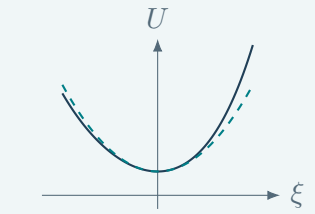
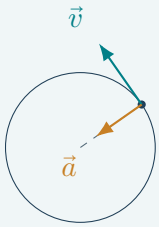
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Χημικών Μηχανικών

ΦΥΣΙΚΗ Ι

Σημειώσεις διαλέξεων



Taylor κοντά στην ισορροπία



Κίνηση σε καμπύλη

Διάλεξη 3

Αναπτύγματα Taylor και καμπυλόγραμμη κίνηση

Προσεγγίσεις · Εκθετική συνάρτηση · Πολικές συντεταγμένες

Περιεχόμενα

3 Αναπτύγματα Taylor και καμπυλόγραμμη κίνηση **1**

3.1 Θεώρημα Taylor και ανάπτυγμα 1

3.2 Προσέγγιση γύρω από θέση ισορροπίας 2

3.3 Τρία βασικά αναπτύγματα και αριθμητικό παράδειγμα 3

3.4 Εκθετική συνάρτηση και η σταθερά e 5

3.5 Λύση της διαφορικής εξίσωσης $f' = f$ 6

3.6 Γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$ 7

3.7 Ταχύτητα και επιτάχυνση σε καμπυλόγραμμη κίνηση 7

3.8 Κυκλική κίνηση και τοπικός κύκλος καμπυλότητας 10

Η κοινή ιδέα της μικρής μεταβολής 11

Διάλεξη 3

Αναπτύγματα Taylor και καμπυλόγραμμη κίνηση

Όταν παρακολουθούμε ένα σώμα για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, μπορούμε συχνά να θεωρήσουμε ότι κινείται περίπου με την ταχύτητα που έχει στην αρχή του διαστήματος. Αν θέλουμε μεγαλύτερη ακρίβεια, λαμβάνουμε υπόψη και την επιτάχυνσή του. Η ίδια ιδέα εμφανίζεται σε πολλά προβλήματα της Φυσικής. Γνωρίζοντας τη συμπεριφορά ενός μεγέθους κοντά σε μια κατάσταση, κατασκευάζουμε μια απλούστερη περιγραφή της συμπεριφοράς του σε γειτονικές καταστάσεις.

Τα αναπτύγματα Taylor δίνουν συστηματική μορφή σε αυτή την προσέγγιση και μας επιτρέπουν να εκτιμούμε το σφάλμα της. Αφού τα μελετήσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε τις προσεγγίσεις μικρών γωνιών για να περιγράψουμε μια ταχύτητα που αλλάζει διεύθυνση. Έτσι η μαθηματική ιδέα της μικρής μεταβολής θα συνδεθεί με τη γεωμετρία της καμπυλόγραμμης κίνησης.

3.1 Θεώρημα Taylor και ανάπτυγμα

Η τοπική περιγραφή μιας συνάρτησης Έστω ότι γνωρίζουμε την τιμή μιας συνάρτησης f στη θέση x_0 και θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή της λίγο πιο πέρα, στο $x_0 + h$. Η παράγωγος $f'(x_0)$ είναι η τοπική κλίση της καμπύλης. Ορίζεται ως το όριο του λόγου της μεταβολής της συνάρτησης προς τη μεταβολή του ορίσματός της,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Επομένως η πρώτη προσέγγιση είναι $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$. Γεωμετρικά αντικαθιστούμε την καμπύλη από την εφαπτομένη της, όπως στο σχήμα 3.1. Φυσικά χρησιμοποιούμε τον τοπικό ρυθμό μεταβολής για να προβλέψουμε μια μικρή αλλαγή.

Η εφαπτομένη όμως δεν περιγράφει την αλλαγή της ίδιας της κλίσης. Αυτή την πληροφορία δίνει η δεύτερη παράγωγος. Αν προσθέσουμε όρο $c_2 h^2$ και απαιτήσουμε η δεύτερη παράγωγος του πολυωνύμου στο $h = 0$ να ισούται με $f''(x_0)$, βρίσκουμε $2c_2 = f''(x_0)$. Άρα $c_2 = f''(x_0)/2!$. Με τον ίδιο τρόπο, η συμφωνία της n-οστής παραγώγου δίνει συντελεστή $f^{(n)}(x_0)/n!$.

Το $f^{(n)}$ σημαίνει παράγωγο τάξης n, όχι δύναμη της συνάρτησης. Το $n!$ είναι το παραγοντικό, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, με $0! = 1$. Οι διαδοχικοί όροι συγκεντρώνουν πληροφορία για ολοένα λεπτομερέστερες μεταβολές της καμπύλης.

Η ακριβής σχέση και το σφάλμα αποκοπής Αν η f έχει $N + 1$ συνεχείς παραγώγους στο διάστημα ανάμεσα στα x_0 και $x_0 + h$, το θεώρημα Taylor δίνει

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + R_{N+1}(h), \\ R_{N+1}(h) &= \frac{f^{(N+1)}(\zeta)}{(N+1)!} h^{N+1}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου το ζ βρίσκεται ανάμεσα στα δύο άκρα του διαστήματος. Το πεπερασμένο άθροισμα είναι το πολυώνυμο Taylor και το R_{N+1} είναι η ακριβής διαφορά της συνάρτησης από αυτό το πολυώνυμο.

Η σχέση είναι χρήσιμη και όταν δεν γνωρίζουμε το ίδιο το ζ. Αν η απόλυτη τιμή της παραγώγου τάξης $N+1$ δεν υπερβαίνει μια τιμή M_{N+1} στο διάστημα, τότε

$$|R_{N+1}(h)| \leq \frac{M_{N+1}}{(N+1)!}|h|^{N+1}.$$

Έχουμε έτσι έναν έλεγχο ακρίβειας. Για σταθερό N, η μείωση του $|h|$ μειώνει το σφάλμα με αντίστοιχη δύναμη του h. Η γραφή $O(h^{N+1})$ δηλώνει ότι το υπόλοιπο φράσσεται κατά μέτρο από μια σταθερά επί $|h|^{N+1}$ κοντά στο μηδέν. Η σταθερά μπορεί να έχει μονάδες, ώστε κάθε όρος να έχει τις μονάδες της συνάρτησης.

Αν, για συγκεκριμένο h, το υπόλοιπο τείνει στο μηδέν καθώς προσθέτουμε περισσότερους όρους, τότε η άπειρη σειρά αναπαράγει τη συνάρτηση:

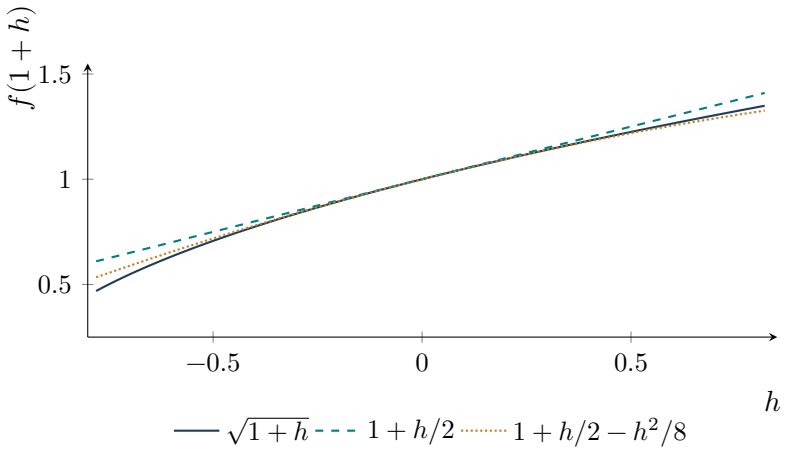
$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \\ &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}h^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Η ύπαρξη παραγώγων όλων των τάξεων δεν εγγυάται από μόνη της ότι το υπόλοιπο μηδενίζεται όταν $N\to\infty$. Χρειάζεται να γνωρίζουμε την περιοχή όπου η σειρά ισούται με τη συνάρτηση. Όταν το σημείο ανάπτυξης είναι $x_0 = 0$, η σειρά ονομάζεται σειρά Maclaurin.

Η σύνδεση με την κίνηση Για μια θέση $x(t)$ η ίδια διαδικασία, γύρω από τη στιγμή t_0, δίνει

$$x(t_0+\Delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_0)(\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3).$$

Εδώ οι τελείες δηλώνουν χρονικές παραγώγους. Ο πρώτος όρος είναι η αρχική θέση, ο δεύτερος η μετατόπιση που θα είχαμε με την αρχική ταχύτητα και ο τρίτος η πρώτη διόρθωση λόγω επιτάχυνσης. Αν η επιτάχυνση είναι σταθερή, η σχέση μέχρι τον τετραγωνικό όρο είναι ακριβής. Γενικά είναι τοπική προσέγγιση, της οποίας η ακρίβεια εξαρτάται και από το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η επιτάχυνση.



Σχήμα 3.1. Παράδειγμα τοπικής προσέγγισης της $f(x) = \sqrt{x}$ γύρω από το $x_0 = 1$. Η ευθεία περιγράφει την κλίση και η παραβολή περιλαμβάνει την πρώτη διόρθωση της καμπύλωσης. Οι συντελεστές θα υπολογιστούν στο εδάφιο 3.3.

3.2 Προσέγγιση γύρω από θέση ισορροπίας

Ένα σώμα δεμένο σε ελατήριο δέχεται δύναμη που τείνει να το επαναφέρει όταν απομακρυνθεί λίγο από τη θέση ισορροπίας. Παρόμοια συμπεριφορά εμφανίζεται και σε συστήματα χωρίς πραγματικό ελατήριο.

Το ανάπτυγμα Taylor εξηγεί γιατί η ίδια απλή μορφή δύναμης μπορεί να περιγράφει πολλές διαφορετικές αλληλεπιδράσεις κοντά σε μια ευσταθή ισορροπία.

Στη μία διάσταση περιγράφουμε μια συντηρητική αλληλεπίδραση με δυναμική ενέργεια $U(x)$. Η δύναμη συνδέεται με τη μεταβολή της μέσω $F_x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}U$, δηλαδή $F_x = -U'(x)$. Η δύναμη επομένως κατευθύνεται προς τη μείωση της δυναμικής ενέργειας. Σε θέση ισορροπίας x_0 έχουμε $U'(x_0) = 0$, οπότε ο γραμμικός όρος του αναπτύγματος της ενέργειας μηδενίζεται.

Θέτουμε $\xi = x - x_0$ για τη μικρή απομάκρυνση. Αν το x_0 είναι μη εκφυλισμένο ελάχιστο, δηλαδή $U''(x_0) > 0$, και ορίσουμε $k = U''(x_0)$, το ανάπτυγμα δίνει

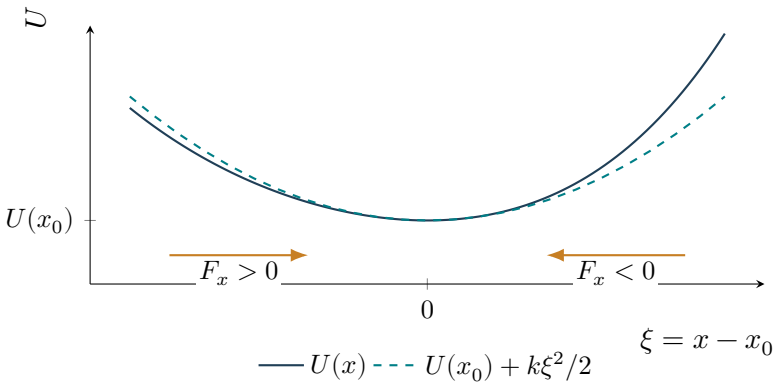
$$U(x_0 + \xi) \simeq U(x_0) + \frac{1}{2} k \xi^2, \qquad \xi = x - x_0. \tag{3.3}$$

Ο όρος «μη εκφυλισμένο» εδώ σημαίνει απλώς ότι η δεύτερη παράγωγος δεν είναι μηδέν. Η πρώτη μεταβολή της ενέργειας είναι τετραγωνική στην απομάκρυνση. Γι' αυτό η καμπύλη κοντά στο ελάχιστο προσεγγίζεται από παραβολή, όπως στο σχήμα 3.2.

Για τη δύναμη αναπτύσσουμε το $U'(x_0 + \xi) = k\xi + O(\xi^2)$. Επομένως

$$F_x \simeq -k\xi = -k(x - x_0). \tag{3.4}$$

Η δύναμη είναι γραμμική ως προς την απομάκρυνση και έχει αντίθετο πρόσημο. Για $\xi > 0$ τραβά προς τα αριστερά, ενώ για $\xi < 0$ προς τα δεξιά. Αυτή είναι η μορφή του νόμου του Hooke. Η φράση «γραμμική προσέγγιση» αφορά εδώ τη δύναμη και την εξίσωση κίνησης, παρότι η ενέργεια προσεγγίζεται από συνάρτηση δεύτερου βαθμού.



Σχήμα 3.2. Σχηματική δυναμική ενέργεια με ομαλό ελάχιστο και η παραβολική της προσέγγιση. Τα βέλη δείχνουν τη φορά της δύναμης εκατέρωθεν της ισορροπίας. Η προσέγγιση αφορά τη γειτονιά του x_0.

Οι μονάδες είναι συνεπείς, αφού $[U''] = \mathrm{J/m^2} = \mathrm{N/m}$. Αν το σώμα έχει μάζα m, ο δεύτερος νόμος δίνει $m\ddot{\xi} \simeq -k\xi$. Η σχέση αυτή θα περιγράψει τις μικρές ταλαντώσεις. Η προσέγγιση είναι καλή όσο οι επόμενοι όροι, όπως $U^{(3)}(x_0)\xi^3/3!$, είναι μικροί συγκριτικά με τον τετραγωνικό όρο στην περιοχή που εξετάζουμε.

Αν $U''(x_0) < 0$, η ενέργεια έχει τοπικό μέγιστο και η γραμμική δύναμη απομακρύνει το σώμα από την ισορροπία. Αν $U''(x_0) = 0$, ο τετραγωνικός όρος δεν αρκεί για να αποφασίσουμε τη συμπεριφορά. Χρειάζεται να εξετάσουμε τους επόμενους μη μηδενικούς όρους. Η συνθήκη $k > 0$ είναι επομένως ουσιαστική για τη συγκεκριμένη προσέγγιση.

3.3 Τρία βασικά αναπτύγματα και αριθμητικό παράδειγμα

Μια προσέγγιση γίνεται πραγματικά χρήσιμη όταν γνωρίζουμε τόσο τους συντελεστές της όσο και το εύρος στο οποίο μπορούμε να την εμπιστευτούμε. Θα υπολογίσουμε τρεις βασικές οικογένειες

αναπτυγμάτων γύρω από το μηδέν. Το x στα παραδείγματα είναι αδιάστατο. Αν προκύπτει από φυσικό μέγεθος με μονάδες, θα πρέπει να είναι κατάλληλος λόγος, όπως μια μεταβολή μήκους προς ένα χαρακτηριστικό μήκος.

Η τετραγωνική ρίζα Για $f(x) = \sqrt{1+x}$ η αρχική τιμή είναι $f(0) = 1$. Η διαδοχική παραγώγιση δίνει

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2},$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2}.$$

Στο $x = 0$ οι δυνάμεις του $1 + x$ γίνονται ίσες με ένα. Οι συντελεστές του πολυωνύμου όμως είναι οι παράγωγοι διαιρεμένες με τα αντίστοιχα παραγοντικά:

n	0	1	2	3	4
$f^{(n)}(0)/n!$	1	$1/2$	$-1/8$	$1/16$	$-5/128$

Άρα

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + O(x^5), \qquad |x| < 1. \tag{3.5}$$

Η απλή γραμμική προσέγγιση είναι $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$. Για μικρό x, η πρώτη διόρθωση είναι $-x^2/8$, δηλαδή η ακριβής καμπύλη βρίσκεται λίγο χαμηλότερα από την εφαπτομένη. Για παράδειγμα, για $x = 0.01$ η γραμμική προσέγγιση δίνει 1.005 και η τετραγωνική διόρθωση είναι μόλις -0.0000125. Αυτός ο έλεγχος μεγέθους μάς επιτρέπει να αποφασίσουμε αν χρειαζόμαστε επιπλέον όρους.

Η αντίστροφη τετραγωνική ρίζα Εξετάζουμε τώρα τη $g(x) = (1-x)^{-1/2}$. Η αρχική της τιμή είναι επίσης ένα, αλλά το αρνητικό πρόσημο μέσα στην παρένθεση αλλάζει τους συντελεστές. Με τον κανόνα αλυσίδας,

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}, \qquad g''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-5/2},$$
$$g^{(3)}(x) = \frac{15}{8}(1-x)^{-7/2}, \quad g^{(4)}(x) = \frac{105}{16}(1-x)^{-9/2}.$$

Για παράδειγμα, ο κυβικός συντελεστής είναι $(15/8)/3! = 5/16$ και ο τεταρτοβάθμιος $(105/16)/4! = 35/128$. Επομένως

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + O(x^5), \qquad |x| < 1. \tag{3.6}$$

Οι δύο αναπτύξεις έχουν ίδιο σταθερό και γραμμικό όρο, αλλά διαφορετικό τετραγωνικό όρο. Η διαφορά αυτή έχει σημασία όταν ζητάμε μεγαλύτερη ακρίβεια. Οι αντίστοιχες άπειρες σειρές συγκλίνουν στην περιοχή $|x| < 1$, ενώ η χρησιμότητα μιας προσέγγισης με ελάχιστους όρους απαιτεί συνήθως πολύ μικρότερο $|x|$. Η σύγκλιση δεν σημαίνει ότι δύο όροι αρκούν κοντά στο όριο της περιοχής.

Ημίτονο και συνημίτονο Οι παράγωγοι των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επαναλαμβάνονται ανά τέσσερις παραγώγους. Για το ημίτονο η διαδοχή είναι $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ και έπειτα πάλι $\sin x$. Στο μηδέν οι τιμές είναι

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$(\sin x)^{(n)}\big\vert_0$	0	1	0	-1	0	1	0	-1
$(\cos x)^{(n)}\big\vert_0$	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Οι άρτιες δυνάμεις απουσιάζουν από τη σειρά του ημιτόνου, ενώ οι περιττές από τη σειρά του συνημιτόνου. Αντικαθιστώντας στην (3.2), βρίσκουμε

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \tag{3.7}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots. \tag{3.8}$$

Οι σειρές αυτές ισούνται με τις συναρτήσεις για κάθε πραγματικό x. Το x πρέπει να είναι γωνία σε ακτίνια. Η προϋπόθεση είναι ουσιαστική, επειδή οι συνήθεις τύποι παραγώγισης του ημιτόνου και του συνημιτόνου ισχύουν με αυτή τη μονάδα γωνίας.

Για $|x| \ll 1$ προκύπτουν $\sin x \simeq x$ και $\cos x \simeq 1 - x^2/2$. Η πρώτη διόρθωση του ημιτόνου είναι τρίτης τάξης, ενώ η πρώτη μεταβολή του συνημιτόνου είναι δεύτερης. Αυτή η διαφορά θα μας επιτρέψει να διακρίνουμε ποιο μέρος της μεταβολής ενός περιστρεφόμενου μοναδιαίου διανύσματος επιβιώνει στην πρώτη τάξη.

Πόση ακρίβεια δίνουν οι πρώτοι όροι του $\sin(0.132)$ Θέτουμε $x = 0.132$ ακτίνια και προσθέτουμε διαδοχικά τους μη μηδενικούς όρους. Οι πρώτες διορθώσεις είναι

$$\frac{x^3}{3!} = 0.000383328, \qquad \frac{x^5}{5!} = 0.0000003339553536, \qquad \frac{x^7}{7!} \simeq 1.38544 \cdot 10^{-10}.$$

Ο πίνακας 3.1 δείχνει πόσο γρήγορα βελτιώνεται η προσέγγιση. Το απόλυτο σφάλμα είναι η απόλυτη διαφορά του μερικού αθροίσματος από την τιμή αναφοράς. Τα σφάλματα υπολογίστηκαν πριν από τη στρογγυλοποίηση των εμφανιζόμενων τιμών.

Μερικό άθροισμα	Τιμή	Απόλυτο σφάλμα
$S_1 = x$	0.132000000000000	$3.83 \cdot 10^{-4}$
$S_2 = S_1 - x^3/3!$	0.131616672000000	$3.34 \cdot 10^{-7}$
$S_3 = S_2 + x^5/5!$	0.131617005955354	$1.39 \cdot 10^{-10}$
$S_4 = S_3 - x^7/7!$	0.131617005816810	$3.35 \cdot 10^{-14}$
$\sin(0.132)$	0.131617005816843	0

Πίνακας 3.1. Διαδοχικές προσεγγίσεις του ημιτόνου και σύγκριση με τιμή αναφοράς μεγαλύτερης ακρίβειας.

Εδώ οι όροι εναλλάσσουν πρόσημο και τα μέτρα τους μειώνονται. Το σφάλμα ενός μερικού αθροίσματος δεν υπερβαίνει το μέτρο του πρώτου παραλειπόμενου όρου. Μετά το S_4 αυτός είναι $x^9/9! \simeq 3.35276 \cdot 10^{-14}$. Το εκ των προτέρων φράγμα συμφωνεί με το υπολογισμένο σφάλμα. Η επιλογή της τάξης του αναπτύγματος μπορεί επομένως να γίνει με βάση την ακρίβεια που χρειαζόμαστε.

3.4 Εκθετική συνάρτηση και η σταθερά e

Σε μια διαδικασία όπου ο ρυθμός αύξησης είναι ανάλογος της ποσότητας που ήδη υπάρχει, ίσα χρονικά διαστήματα προκαλούν ίσες σχετικές αυξήσεις. Η εκθετική συνάρτηση είναι η μαθηματική περιγραφή αυτού του είδους μεταβολής. Θα την ορίσουμε με μια σειρά, ώστε να δούμε από πού προέρχεται η ιδιότητά της να ισούται με την παράγωγό της.

Ορίζουμε

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots. \tag{3.9}$$

Για οποιοδήποτε σταθερό x, ο λόγος των μέτρων δύο διαδοχικών όρων είναι $|x|/(n+1)$ και τείνει στο μηδέν. Οι όροι τελικά μειώνονται αρκετά γρήγορα ώστε η σειρά να συγκλίνει για κάθε πραγματικό x. Στο $x = 1$ παίρνουμε τον αριθμό

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \simeq 2.718281828. \tag{3.10}$$

Για την παράγωγο, ο σταθερός όρος μηδενίζεται. Σε κάθε επόμενο όρο χρησιμοποιούμε το $n/n! = 1/(n-1)!$, οπότε

$$(e^x)' = 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Η νέα σειρά είναι ίδια με την αρχική. Με αλλαγή δείκτη $j = n - 1$ γράφουμε το αποτέλεσμα και με τη συμπαγή μορφή

$$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x. \tag{3.11}$$

Η παραγώγιση όρο προς όρο επιτρέπεται για αυτή τη δυναμοσειρά σε κάθε πεπερασμένο διάστημα. Η σύγκλιση τόσο της σειράς όσο και της σειράς των παραγώγων ελέγχεται ομοιόμορφα σε ένα τέτοιο διάστημα, δηλαδή με φράγματα για τα υπόλοιπα που ισχύουν για όλα τα σημεία του.

Χρήσιμη είναι επίσης η σχέση $e^{-x} = 1/e^x$. Για να την ελέγξουμε, παραγωγίζουμε το γινόμενο $e^x e^{-x}$ και βρίσκουμε παράγωγο μηδέν. Το γινόμενο είναι συνεπώς σταθερό και, επειδή στο μηδέν ισούται με ένα, ισούται παντού με ένα. Άρα η εκθετική δεν μηδενίζεται. Ως συνεχής συνάρτηση που έχει τιμή ένα στο μηδέν, παραμένει θετική.

3.5 Λύση της διαφορικής εξίσωσης $f' = f$

Αναζητούμε μια συνάρτηση της οποίας ο τοπικός ρυθμός μεταβολής ισούται με την ίδια την τιμή. Η (3.11) δίνει αμέσως μια λύση, την $f(x) = e^x$. Κάθε σταθερό πολλαπλάσιό της, Ce^x, είναι επίσης λύση. Η σταθερά αλλάζει το αρχικό μέγεθος της συνάρτησης χωρίς να αλλάζει τη σχέση ανάμεσα στην τιμή και στην παράγωγό της.

Για να βεβαιωθούμε ότι η οικογένεια αυτή περιλαμβάνει όλες τις λύσεις, ας είναι f οποιαδήποτε λύση της $f' = f$ σε ένα διάστημα. Πολλαπλασιάζουμε με το e^{-x} και εφαρμόζουμε τον κανόνα γινομένου:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{-x} f(x)\right] = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x}\left[f'(x) - f(x)\right] = 0.$$

Το γινόμενο $e^{-x} f(x)$ είναι σταθερό. Επομένως η γενική λύση είναι

$$f(x) = Ce^x. \tag{3.12}$$

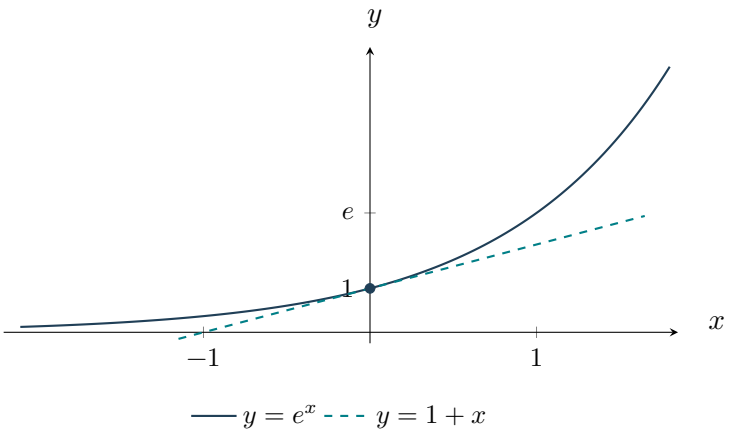
Δεν διαιρέσαμε με τη f, οπότε η μηδενική λύση περιλαμβάνεται για $C = 0$. Αν δίνεται $f(0) = f_0$, βρίσκουμε $C = f_0$. Αν η αρχική τιμή δίνεται στο x_0, τότε $C = f_0 e^{-x_0}$ και $f(x) = f_0 e^{x - x_0}$.

Σε μια φυσική εφαρμογή ο χρόνος έχει μονάδες και χρειάζεται μια αντίστοιχη χρονική κλίμακα. Για παράδειγμα, η σχέση $\dot{q} = q/\tau$, με $\tau > 0$, δίνει $q(t) = q(0)e^{t/\tau}$. Το t/τ είναι αδιάστατο και ο ρυθμός έχει τις ίδιες μονάδες και στα δύο μέλη. Με αρνητικό πρόσημο, $\dot{q} = -q/\tau$, η λύση είναι $q(t) = q(0)e^{-t/\tau}$ και περιγράφει εκθετική μείωση. Στον χρόνο τ η απόλυτη τιμή της ποσότητας έχει γίνει το $1/e$ της αρχικής.

3.6 Γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$

Η γραφική παράσταση συνοψίζει τις ιδιότητες που αποδείξαμε. Η καμπύλη περνά από το $(0, 1)$ και έχει εκεί κλίση ένα. Επειδή $f' = e^x > 0$, αυξάνει σε όλο τον άξονα. Επειδή και $f'' = e^x > 0$, η κλίση της αυξάνει καθώς προχωράμε προς τα δεξιά. Λέμε ότι η συνάρτηση είναι κυρτή.

Τρεις χαρακτηριστικές τιμές είναι $e^{-1} \simeq 0.368$, $e^0 = 1$ και $e^1 \simeq 2.718$. Η εκθετική προσεγγίζει το μηδέν για $x \to -\infty$ και αυξάνει χωρίς φράγμα για $x \to +\infty$. Η εφαπτομένη στο μηδέν είναι η ευθεία $y = 1 + x$, δηλαδή η προσέγγιση πρώτου βαθμού της (3.9). Στο σχήμα 3.3 διακρίνουμε ότι η προσέγγιση είναι τοπική. Σε μεγαλύτερες αποστάσεις από το μηδέν, η καμπύλη απομακρύνεται από την εφαπτομένη.



Σχήμα 3.3. Η εκθετική και η εφαπτομένη της στο $(0, 1)$. Η εφαπτομένη αποδίδει την πρώτη μεταβολή κοντά στο μηδέν, ενώ η εκθετική διατηρείται θετική για κάθε πραγματικό x.

3.7 Ταχύτητα και επιτάχυνση σε καμπυλόγραμμη κίνηση

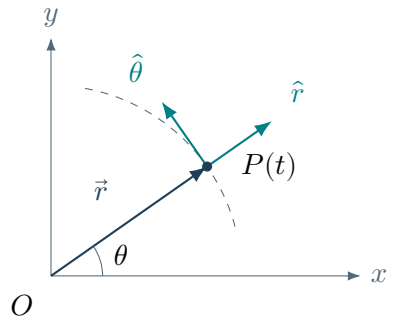
Ένα αυτοκίνητο που στρίβει αλλάζει το διάνυσμα της ταχύτητάς του ακόμη και όταν η ένδειξη του ταχυμέτρου μένει σταθερή. Για να περιγράψουμε αυτή τη μεταβολή, χρειαζόμαστε όχι μόνο το μέτρο αλλά και τη διεύθυνση της ταχύτητας. Οι πολικές συντεταγμένες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες όταν η κίνηση συνδέεται με αποστάσεις και γωνίες ως προς ένα σημείο.

Η θέση και τα μοναδιαία διανύσματα Για κίνηση στο επίπεδο, έστω $r(t) = \|\vec{r}(t)\|$ η απόσταση από μια σταθερή αρχή O και $\theta(t)$ η γωνία από τον θετικό άξονα x, με θετική φορά την αντιωρολογιακή. Για $r > 0$ ορίζουμε το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{r}$, από το O προς το σημείο, και το $\hat{\theta}$, κάθετο σε αυτό προς τη φορά αύξησης της γωνίας. Οι καρτεσιανές τους συνιστώσες είναι

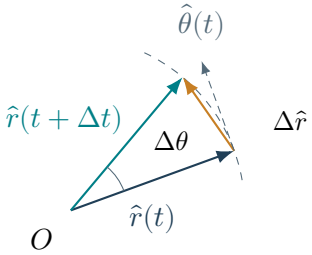
$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r(t)\hat{r}(t), \\ \hat{r} &= \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}, \\ \hat{\theta} &= -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Τα $\hat{x}, \hat{y}$ είναι ακίνητα, ενώ τα $\hat{r}, \hat{\theta}$ στρέφονται καθώς μεταβάλλεται η γωνία. Έχουν μήκος ένα και είναι κάθετα μεταξύ τους, όπως στο σχήμα 3.4. Στο $r = 0$ η γωνία και οι δύο πολικές διευθύνσεις δεν ορίζονται μοναδικά, γι' αυτό η περιγραφή αυτή χρησιμοποιείται μακριά από την αρχή.

Μικρή στροφή ενός μοναδιαίου διανύσματος Παρακολουθούμε πρώτα μόνο το $\hat{r}$. Αν μεταφέρουμε την αρχή του στο O, το άκρο του βρίσκεται σε μοναδιαίο κύκλο, ανεξάρτητα από την πραγματική τροχιά του σώματος. Σε μικρό διάστημα Δt η γωνία αλλάζει κατά $\Delta\theta$ και η μεταβολή $\Delta\hat{r}$ είναι η χορδή που ενώνει τα δύο άκρα του, όπως στο σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.4. Το $\hat{\theta}$ εφάπτεται στον κύκλο με κέντρο O που περνά από το P. Δεν είναι γενικά η εφαπτομένη της πραγματικής τροχιάς, επειδή μπορεί να μεταβάλλεται και η απόσταση r.



Σχήμα 3.5. Οι δύο ακτινικοί φορείς έχουν ίδιο μήκος. Η μεταβολή τους είναι χορδή του μοναδιαίου κύκλου και τείνει στην εφαπτομενική διεύθυνση όταν η γωνία τείνει στο μηδέν.

Το μήκος της χορδής είναι $\|\Delta\hat{r}\| = 2|\sin(\Delta\theta/2)|$. Για τη διεύθυνση και το πρόσημο της μεταβολής χρησιμοποιούμε την ακριβή γεωμετρική σχέση

$$\hat{r}(t+\Delta t) = \cos(\Delta\theta)\hat{r}(t) + \sin(\Delta\theta)\hat{\theta}(t).$$

Αφαιρούμε το αρχικό $\hat{r}(t)$ και εφαρμόζουμε τα αναπτύγματα μικρής γωνίας:

$$\Delta\hat{r} = [\cos(\Delta\theta) - 1]\hat{r} + \sin(\Delta\theta)\hat{\theta} = \Delta\theta\hat{\theta} + O((\Delta\theta)^2).$$

Η ακτινική μεταβολή αρχίζει στη δεύτερη τάξη, ενώ η εγκάρσια στην πρώτη. Αν διαιρέσουμε με Δt και πάρουμε το όριο, ο πρώτης τάξης όρος δίνει

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}. \tag{3.14}$$

Η σχέση έχει και σωστές μονάδες. Το μοναδιαίο διάνυσμα είναι αδιάστατο και ο ρυθμός αλλαγής της διεύθυνσής του έχει μονάδες s^{-1}, όπως το $\dot{\theta}$.

Το $\hat{\theta}$ είναι το $\hat{r}$ στραμμένο κατά $90°$. Όταν το πρώτο ακτινικό διάνυσμα στρέφεται προς τη θετική φορά, η μεταβολή του $\hat{\theta}$ δείχνει προς το $-\hat{r}$. Επομένως

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}. \tag{3.15}$$

Το πρόσημο ελέγχεται και αλγεβρικά. Η παράγωγος της $-\sin\theta\hat{x}+\cos\theta\hat{y}$ είναι $-\dot{\theta}(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}) = -\dot{\theta}\hat{r}$. Και οι δύο σχέσεις ισχύουν επίσης για αρνητικό $\dot{\theta}$, οπότε περιγράφουν στροφή προς την αντίθετη φορά.

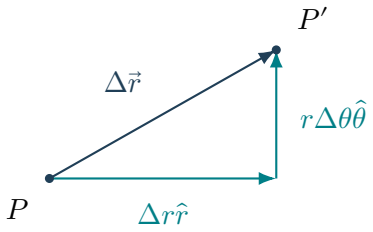
Από τη μεταβολή της θέσης στην ταχύτητα Το μέτρο r και η διεύθυνση $\hat{r}$ μπορεί να μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Γράφουμε τις νέες τιμές ως $r+\Delta r$ και $\hat{r}+\Delta\hat{r}$. Η ακριβής μεταβολή του διανύσματος θέσης είναι

$$\Delta\vec{r} = (r+\Delta r)(\hat{r}+\Delta\hat{r}) - r\hat{r} = \Delta r\hat{r} + r\Delta\hat{r} + \Delta r\Delta\hat{r}.$$

Για παραγωγίσιμα $r(t)$ και $\theta(t)$, οι δύο μικρές μεταβολές είναι ανάλογες του Δt στην πρώτη τάξη. Το γινόμενό τους είναι δεύτερης τάξης και, αφού διαιρέσουμε με Δt, τείνει στο μηδέν. Έτσι προκύπτει

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \tag{3.16}$$

Ο πρώτος όρος περιγράφει την αλλαγή της απόστασης από την αρχή. Ο δεύτερος περιγράφει τη μετατόπιση που οφείλεται στη στροφή της ακτίνας. Το μικρό τόξο έχει μήκος $r\Delta\theta$ στην πρώτη τάξη, οπότε η αντίστοιχη ταχύτητα είναι $r\dot{\theta}$. Οι δύο συνεισφορές φαίνονται σχηματικά στο σχήμα 3.6.



Σχήμα 3.6. Ανάλυση της μικρής μετατόπισης στην πρώτη τάξη ως προς τον χρόνο. Το P' παριστάνει τη νέα θέση με αυτή την ακρίβεια. Οι παραλειπόμενοι όροι μηδενίζονται στο όριο που ορίζει την ταχύτητα.

Επειδή οι δύο διευθύνσεις είναι κάθετες, το μέτρο της ταχύτητας είναι $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$. Η ποσότητα $\dot{r}$ από μόνη της δεν είναι γενικά το μέτρο της ταχύτητας. Μπορεί μάλιστα να μηδενίζεται ενώ το σώμα κινείται, όπως σε έναν κύκλο σταθερής ακτίνας.

Παραγωγή της επιτάχυνσης Παραγωγίζουμε τη (3.16), λαμβάνοντας υπόψη και τις μεταβολές των δύο μοναδιαίων διανυσμάτων. Για κάθε όρο ξεχωριστά βρίσκουμε

$$(\dot{r}\hat{r}\dot{)} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta},$$
$$(r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}) = (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}.$$

Στον δεύτερο υπολογισμό, ο τελευταίος όρος προέρχεται από το $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$. Προσθέτοντας τις ακτινικές και εγκάρσιες συνεισφορές καταλήγουμε στην επιτάχυνση

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}. \tag{3.17}$$

Ο συντελεστής δύο δεν εισάγεται ως πρόσθετη παραδοχή. Ένας όρος $\dot{r}\dot{\theta}$ προκύπτει από την παραγώγιση του ακτινικού μέρους της ταχύτητας και ένας από την παραγώγιση του εγκάρσιου μέρους. Κάθε όρος έχει μονάδες επιτάχυνσης, για παράδειγμα $r\dot{\theta}^2$ έχει μονάδες $\mathrm{m/s^2}$.

Η δεύτερη παράγωγος της ίδιας της διεύθυνσης $\hat{r}$ δίνει έναν ακόμη έλεγχο:

$$\ddot{\hat{r}} = \ddot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} = \ddot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}^2\hat{r}.$$

Η προς τα μέσα συνεισφορά υπάρχει ακόμη και όταν η γωνιακή ταχύτητα μένει σταθερή. Για $r > 0$, η εγκάρσια συνιστώσα μπορεί επίσης να γραφτεί $a_\theta = (r^2\dot{\theta})\dot{}/r$, επειδή $(r^2\dot{\theta})\dot{} = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}$.

Ένα σημείο που απομακρύνεται ενώ περιστρέφεται Έστω $r(t) = r_0 + ut$ και $\theta(t) = \omega t$, με αρχική απόσταση $r_0 > 0$ και σταθερά $u, \omega > 0$. Το σημείο διαγράφει σπειροειδή τροχιά. Η ακτινική ταχύτητα είναι $\dot{r} = u$, ενώ η εγκάρσια είναι $r\omega$. Οι τύποι δίνουν

$$\vec{v} = u\hat{r} + r\omega\hat{\theta}, \qquad \vec{a} = -r\omega^2\hat{r} + 2u\omega\hat{\theta}.$$

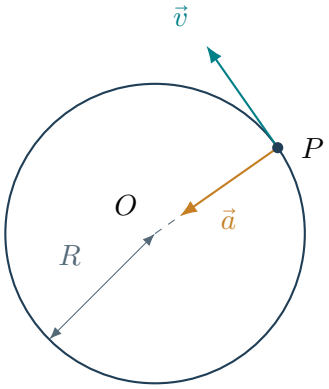
Παρότι τόσο το $\dot{r}$ όσο και το $\dot{\theta}$ είναι σταθερά, η επιτάχυνση δεν μηδενίζεται. Οι διευθύνσεις στρέφονται και το εγκάρσιο μέρος της ταχύτητας αυξάνει μαζί με την ακτίνα. Το παράδειγμα δείχνει γιατί πρέπει να παραγωγίζουμε ολόκληρα τα διανύσματα και όχι μόνο τους συντελεστές τους.

3.8 Κυκλική κίνηση και τοπικός κύκλος καμπυλότητας

Η ειδική περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης Σε κύκλο σταθερής ακτίνας R έχουμε $r = R$ και $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Αν η γωνία αυξάνει με σταθερό ρυθμό ω, τότε $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$, $\dot{\theta} = \omega$ και $\ddot{\theta} = 0$. Οι γενικοί τύποι απλοποιούνται σε

$$\vec{v} = R\omega\hat{\theta}, \qquad \vec{a} = -R\omega^2\hat{r} = -\frac{v^2}{R}\hat{r}, \qquad v = R|\omega|. \tag{3.18}$$

Στο σχήμα 3.7 το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, αλλά η ταχύτητα ως διάνυσμα αλλάζει. Η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα και δείχνει προς το κέντρο. Ονομάζεται κεντρομόλος επιτάχυνση. Το τετράγωνο του ω εξασφαλίζει ότι η φορά της παραμένει προς το κέντρο είτε η κίνηση γίνεται ωρολογιακά είτε αντιωρολογιακά.



Σχήμα 3.7. Στην ομαλή κυκλική κίνηση η ταχύτητα εφάπτεται στον κύκλο και η επιτάχυνση είναι ακτινική προς τα μέσα. Το σταθερό μέτρο της ταχύτητας δεν συνεπάγεται μηδενική επιτάχυνση.

Μπορούμε να ελέγξουμε το αποτέλεσμα σε ακίνητους καρτεσιανούς άξονες. Για $\theta_0 = 0$ η θέση και οι δύο παράγωγοί της είναι

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= R\cos(\omega t)\hat{x} + R\sin(\omega t)\hat{y},\\
\vec{v} &= -R\omega\sin(\omega t)\hat{x} + R\omega\cos(\omega t)\hat{y},\\
\vec{a} &= -R\omega^2\cos(\omega t)\hat{x} - R\omega^2\sin(\omega t)\hat{y} = -\omega^2\vec{r}.
\end{aligned}$$

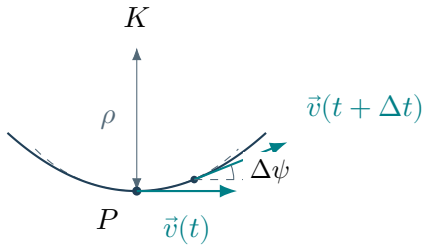
Η επιτάχυνση είναι αντίθετη από το διάνυσμα θέσης και έχει το ίδιο μέτρο με την (3.18). Η συμφωνία των δύο περιγραφών είναι ένας χρήσιμος έλεγχος των προσήμων.

Μια γενική καμπύλη έχει τοπική ακτίνα καμπυλότητας Ένας δρόμος δεν αποτελείται συνήθως από έναν μόνο κύκλο. Παρ' όλα αυτά, κοντά σε ένα ομαλό σημείο μπορούμε να προσεγγίσουμε ένα μικρό τμήμα της καμπύλης με έναν κύκλο που έχει την ίδια εφαπτομένη και την ίδια τοπική καμπύλωση. Αυτός είναι ο κύκλος καμπυλότητας. Συμβολίζουμε με K το κέντρο του και με ρ την ακτίνα του.

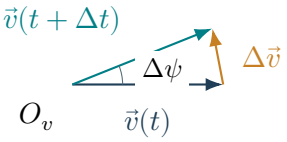
Για να δώσουμε ακριβές νόημα στην καμπυλότητα, μετράμε πόσο στρέφεται η εφαπτομένη όταν διανύουμε μικρό μήκος τόξου Δs. Αν η γωνία της εφαπτομένης αλλάζει κατά $\Delta\psi$, τότε, σε σημείο μη μηδενικής καμπυλότητας,

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\psi|}{|\Delta s|}.$$

Μεγάλη μεταβολή διεύθυνσης μέσα σε μικρή διαδρομή σημαίνει έντονη καμπυλότητα και μικρή ρ. Στην πρώτη τάξη έχουμε $\Delta s \simeq \rho|\Delta\psi|$. Για κίνηση με μη μηδενικό μέτρο ταχύτητας v, ο ρυθμός με τον οποίο στρέφεται η εφαπτομένη έχει επομένως μέτρο v/ρ.



(α) Τοπική γεωμετρία της τροχιάς



(β) Διαφορά ταχυτήτων ίσου μέτρου

Σχήμα 3.8. Το διακεκομμένο τόξο προσεγγίζει τοπικά την πραγματική τροχιά κοντά στο P. Στα δεξιά μεταφέρουμε δύο ταχύτητες ίσου μέτρου σε κοινή αρχή. Η μεταβολή τους είναι η χορδή που ενώνει τα άκρα τους.

Ας κρατήσουμε πρώτα σταθερό το μέτρο της ταχύτητας. Δύο διαδοχικά διανύσματα ταχύτητας έχουν τότε μήκος v και γωνία $\Delta\psi$. Αν τα τοποθετήσουμε με κοινή αρχή, τα άκρα τους ανήκουν σε κύκλο ακτίνας v στον χώρο των ταχυτήτων, όπως στο σχήμα 3.8. Η χορδή έχει μήκος

$$\|\Delta\vec{v}\| = 2v\left|\sin\frac{\Delta\psi}{2}\right| \simeq v|\Delta\psi|.$$

Διαιρώντας με μικρό θετικό χρονικό διάστημα και χρησιμοποιώντας το $|\Delta\psi|/\Delta t \to v/\rho$, βρίσκουμε το μέτρο της κάθετης στην τροχιά επιτάχυνσης:

$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{\|\Delta\vec{v}\|}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho}. \tag{3.19}$$

Η φορά είναι προς το τοπικό κέντρο καμπυλότητας. Αν μεταβάλλεται και το μέτρο της ταχύτητας, προστίθεται εφαπτομενική συνιστώσα $a_t = \dot{v}$. Με $\hat{t}$ μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κίνηση και $\hat{n}$ προς το κέντρο καμπυλότητας, η γενική τοπική ανάλυση είναι

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}.$$

Ο πρώτος όρος αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας και ο δεύτερος τη διεύθυνσή της. Σε ευθύγραμμο τμήμα η καμπυλότητα είναι μηδενική και η ακτίνα καμπυλότητας θεωρείται άπειρη, οπότε δεν υπάρχει κάθετη επιτάχυνση.

Η ρ δεν είναι γενικά η απόσταση r από την αυθαίρετα επιλεγμένη αρχή των πολικών συντεταγμένων. Μόνο για κύκλο με αρχή στο κέντρο του ισχύει $r = \rho = R$. Στη γενική καμπυλόγραμμη κίνηση τα ζεύγη $\hat{r}, \hat{\theta}$ και $\hat{n}, \hat{t}$ εξυπηρετούν διαφορετικές γεωμετρικές περιγραφές και δεν ταυτίζονται.

Η κοινή ιδέα της μικρής μεταβολής

Το ανάπτυγμα Taylor οργανώνει τις πληροφορίες που περιέχουν οι παράγωγοι και επιτρέπει να κρατάμε όσους όρους απαιτεί η ακρίβεια ενός προβλήματος. Κοντά σε μια ευσταθή ισορροπία οδηγεί από την παραβολική ενέργεια στη γραμμική επαναφέρουσα δύναμη. Στην καμπυλόγραμμη κίνηση, οι προσεγγίσεις μικρής γωνίας μάς επιτρέπουν να περάσουμε από τη γεωμετρία μιας μικρής στροφής στις παραγώγους των μοναδιαίων διανυσμάτων.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση περιγράφουν μεταβολές διανυσμάτων. Γι' αυτό χρειάζεται να παρακολουθούμε τόσο τα μέτρα όσο και τις διευθύνσεις τους. Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι η απλούστερη περίπτωση όπου αυτή η διάκριση γίνεται άμεσα ορατή, ενώ η ακτίνα καμπυλότητας μεταφέρει την ίδια ιδέα σε μια γενική ομαλή τροχιά.