Α. Κινηματική

Α.1 Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση: $x(t) = 4 + 3t^2 - 2\sin 5t$ (σε μονάδες S.I.). Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου, και η επιτάχυνσή του.

Α.2 Οι συντεταγμένες ενός σημείου πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις: $x(t) = 4\sin 5t$ $y(t) = 4\cos 5t$ (σε μονάδες S.I.). Να βρεθούν:
(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

Α.3 Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση:

$$x(t) = 2 + 3t + 4e^{-5t} \quad \text{(σε μονάδες S.I.).}$$

Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου και η επιτάχυνσή του. Δείξετε ότι η ταχύτητα του σημείου τείνει σε μια σταθερή τιμή.

Α.4 Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις: $x(t) = 3\sin 5t$, $y(t) = 4\cos 5t$ (σε μονάδες S.I.). Να βρεθούν:
(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

Α.5 Αν $\vec{r}(t) = (3+t)\,\hat{x} + \cos 2t\,\hat{y} + 2e^{-2t}\,\hat{z}$, να βρεθούν τα $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ και $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{\vec{r}}$, καθώς και οι αρχικές τιμές (για $t = 0$) $\vec{r}(0)$, $\dot{\vec{r}}(0)$ και $\ddot{\vec{r}}(0)$ των τριών διανυσμάτων.

Α.6 Να βρεθούν οι παράγωγοι του διανύσματος $\vec{r}(t) = (x_0\,\hat{x} + y_0\,\hat{y}) + \upsilon_0 t\,\hat{x} - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{z}$ ως προς t, αν όλα τα άλλα μεγέθη είναι σταθερά. Επίσης να βρεθούν οι τιμές τους για $t = 0$.

Α.7 Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$, κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{r}_1 = (3t + 2t^2)\hat{x} + (4 + 4t^2)\hat{y} + (5 + 2t)\hat{z} \quad \text{και} \quad \vec{r}_2 = (20 - t - t^2)\hat{x} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{y} + (1 + 4t)\hat{z}$$

αντίστοιχα, όπου t = χρόνος (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s).
(α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό. Απ.: $\tau = 2\,\text{s}$
(β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα; Απ.: $\vec{F}_{ολ} = 0$
(γ) Αν οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στις μάζες παραμένουν οι ίδιες πριν και μετά την κρούση, δείξετε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται, και βρείτε την τιμή της. Απ.: $\vec{P}_{ολ} = m(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z})$
(δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου. [*Υπόδειξη:* Για σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, είναι $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + (t - t_0)\vec{\upsilon}$.]
Απ.: $\vec{r} = \frac{1}{3}(40\hat{x} + 24\hat{y} + 7\hat{z}) + \frac{1}{3}t(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z})$

Α.8 Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες του σώματος: $x = 3a\sin\omega t$, $y = 4a\sin\omega t$, $z = 5a\cos\omega t$, όπου t = χρόνος, και ω και a είναι θετικές σταθερές. Αποδείξετε ότι η τροχιά είναι επίπεδη, δείχνοντας ότι σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3, τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ είναι συνεπίπεδα. Συνθήκη: $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = 0$.

Α.9 Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως

$$x = a\cos(\omega t), \qquad y = a\sin(\omega t), \qquad z = bt^2,$$

όπου t είναι ο χρόνος, και a, b και ω είναι θετικές σταθερές.
(α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ της μάζας συναρτήσει του χρόνου.

(β) Αν Κ είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα των z που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\boldsymbol{c}} = z\hat{\boldsymbol{z}} = bt^2\hat{\boldsymbol{z}}$, και $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{c}}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο Κ στη μάζα, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{R}}$ και να δείξετε ότι η απόσταση της μάζας από το σημείο Κ ή τον άξονα των z είναι σταθερή.

(γ) Βρείτε τη δύναμη $\vec{\boldsymbol{F}}$ που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξετε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες: μία κεντρομόλο δύναμη με σταθερό μέτρο προς το σημείο Κ, και μία σταθερή στην κατεύθυνση z.

Απ.: $\vec{\boldsymbol{F}} = -m\omega^2 R\hat{\boldsymbol{R}} + 2mb\,\hat{\boldsymbol{z}}$

(δ) Υπολογίστε τον στιγμιαίο ρυθμό παραγωγής έργου από τη δύναμη, $P = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, και δείξτε ότι εξαρτάται μόνο από την κίνηση στην κατεύθυνση z.

Απ.: $P = 4mb^2 t$

Α.10 Η κίνηση βλήματος σε ομογενές βαρυτικό πεδίο δίνεται από τις σχέσεις:

$$x(t) = x_0 + (\upsilon_0 \cos\theta)t \qquad y(t) = y_0 + (\upsilon_0 \sin\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

όπου t είναι ο χρόνος, και τα υπόλοιπα μεγέθη είναι σταθερά. Ο άξονας x είναι οριζόντιος και ο άξονας των y είναι κατακόρυφος. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος $y_{\max}$ στο οποίο θα φθάσει το σώμα.

Απ.: $y_{\max} = y_0 + (\upsilon_0^2 / 2g)\sin^2\theta$

Α.11 Δίνεται ότι $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$ για κάθε x. Να υπολογιστεί η τιμή του $e^{0,1}$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

Απ.: $e^{0,1} = 1{,}105$

Πόσο είναι το σφάλμα στο $e^{0,1}$ αν υποθέσουμε ότι είναι $e^x \approx 1 + x$;

Απ.: 0,0052

Α.12 Να βρεθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες η *ροπή* της δύναμης $\vec{\boldsymbol{F}} = F_x\hat{\boldsymbol{x}} + F_y\hat{\boldsymbol{y}} + F_z\hat{\boldsymbol{z}}$ ως προς το σημείο (0, 0, 0), $\vec{\boldsymbol{N}} \equiv \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$.

Απ.: $\vec{\boldsymbol{N}} = (yF_z - zF_y)\hat{\boldsymbol{x}} + (zF_x - xF_z)\hat{\boldsymbol{y}} + (xF_y - yF_x)\hat{\boldsymbol{z}}$

Α.13 Να βρεθεί η μαγνητική δύναμη $\vec{\boldsymbol{F}}_\mu$ που ασκείται πάνω σε ένα φορτίο Q που κινείται με ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \upsilon_x \hat{\boldsymbol{x}}$ μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{\boldsymbol{B}} = B_y\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{z}}$. Να βρεθεί επίσης το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{F}}_\mu$.

Απ.: $\vec{\boldsymbol{F}}_\mu = Q\upsilon_x(-B_z\hat{\boldsymbol{y}} + B_y\hat{\boldsymbol{z}}) \qquad \hat{\boldsymbol{F}}_\mu = (-B_z\hat{\boldsymbol{y}} + B_y\hat{\boldsymbol{z}})/B$

Α.14 Η ροπή μιας δύναμης ως προς το σημείο Ο ορίζεται ως $\vec{\boldsymbol{N}} \equiv \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{r}}$ είναι το διάνυσμα από το Ο στο σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη Να δειχθεί ότι η ροπή δύο ίσων και αντίθετων δυνάμεων $\vec{\boldsymbol{F}}$ και $-\vec{\boldsymbol{F}}$ που ασκούνται στα σημεία $\vec{\boldsymbol{r}}_1$ και $\vec{\boldsymbol{r}}_2$ αντίστοιχα (ζεύγος δυνάμεων), είναι ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.

Α.15 Η *στροφορμή* ως προς το σημείο (0, 0, 0) μιας μάζας m που βρίσκεται στο σημείο $\vec{\boldsymbol{r}}$ και κινείται με ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, ορίζεται ως $\vec{\boldsymbol{L}} \equiv m\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{\upsilon}}$. Έστω ότι η μάζα υφίσταται μια *κεντρική* δύναμη, δηλαδή μια δύναμη της μορφής $\vec{\boldsymbol{F}} = f(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, όπου $f(r)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της απόστασης r από το κέντρο (0, 0, 0) και $\hat{\boldsymbol{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$. Δείξετε ότι η στροφορμή της μάζας ως προς το σημείο (0, 0, 0) διατηρείται σταθερή. [*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε τη σχέση $d\vec{\boldsymbol{L}}/dt = \vec{\boldsymbol{N}}$.]

Α.16 Σώμα μάζας m κινείται πάνω στον άξονα των x και η μετατόπισή του ως συνάρτηση του χρόνου είναι

$$x(t) = \frac{m\upsilon_0}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right), \qquad \text{όπου } \upsilon_0 \text{ και } b \text{ θετικές σταθερές.}$$

(α) Να βρεθεί η αρχική θέση $x(0)$, η ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου, $\upsilon(t)$, και η αρχική ταχύτητα $\upsilon(0)$ του σώματος, και να υπολογιστεί η μετατόπισή του, $x_{1/2}$, όταν η ταχύτητά του θα έχει ελαττωθεί στο μισό της αρχικής.

(β) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα και να αποδειχθεί ότι είναι μια δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας.

(γ) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος ως προς τον χρόνο και να αποδειχθεί ότι είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης της τριβής.