y_2, y_3)$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = (z_1, z_2, z_3)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ακριβώς όταν είναι μη συνεπίπεδα:
  - Το σύστημα
  $$\lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
  έχει αποκλειστικά τη μηδενική λύση.
  - Εύκολο κριτήριο: $\overrightarrow{OA} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{OB} = (y_1, y_2, y_3), \overrightarrow{O\Gamma} = (z_1, z_2, z_3)$ γρ. ανεξ. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$
- Όταν $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}$ γρ. ανεξ., κάθε σημείο X του $\mathbb{R}^3$ με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OX}$ αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\overrightarrow{OX} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{O\Gamma}$.
- Κριτήριο για την γρ. ανεξαρτησία δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ θα παρουσιαστεί παρακάτω, σε σχέση με το εξωτ. γινόμενό τους.
- Περισσότερα των τεσσάρων διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι πάντα γρ. εξαρτημένα.

Παράδειγμα

Δίνονται τα σημεία του $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma = (1, -1), \Delta = (4, 3), A = (-1, 5), B = (7, 1).$$

Να εξεταστεί κατά πόσον τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι βάση του επιπέδου.

Παράδειγμα

Δίνονται τα σημεία του $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma = (1, -1), \Delta = (4, 3), A = (-1, 5), B = (7, 1).$$

Να εξεταστεί κατά πόσον τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι βάση του επιπέδου.
Τα διανύσματα

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (x_\Delta - x_\Gamma, y_\Delta - y_\Gamma) = (3, 4), \quad \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (8, -4).$$

είναι παράλληλα όταν το σύστημα

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

έχει αποκλειστικά τη μηδενική λύση.

- $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 8 \cdot 4 = -44 \neq 0.$
- $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 8 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{\Gamma_1 \to \frac{1}{3}\Gamma_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 4\Gamma_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{44}{3} & 0 \end{array}\right]$

Άσκηση 1: Δίνονται τα σημεία του $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma = (1,4), \Delta = (-3,5), A = (5,7), B = (9,1).$$

Να εξεταστεί κατά πόσον τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι:

- Παράλληλα,
- Ίσα,
- Κάθετα.
- Βάση του επιπέδου.

Στην περίπτωση που αποτελούν βάση, να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του σημείου $(1,1)$ ως προς τη βάση αυτή.

Άσκηση 2: Αν $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι και τα διανύσματα

- $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} + 4\overrightarrow{w}$
- $2\overrightarrow{v} + 5\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$
- $3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$

είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

Εσωτερικό γινόμενο στο δ.χ. V

Ορισμός

Έστω V διαν. χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ που απεικονίζει

$$(a, b) \to \langle a, b \rangle$$

έχει τις ακόλουθες ιδιότητες (για κάθε $a, b, c \in V, \lambda \in \mathbb{R}$):

- $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$,
- $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$,
- $\langle \lambda \cdot a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$,
- $\langle a, a \rangle > 0$, αν $a \neq 0$,
- $\langle a, a \rangle = 0$, ανν $a = 0$.

Μία τέτοια συνάρτηση καλείται εσωτερικό γινόμενο στο V και το ζεύγος $(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ καλείται χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Παρατηρήσεις στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου

Από τις ιδιότητες του ορισμού, έπεται ότι:

- $\langle a, b+c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$,
- $\langle a, \lambda b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$, για $a, b, c \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, έχουμε

- $\langle a, b+c \rangle = \langle b+c, a \rangle = \langle b, a \rangle + \langle c, a \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$.
- $\langle a, \lambda b \rangle = \langle \lambda b, a \rangle = \lambda \langle b, a \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$.

Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^2$

1. Στον $\mathbb{R}^2$, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

για $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ και $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$.

2. Στον $\mathbb{R}^2$, η απεικόνιση:

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + 2 a_2 b_2.$$

Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^2$

1. Στον $\mathbb{R}^2$, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο
$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$
για $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ και $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$.
2. Στον $\mathbb{R}^2$, η απεικόνιση:
$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + 2a_2 b_2.$$

Πράγματι, τα αξιώματα του εσωτερικού γινομένου προκύπτουν εύκολα. Π.χ., για $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, έχουμε
$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle &= a_1^2 - a_2 a_1 - a_1 a_2 + 2a_2^2 \\ &= a_1^2 - 2a_2 a_1 + a_2^2 + a_2^2 \\ &= (a_1 - a_2)^2 + a_2^2 > 0. \end{aligned}$$

κ.ο.κ.

Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^2$ (συνέχεια)

1. Έστω $\Delta \in M_2(\mathbb{R})$ με $\Delta = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$ $(\mu, \nu > 0)$. Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ με

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

για $\vec{a} = (a_1, a_2)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2)$, αποτελεί εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^2$ (συνέχεια)

1. Έστω $\Delta \in M_2(\mathbb{R})$ με $\Delta = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$ $(\mu, \nu > 0)$. Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ με

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

για $\vec{a} = (a_1, a_2)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2)$, αποτελεί εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu b_1 \\ \nu b_2 \end{bmatrix} = \mu a_1 b_1 + \nu a_2 b_2,$$

ώστε ικανοποιούνται όλες οι ιδιότητες.

Μέτρο (ή νόρμα) στο δ.χ. V

Ορισμός

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, η συνάρτηση $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ που απεικονίζει

$$a \to \|a\|$$

με

$$\|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2}$$

καλείται μέτρο (ή νόρμα) στο V.

- $\|a\| \geq 0, \forall a \in V$,
- $\|\lambda \cdot a\| = |\lambda| \, \|a\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, a \in V$,
- $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|, \forall a, b \in V$,
- $\|a + b\| \geq |\|a\| - \|b\||, \forall a \in V$.

Ορισμός

Έστω $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n), B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ με αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$. Τότε, απόσταση των σημείων

$$d(A, B) = \left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

- $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,
- $d(A, B) = d(B, A)$,
- $d(A, B) \leq d(A, \Gamma) + d(B, \Gamma)$.

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned}\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle &\equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.\end{aligned}$$

καλείται Ευκλείδειος χώρος.

Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

Για δύο διανύσματα $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ δίνεται από τις σχέσεις

- $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
- $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \| \overrightarrow{a} \| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \cos \left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}} \right)$

Να δειχθεί ότι οι σχέσεις αυτές είναι ισοδύναμες και ότι αποτελούν εσωτερικό γινόμενο.

Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

Για δύο διανύσματα $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ δίνεται από τις σχέσεις

- $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
- $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \| \overrightarrow{a} \| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \cos \left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}} \right)$

Να δειχθεί ότι οι σχέσεις αυτές είναι ισοδύναμες και ότι αποτελούν εσωτερικό γινόμενο.

Παρατήρηση: Η δεύτερη σχέση συνεπάγεται ότι

$$\| \overrightarrow{a} \| = \sqrt{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle}$$

και επίσης

$$\cos \left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}} \right) = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}{\| \overrightarrow{a} \| \left\| \overrightarrow{b} \right\|},$$

δηλαδή οι βασικές έννοιες του μήκους και της γωνίας μπορούν να δοθούν αποκλειστικά με χρήση της έννοιας του εσωτερικού γινομένου.

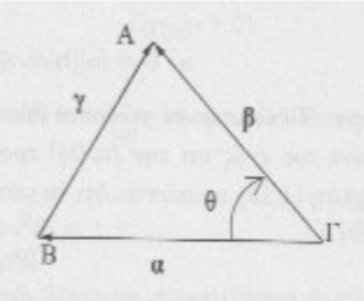
Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ (απόδειξη ισοδυναμίας σχέσεων)

Βήμα 1ο: Νόμος συνημιτόνων

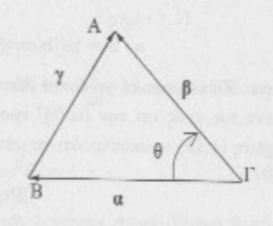
Πρόταση

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ= $\vec{\alpha}$, ΓΑ= $\vec{\beta}$, ΑΒ= $\vec{\gamma}$,ισχύει ότι

$$\|\vec{\alpha}\|^2 = \left\|\vec{\beta}\right\|^2 + \|\vec{\gamma}\|^2 - 2\left\|\vec{\beta}\right\| \|\vec{\gamma}\| \cos A$$



Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ (απόδειξη ισοδυναμίας σχέσεων)



Προφανώς

$$\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}.$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \|\vec{\alpha}\|^2 &= \left\|\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right\|^2 = \langle \vec{\beta} - \vec{\gamma}, \vec{\beta} - \vec{\gamma} \rangle = \left\|\vec{\beta}\right\|^2 + \|\vec{\gamma}\|^2 - 2\langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \\ &= \left\|\vec{\beta}\right\|^2 + \|\vec{\gamma}\|^2 - 2\left\|\vec{\beta}\right\| \|\vec{\gamma}\| \cos\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) \end{aligned}$$

Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ (απόδειξη ισοδυναμίας σχέσεων – συνέχεια)

Βήμα 2ο: Για δύο διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{\beta} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ θα δείξουμε ότι

$$\langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Θεωρούμε τα σημεία $A(a_1, a_2, a_3)$ και $B(b_1, b_2, b_3)$ και εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB, λαμβάνουμε

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2\,|OA|\,|OB| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}\right).$$

Ισοδύναμα,

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\langle \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} \rangle$$

ώστε

$$\langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Παρατηρήσεις στο εσωτερικό γινόμενο

- $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
  Απόδειξη: Για το ευθύ, υποθέτοντας για κάποια μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ ότι
  $$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0,$$
  προφανώς $\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0$, απ΄όπου συμπεραίνουμε την καθετότητα.
  Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$, τότε τα $\vec{a}, \vec{b}$ κάθετα, διότι στη διεύθυνση του μηδενικού μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε διεύθυνση.
  Για το αντίστροφο, υποθέτοντας ότι $\vec{a} \perp \vec{b}$, έχουμε $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
  Άρα από τον ορισμό $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$, έχουμε
  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.
- $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \pm \left|\|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\|\right| \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b}$.

Κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

Το σύνολο $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ με

$$\vec{e}_i = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{Θέση}-i}, 0, \dots, 0\right)$$

καλείται κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\|\vec{e}_i\| = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

και

$$\vec{e}_i \perp \vec{e}_j, \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Ασκησούλες...

- α Δείξτε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{a} = (1, 1, 3)$ και $\overrightarrow{b} = (2, 1, 0)$ δεν είναι συγγραμμικά.
  β Βρείτε διάνσυμα $\overrightarrow{c}$, έτσι ώστε το σύνολο $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ να αποτελεί βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$.
  γ Υπολογίστε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{b}$.
- Έστω $\overrightarrow{a} = (-1, 2)$. Να βρεθεί $\overrightarrow{b} = (x, y)$, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$ και $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \sqrt{5}$.
- Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{a} = (2, -6, -3)$ και $\overrightarrow{b} = (4, 3 - 1)$.
- Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου με κορυφές

$$A = (2, -1, 1), \quad B = (1, -3, -5), \quad \Gamma = (3, -4, -4).$$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky:

Πρόταση

Για κάθε $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $\left|\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle\right| \leq \|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\|$.

Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky:

Πρόταση

Για κάθε $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $\left|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\right| \leq \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\|$.

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα, αφού είναι

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

και

$$\left|\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)\right| \leq 1.$$

Νόμος παραλληλογράμμου

Πρόταση

Για κάθε $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει

$$\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\|^2 = 2\left(\|\overrightarrow{a}\|^2 + \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2\right).$$

Νόμος παραλληλογράμμου

Πρόταση

Για κάθε $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει
$$\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\|^2 + \left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|^2 = 2\left(\|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2\right).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\|^2 &= \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \left\|\vec{b}\right\|^2\end{aligned}$$

και ομοίως
$$\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \left\|\vec{b}\right\|^2,$$

ώστε προσθέτοντας έχουμε το συμπέρασμα.

Τριγωνική ανισότητα

Πρόταση

Για κάθε $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $\left\|\vec{a} \pm \vec{b}\right\| \leq \|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|$.

Τριγωνική ανισότητα

Πρόταση

Για κάθε $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $\left\|\vec{a} \pm \vec{b}\right\| \leq \|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{a} \pm \vec{b}\right\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 \pm 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \left\|\vec{b}\right\|^2 \\
&\leq \|\vec{a}\|^2 + 2\left|\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle\right| + \left\|\vec{b}\right\|^2 \\
&\leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|^2 \\
&\leq \left(\|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|\right)^2.
\end{aligned}$$

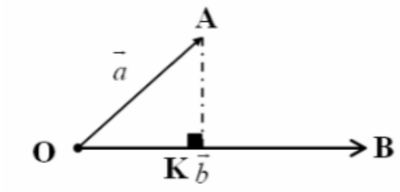
Αποτετραγωνίζοντας έχουμε το συμπέρασμα.

Προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ ($Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$)

Πρόταση

Έστω $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Η προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ δίνεται από τον τύπο

$$Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}{\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \rangle}\overrightarrow{b}$$



Προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ $(Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a})$

Πρόταση

Έστω $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Η προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ δίνεται από τον τύπο

$$Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}{\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \rangle}\overrightarrow{b}$$

Προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ ($Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$)

Πρόταση

Έστω $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Η προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ δίνεται από τον τύπο

$$Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}{\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \rangle}\overrightarrow{b}$$

Η προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ είναι

- διάνυσμα συγγραμικό με το $\overrightarrow{b}$ και επιπλεόν
- τ.ω. το $\overrightarrow{c} \equiv \overrightarrow{a} - Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ να είναι κάθετο στο $\overrightarrow{b}$.

Προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ ($Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$)

Πρόταση

Έστω $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Η προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ δίνεται από τον τύπο

$$Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}{\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \rangle}\overrightarrow{b}$$

Η προβολή του $\overrightarrow{a}$ πάνω στο $\overrightarrow{b}$ είναι

- διάνυσμα συγγραμικό με το $\overrightarrow{b}$ και επιπλεόν
- τ.ω. το $\overrightarrow{c} \equiv \overrightarrow{a} - Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ να είναι κάθετο στο $\overrightarrow{b}$.

Δηλαδή,

$$Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}, \quad \text{για κάποιο} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

και επιπλέον

$$0 = \langle \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} \rangle = \langle \overrightarrow{a} - Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \langle \overrightarrow{a} - \lambda \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \rangle = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle - \lambda \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \rangle.$$

Άρα

$$\lambda = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}{\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \rangle}$$

Εφαρμογή 1: Έστω $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Να δειχθεί ότι τα $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ και $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ είναι κάθετα ανν

$$\|\overrightarrow{a}\| = \left\|\overrightarrow{b}\right\|$$

Εφαρμογές (1)

Εφαρμογή 1: Έστω $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Να δειχθεί ότι τα $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ και $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ είναι κάθετα ανν

$$\|\overrightarrow{a}\| = \left\|\overrightarrow{b}\right\|$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\perp\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right) &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}\rangle - \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\rangle + \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\rangle - \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{a}\|^2 - \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{a}\|^2 = \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2,\end{aligned}$$

απ΄όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Εφαρμογές (2)

Εφαρμογή 2: Να αποδειχθεί η ανισότητα Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky ($\left|\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle\right| \leq \|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\|$) χωρίς χρήση του ορισμού

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right)$$

Εφαρμογές (2)

Εφαρμογή 2: Να αποδειχθεί η ανισότητα Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky $\left(\left|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\right| \leq \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\|\right)$ χωρίς χρήση του ορισμού

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

Απόδειξη: Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\|\lambda\vec{a} + \vec{b}\right\|^2 = \langle \lambda\vec{a} + \vec{b}, \lambda\vec{a} + \vec{b} \rangle \\ &= \lambda^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \lambda^2 \|\vec{a}\|^2 + 2\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \left\|\vec{b}\right\|^2. \end{aligned}$$

Δηλαδή το δευτεροβάθμιο ως προς λ πολυώνυμο

$$\lambda^2 \|\vec{a}\|^2 + 2\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \left\|\vec{b}\right\|^2$$

λαμβάνει πάντα μη αρνητικές τιμές. Συνεπώς, η διακρίνουσα είναι μη θετική.

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 - 4\|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \leq 0.$$

απ'όπου προκύπτει η ζητούμενη $\left|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\right| \leq \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\|$.

Εφαρμογές (3)

Εφαρμογή 3: Να βρεθούν οι προβολές του $\overrightarrow{a} = (5, -1, 3)$ πάνω στα $\overrightarrow{b} = (-1, 4, 1)$ και $\overrightarrow{c} = (1, -1, -1)$.