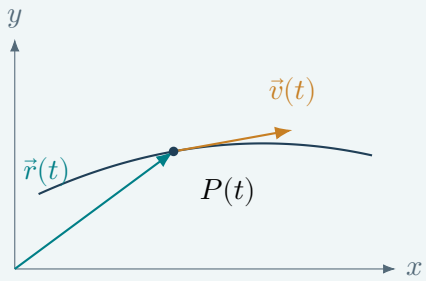
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Χημικών Μηχανικών

ΦΥΣΙΚΗ Ι

Σημειώσεις διαλέξεων



Διάλεξη 2

Θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση

Τροχιά · Διανυσματική παράγωγος · Αρχικές συνθήκες

Περιεχόμενα

2 Θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση **1**

2.1 Διάνυσμα θέσης και τροχιά 1

2.2 Διανυσματική παράγωγος 2

2.3 Ταχύτητα και επιτάχυνση 3

2.4 Διανυσματική ολοκλήρωση και αρχικές συνθήκες 4

2.5 Λυμένες ασκήσεις 6

Από την τροχιά στον χρονικό νόμο 12

Διάλεξη 2

Θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση

Αν παρακολουθήσουμε τη θέση ενός αυτοκινήτου σε διαδοχικές φωτογραφίες, βρίσκουμε τη διαδρομή του. Οι φωτογραφίες όμως δεν αρκούν για να προσδιορίσουμε πώς μεταβάλλεται η κίνησή του, αν δεν γνωρίζουμε και πότε τραβήχτηκε καθεμία. Η περιγραφή της θέσης ως συνάρτησης του χρόνου επιτρέπει να απαντήσουμε τόσο στο πού βρίσκεται το σώμα όσο και στο πόσο γρήγορα αλλάζει η θέση του.

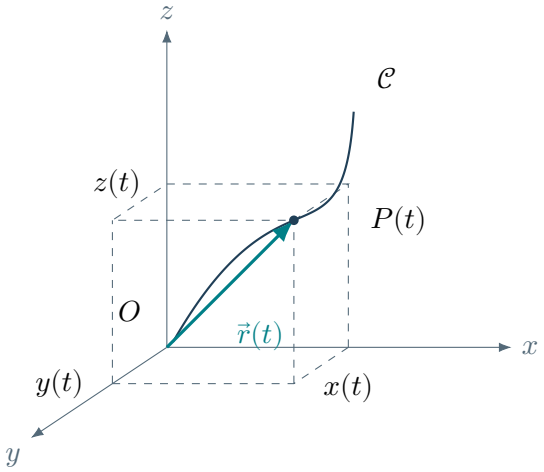
Η κινηματική μελετά αυτή την περιγραφή, πριν εξετάσουμε τις δυνάμεις που προκαλούν την κίνηση. Θα θεωρούμε ένα υλικό σημείο, δηλαδή ένα σώμα του οποίου το μέγεθος και η περιστροφή δεν επηρεάζουν το ερώτημα που μελετάμε. Οι άξονες θα είναι ακίνητοι και καρτεσιανοί. Από τη θέση θα βρούμε ταχύτητα και επιτάχυνση με παραγώγιση. Αντίστροφα, από γνωστή επιτάχυνση θα ανακτήσουμε την κίνηση με ολοκλήρωση και κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

2.1 Διάνυσμα θέσης και τροχιά

Επιλέγουμε αρχή O, τρεις κάθετους άξονες και έναν τρόπο μέτρησης του χρόνου. Το σημείο $P(t)$ δηλώνει πού βρίσκεται το σωματίδιο τη στιγμή t. Το διάνυσμα από το O στο $P(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}. \tag{2.1}$$

Οι συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ είναι προσημασμένες συντεταγμένες με μονάδες μήκους. Τα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ είναι αδιάστατα μοναδιαία διανύσματα σταθερής διεύθυνσης. Καθώς περνά ο χρόνος, το άκρο του $\vec{r}$ διαγράφει μια καμπύλη στον χώρο, την τροχιά $\mathcal{C}$. Η γεωμετρία φαίνεται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1. Το διάνυσμα θέσης ενώνει την αρχή με το κινούμενο σημείο. Οι διακεκομμένες ακμές συνδέουν τις τρεις συντεταγμένες με τη θέση στον χώρο. Οι γωνίες στην προοπτική απεικόνιση δεν αποδίδονται στο πραγματικό τους μέγεθος.

Η τροχιά δεν καθορίζει από μόνη της τον χρονικό τρόπο κίνησης. Δύο αυτοκίνητα μπορούν να ακολουθούν τον ίδιο δρόμο, αλλά να περνούν από κάθε σημείο σε διαφορετική στιγμή. Οι παραμετρικές

εξισώσεις $x(t), y(t), z(t)$ περιέχουν και τις δύο πληροφορίες. Όταν εξαλείφουμε τον χρόνο για να βρούμε μια εξίσωση της τροχιάς, κρατάμε τη γεωμετρία και συνήθως χάνουμε την πληροφορία για τη φορά και τον ρυθμό κίνησης.

Για δύο στιγμές $t_1 < t_2$ η μετατόπιση είναι

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1).$$

Το αντίστοιχο βέλος ξεκινά από την αρχική θέση και τελειώνει στην τελική, ανεξάρτητα από τη διαδρομή που μεσολάβησε. Αν ολοκληρώσουμε έναν γύρο σε κυκλικό στίβο, η μετατόπιση είναι μηδέν, αλλά το διανυμένο μήκος είναι η περίμετρος. Η θέση εξαρτάται από την επιλογή του O. Αν μεταφέρουμε την αρχή κατά σταθερό διάνυσμα $\vec{d}$, με παράλληλους άξονες, οι θέσεις γίνονται $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{d}$, ενώ η διαφορά τους και επομένως η μετατόπιση παραμένουν ίδιες.

2.2 Διανυσματική παράγωγος

Από μια μέση μεταβολή στον στιγμιαίο ρυθμό Ένα βέλος που περιγράφει ένα φυσικό μέγεθος μπορεί να αλλάζει μήκος, κατεύθυνση ή και τα δύο. Για να μετρήσουμε τη μεταβολή του, συγκρίνουμε πρώτα δύο κοντινές στιγμές. Αν το μέγεθος είναι $\vec{A}(t)$, η διαφορά $\Delta\vec{A} = \vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)$ είναι διάνυσμα. Ο λόγος $\Delta\vec{A}/\Delta t$ μετρά τη μέση μεταβολή ανά μονάδα χρόνου στο συγκεκριμένο διάστημα.

Μικραίνοντας το διάστημα και παίρνοντας το όριο, ορίζουμε τη χρονική παράγωγο:

$$\dot{\vec{A}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

Η τελεία θα δηλώνει παντού χρονική παράγωγο, για παράδειγμα $\dot{x}$ και $\ddot{x}$ για την πρώτη και τη δεύτερη. Η παράγωγος του διανύσματος είναι επίσης διάνυσμα. Οι μονάδες της είναι οι μονάδες του $\vec{A}$ διαιρεμένες με μονάδα χρόνου.

Το όριο δεν είναι μια διαίρεση με $\Delta t = 0$. Υπολογίζουμε τον λόγο για μη μηδενικά διαστήματα και εξετάζουμε σε ποιο διάνυσμα πλησιάζει όταν αυτά τείνουν στο μηδέν. Σε σταθερούς καρτεσιανούς άξονες, το όριο υπάρχει όταν υπάρχουν και τα τρία αντίστοιχα όρια των συνιστωσών. Έτσι

$$\dot{\vec{A}} = \dot{A}_x\hat{x} + \dot{A}_y\hat{y} + \dot{A}_z\hat{z}. \tag{2.3}$$

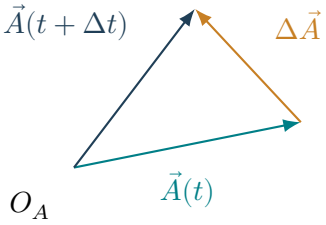
Η σχέση επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τη γνωστή παραγώγιση βαθμωτών συναρτήσεων ανεξάρτητα σε κάθε άξονα. Για παράδειγμα, στον λόγο μεταβολής της t^2 ο αριθμητής είναι $(t+\Delta t)^2 - t^2 = 2t\Delta t + (\Delta t)^2$. Μετά τη διαίρεση προκύπτει $2t + \Delta t$, που τείνει στο $2t$. Οι ίδιες πράξεις εφαρμόζονται χωριστά σε κάθε συνιστώσα μιας διανυσματικής συνάρτησης.

Στο σχήμα 2.2 οι δύο τιμές του $\vec{A}$ μεταφέρονται σε κοινή αρχή. Η διαφορά τους ενώνει τα άκρα τους. Ακόμη και αν τα δύο βέλη είχαν ίσα μήκη, η διαφορά δεν θα ήταν μηδενική όταν διέφεραν οι διευθύνσεις. Σταθερό μέτρο δεν σημαίνει σταθερό διάνυσμα.

Κανόνες παραγώγισης και επιλογή βάσης Η γραμμικότητα και ο κανόνας γινομένου δίνουν

$$(\vec{A} + \vec{B})^{\cdot} = \dot{\vec{A}} + \dot{\vec{B}}, \qquad (f\vec{A})^{\cdot} = \dot{f}\vec{A} + f\dot{\vec{A}},$$

όπου $f(t)$ βαθμωτή συνάρτηση. Οι σταθεροί καρτεσιανοί φορείς έχουν μηδενική παράγωγο. Αν όμως επιλέξουμε διευθύνσεις που περιστρέφονται μαζί με το σώμα, ο κανόνας γινομένου επιβάλλει να παραγωγίσουμε και τα ίδια τα μοναδιαία διανύσματα. Η (2.3) στη συγκεκριμένη απλή μορφή της βασίζεται σε ακίνητη βάση.



Σχήμα 2.2. Η μεταβολή υπολογίζεται ως διαφορά διανυσμάτων. Το σκίτσο αφορά τις τιμές του $\vec{A}$ και δεν παριστάνει αναγκαστικά τη χωρική τροχιά ενός σώματος.

Επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι άθροισμα γινομένων συνιστωσών, ο ίδιος κανόνας δίνει

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})^{\cdot} = \dot{\vec{A}}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\dot{\vec{B}}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σχέση για να συνδέσουμε τη μεταβολή της αριθμητικής ταχύτητας με την επιτάχυνση.

2.3 Ταχύτητα και επιτάχυνση

Μέσες και στιγμιαίες ποσότητες Για κίνηση από τη στιγμή t έως τη στιγμή $t+\Delta t$, με $\Delta t > 0$, η μέση διανυσματική ταχύτητα και η μέση επιτάχυνση είναι

$$\vec{v}_{\mu} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \qquad \vec{a}_{\mu} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Η πρώτη συνδέει τις θέσεις στα άκρα του διαστήματος. Η δεύτερη συγκρίνει τις αντίστοιχες ταχύτητες. Σε έναν πλήρη γύρο η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι μηδέν. Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι αντίθετα το συνολικό μήκος της διαδρομής δια τον συνολικό χρόνο και παραμένει θετική.

Οι στιγμιαίες ποσότητες προκύπτουν από τα όρια:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{x}+\dot{y}\hat{y}+\dot{z}\hat{z}, \\ \vec{a}(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{x}+\ddot{y}\hat{y}+\ddot{z}\hat{z}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

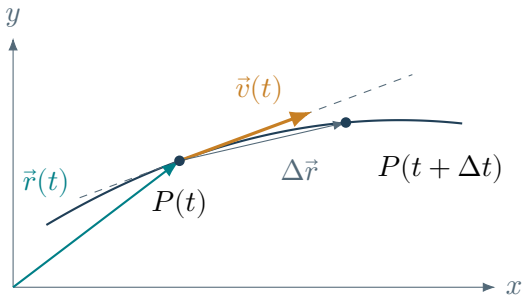
Η ταχύτητα μετριέται σε $\mathrm{m/s}$ και η επιτάχυνση σε $\mathrm{m/s^2}$. Το μη αρνητικό $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$ είναι η αριθμητική ταχύτητα. Οι συνιστώσες $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ μπορούν να είναι αρνητικές, επειδή δηλώνουν φορά ως προς κάθε άξονα.

Γιατί η ταχύτητα είναι εφαπτομενική Η $\Delta\vec{r}$ είναι χορδή ανάμεσα σε δύο σημεία της τροχιάς. Όταν το δεύτερο σημείο πλησιάζει το πρώτο, η διεύθυνση της χορδής τείνει στη διεύθυνση της εφαπτομένης. Επομένως, όπου $\vec{v}\neq\vec{0}$, η ταχύτητα εφάπτεται στην τροχιά και δείχνει τη φορά της κίνησης. Στο σχήμα 2.3 το διάνυσμα θέσης και το διάνυσμα ταχύτητας έχουν διαφορετικές διευθύνσεις. Το πρώτο δείχνει προς το σημείο, ενώ το δεύτερο προς την τοπική συνέχεια της κίνησης.

Η επιτάχυνση δεν είναι γενικά εφαπτομενική, επειδή περιγράφει τη μεταβολή ολόκληρου του διανύσματος ταχύτητας. Ένα αυτοκίνητο που στρίβει με σταθερή ένδειξη στο ταχύμετρο επιταχύνεται, αφού αλλάζει η διεύθυνση της ταχύτητας. Αντίστροφα, ένα σώμα που σταματά στιγμιαία στην κορυφή μιας κατακόρυφης βολής έχει μηδενική ταχύτητα και μη μηδενική επιτάχυνση.

Παραγωγίζοντας το $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$, βρίσκουμε $2v\dot{v} = 2\vec{v}\cdot\vec{a}$. Για $v>0$ προκύπτει

$$\dot{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}.$$



Σχήμα 2.3. Η χορδή και η εφαπτομένη έχουν διαφορετικές διευθύνσεις για πεπερασμένο διάστημα. Η διαφορά των διευθύνσεών τους μηδενίζεται στο όριο που ορίζει τη στιγμιαία ταχύτητα.

Θετικό εσωτερικό γινόμενο σημαίνει αύξηση της αριθμητικής ταχύτητας και αρνητικό μείωση. Αν τα δύο διανύσματα είναι κάθετα, η στιγμιαία μεταβολή του μέτρου είναι μηδέν, παρότι μπορεί να αλλάζει η διεύθυνση. Το μέτρο $\|\vec{a}\|$ δεν ισούται γενικά με το $\dot{v}$.

Παράδειγμα παραγώγισης με σαφείς μονάδες Θέτουμε μήκος αναφοράς $\ell_* = 1\,\mathrm{m}$, χρόνο αναφοράς $t_* = 1\,\mathrm{s}$ και αδιάστατο χρόνο $u = t/t_*$. Έτσι τα ορίσματα τριγωνομετρικών και εκθετικών συναρτήσεων δεν έχουν μονάδες. Έστω

$$\vec{r}(t) = \ell_* \left(u^2 \hat{x} + 3\sin u \hat{y} + e^{-u}\hat{z}\right).$$

Αυτή είναι η διαστατικά πλήρης μορφή της αριθμητικής περιγραφής $(t^2, 3\sin t, e^{-t})$ όταν οι τιμές του χρόνου εισάγονται σε δευτερόλεπτα και οι θέσεις διαβάζονται σε μέτρα.

Επειδή $\dot{u} = 1/t_*$, ο κανόνας αλυσίδας δίνει $\left(u^2\right)^{\cdot} = 2u/t_*$, $\left(\sin u\right)^{\cdot} = \cos u/t_*$ και $\left(e^{-u}\right)^{\cdot} = -e^{-u}/t_*$. Άρα

$$\vec{v}(t) = \frac{\ell_*}{t_*}\left(2u\hat{x} + 3\cos u \hat{y} - e^{-u}\hat{z}\right).$$

Μια δεύτερη παραγώγιση εισάγει ακόμη έναν παράγοντα $1/t_*$:

$$\vec{a}(t) = \frac{\ell_*}{t_*^2}\left(2\hat{x} - 3\sin u \hat{y} + e^{-u}\hat{z}\right).$$

Στο $t = 0$ παίρνουμε $\vec{r}(0) = \hat{z}\,\mathrm{m}$, $\vec{v}(0) = (3\hat{y} - \hat{z})\,\mathrm{m/s}$ και $\vec{a}(0) = (2\hat{x} + \hat{z})\,\mathrm{m/s^2}$. Η ταχύτητα δεν είναι παράλληλη ούτε στη θέση ούτε στην επιτάχυνση. Οι παράγοντες ℓ_*/t_* και ℓ_*/t_*^2 επαληθεύουν τις φυσικές μονάδες χωρίς να χρειάζεται να αποδίδουμε ασαφείς μονάδες στο όρισμα ενός ημιτόνου.

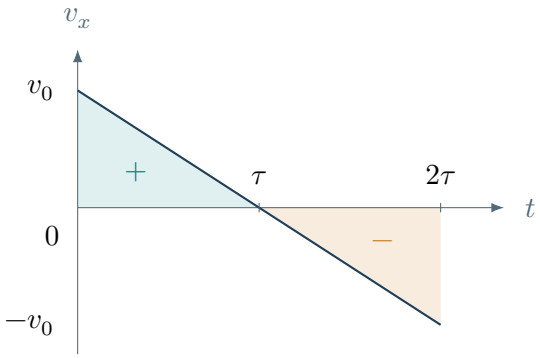
2.4 Διανυσματική ολοκλήρωση και αρχικές συνθήκες

Η ολοκλήρωση ως συσσώρευση μεταβολών Ένας αισθητήρας επιτάχυνσης καταγράφει πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα, αλλά η καταγραφή δεν μας λέει με ποια ταχύτητα ξεκίνησε το σώμα. Σε μικρό χρονικό διάστημα Δt, η μεταβολή είναι περίπου $\vec{a}(t)\Delta t$. Αθροίζοντας πολλές τέτοιες συνεισφορές και παίρνοντας το όριο όταν τα διαστήματα μικραίνουν, βρίσκουμε τη συνολική μεταβολή ταχύτητας. Αυτό είναι το φυσικό νόημα του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\,\mathrm{d}t'.$$

Το t' είναι μεταβλητή ολοκλήρωσης, ενώ το t το άνω όριο στο οποίο θέλουμε το αποτέλεσμα. Ομοίως, το ολοκλήρωμα της ταχύτητας δίνει μετατόπιση. Και οι δύο πράξεις γίνονται ανά συνιστώσα, επειδή προσθέτουμε ανεξάρτητα τις μεταβολές σε κάθε σταθερό άξονα.

Η εικόνα του ολοκληρώματος ως προσημασμένου εμβαδού χρειάζεται προσοχή. Στο διάγραμμα μιας συνιστώσας ταχύτητας, τα τμήματα πάνω από τον χρονικό άξονα δίνουν θετική μετατόπιση και τα τμήματα κάτω από αυτόν αρνητική. Στο σχήμα 2.4 ένα σώμα κινείται αρχικά προς τα δεξιά και κατόπιν προς τα αριστερά. Τα δύο εμβαδά αλληλοαναιρούνται, αλλά η διαδρομή δεν μηδενίζεται.



Σχήμα 2.4. Για $v_x = v_0(1 - t/\tau)$, με $v_0, \tau > 0$, η μετατόπιση από 0 έως 2τ είναι μηδέν. Το συνολικό μήκος της διαδρομής είναι $v_0\tau$, το άθροισμα των απόλυτων τιμών των δύο τριγωνικών εμβαδών.

Γενικά, το διανυόμενο μήκος στο χρονικό διάστημα είναι $s = \int_{t_0}^{t} \|\vec{v}(t')\|\,\mathrm{d}t'$ για $t \geq t_0$. Το μέτρο της μετατόπισης είναι αντίθετα $\left\|\int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,\mathrm{d}t'\right\|$. Οι δύο ποσότητες συμπίπτουν σε κίνηση πάνω σε ευθεία χωρίς αλλαγή φοράς, αλλά διαφέρουν σε καμπύλη διαδρομή ή όταν το σώμα επιστρέφει.

Παράγουσες και διανυσματικές σταθερές Το αόριστο ολοκλήρωμα εκφράζει την αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης. Αναζητούμε συναρτήσεις που έχουν δεδομένη παράγωγο. Αν δύο διανυσματικές συναρτήσεις έχουν την ίδια παράγωγο σε ένα διάστημα, η διαφορά τους είναι σταθερό διάνυσμα. Για $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \vec{A}(t)\,\mathrm{d}t = &\left(\int A_x(t)\,\mathrm{d}t\right)\hat{x} + \left(\int A_y(t)\,\mathrm{d}t\right)\hat{y} \\ &+ \left(\int A_z(t)\,\mathrm{d}t\right)\hat{z} + \vec{C}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Σε κάθε ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους επιλέγουμε μία συγκεκριμένη παράγουσα. Όλες οι ανεξάρτητες σταθερές συγκεντρώνονται στο $\vec{C} = C_x\hat{x} + C_y\hat{y} + C_z\hat{z}$, ώστε να μην τις προσθέσουμε δύο φορές.

Από γνωστή επιτάχυνση παίρνουμε λοιπόν

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t + \vec{C}_v. \tag{2.6}$$

Εδώ το ολοκλήρωμα συμβολίζει μία επιλεγμένη παράγουσα $\vec{F}(t)$. Η αρχική συνθήκη $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ δίνει $\vec{C}_v = \vec{v}_0 - \vec{F}(t_0)$. Η ταχύτητα επομένως ισούται με την αρχική της τιμή συν τη συσσωρευμένη μεταβολή.

Η θέση προκύπτει με νέα ολοκλήρωση:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t + \vec{C}_r. \tag{2.7}$$

Αν $\vec{G}(t)$ είναι η επιλεγμένη παράγουσα της ταχύτητας, η συνθήκη $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ δίνει $\vec{C}_r = \vec{r}_0 - \vec{G}(t_0)$. Τα $\vec{C}_v$ και $\vec{C}_r$ είναι ανεξάρτητα και έχουν διαφορετικές μονάδες. Το πρώτο έχει μονάδες ταχύτητας και το δεύτερο μήκους. Συνολικά, οι δύο διανυσματικές αρχικές συνθήκες περιέχουν έξι αριθμητικά δεδομένα στον χώρο.

Οι ίδιες λύσεις γράφονται χωρίς άγνωστες σταθερές ως

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\,\mathrm{d}t', \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,\mathrm{d}t'.$$

Για σταθερή επιτάχυνση, το πρώτο ολοκλήρωμα είναι $\vec{a}(t-t_0)$. Η δεύτερη ολοκλήρωση δίνει τη γνωστή σχέση

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2.$$

Η μορφή αυτή ισχύει όταν το ίδιο το διάνυσμα επιτάχυνσης είναι σταθερό. Σταθερό μέτρο με μεταβαλλόμενη διεύθυνση δεν επαρκεί για να τη χρησιμοποιήσουμε.

Παράδειγμα από την επιτάχυνση στην τροχιά

Εκφώνηση. Έστω $\ell_* = 1\,\mathrm{m}$, $t_* = 1\,\mathrm{s}$ και $u = t/t_*$. Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου είναι $\vec{a}(t) = (\ell_*/t_*^2)(2\hat{x} + 6u\hat{y} - 4\hat{z})$. Στη στιγμή μηδέν γνωρίζουμε $\vec{v}_0 = (\ell_*/t_*)(\hat{x} + 2\hat{z})$ και $\vec{r}_0 = \ell_*(3\hat{y} - \hat{z})$. Να βρεθούν η ταχύτητα και η θέση και να ελεγχθούν οι αρχικές συνθήκες.

Ολοκληρώνουμε κάθε συνιστώσα της επιτάχυνσης ως αόριστο ολοκλήρωμα. Επειδή $\mathrm{d}t = t_*\,\mathrm{d}u$, η ολοκλήρωση εισάγει έναν παράγοντα t_*. Βρίσκουμε

$$\vec{v}(t) = \frac{\ell_*}{t_*}(2u\hat{x} + 3u^2\hat{y} - 4u\hat{z}) + \vec{C}_v.$$

Η παράγουσα που επιλέξαμε μηδενίζεται στο $u = 0$. Άρα $\vec{C}_v = \vec{v}_0$ και

$$\vec{v}(t) = \frac{\ell_*}{t_*}\left[(1+2u)\hat{x} + 3u^2\hat{y} + (2-4u)\hat{z}\right].$$

Για τη θέση ολοκληρώνουμε αυτή την πλήρη ταχύτητα, μαζί με τον σταθερό όρο της. Ο σταθερός όρος ταχύτητας παράγει όρο ανάλογο του χρόνου στη θέση:

$$\vec{r}(t) = \ell_*\left[(u+u^2)\hat{x} + u^3\hat{y} + (2u - 2u^2)\hat{z}\right] + \vec{C}_r.$$

Από την αρχική θέση έχουμε $\vec{C}_r = \ell_*(3\hat{y} - \hat{z})$, επομένως

$$\vec{r}(t) = \ell_*\left[(u+u^2)\hat{x} + (3+u^3)\hat{y} + (-1+2u-2u^2)\hat{z}\right].$$

Για $u = 0$ ανακτούμε τα δύο αρχικά διανύσματα. Παραγωγίζοντας τη θέση παίρνουμε την ταχύτητα, και παραγωγίζοντας ξανά επιστρέφουμε στη δοσμένη επιτάχυνση. Στο $t = t_* = 1\,\mathrm{s}$, για παράδειγμα, η θέση είναι $(2, 4, -1)\,\mathrm{m}$ και η ταχύτητα $(3, 3, -2)\,\mathrm{m/s}$. Οι επιμέρους συνιστώσες εξελίσσονται διαφορετικά, αλλά συνθέτουν μία κίνηση στον χώρο.

2.5 Λυμένες ασκήσεις

Οι επόμενες ασκήσεις συνδέουν τη γεωμετρία της τροχιάς με τον χρονικό νόμο κίνησης. Στις δύο πρώτες οι άξονες μένουν σταθεροί και βρίσκουμε τις παραγώγους ανά συνιστώσα. Στην τρίτη εξετάζουμε δύο σώματα ταυτόχρονα και χρησιμοποιούμε επιπλέον τους νόμους της δύναμης και της ορμής, τους οποίους θα διατυπώσουμε εκεί όπου χρειάζονται.

Άσκηση 1. Ελλειπτική τροχιά

Εκφώνηση. Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο με $x(t) = A\sin(\omega t)$ και $y(t) = B\cos(\omega t)$, όπου $A = 3\,\mathrm{m}$, $B = 4\,\mathrm{m}$ και $\omega = 5\,\mathrm{s}^{-1}$. Να βρεθούν η ταχύτητα, η επιτάχυνση, τα μέτρα τους και η εξίσωση της τροχιάς. Να προσδιοριστεί η φορά της κίνησης από την αρχική θέση.

Παραγώγιση και κανόνας αλυσίδας Θέτουμε $\theta = \omega t$, γωνία σε ακτίνια. Επειδή $\dot\theta = \omega$, η παράγωγος του ημιτόνου είναι $\omega\cos\theta$ και του συνημιτόνου $-\omega\sin\theta$. Έτσι

$$\vec v(t) = A\omega\cos\theta\,\hat x - B\omega\sin\theta\,\hat y,$$
$$\vec a(t) = -A\omega^2\sin\theta\,\hat x - B\omega^2\cos\theta\,\hat y.$$

Οι μονάδες $[A\omega] = \mathrm{m/s}$ και $[A\omega^2] = \mathrm{m/s^2}$ επιβεβαιώνουν τους παράγοντες της γωνιακής συχνότητας. Με τις δοσμένες τιμές, οι τύποι γίνονται

$$\vec v(t) = (15\cos\theta\,\hat x - 20\sin\theta\,\hat y)\,\mathrm{m/s},$$
$$\vec a(t) = (-75\sin\theta\,\hat x - 100\cos\theta\,\hat y)\,\mathrm{m/s^2}, \qquad \theta = (5\,\mathrm{s}^{-1})t.$$

Το αρνητικό πρόσημο στη δεύτερη παράγωγο κάθε συνιστώσας προέρχεται από τη διαδοχή παραγώγων ημιτόνου και συνημιτόνου, όχι από κάποια εκ των προτέρων επιλογή για τη φορά της επιτάχυνσης.

Μέτρα και γεωμετρική τροχιά Οι κάθετες συνιστώσες δίνουν

$$v(t) = \sqrt{225\cos^2\theta + 400\sin^2\theta}\,\mathrm{m/s},$$
$$\|\vec a(t)\| = \sqrt{5625\sin^2\theta + 10000\cos^2\theta}\,\mathrm{m/s^2}.$$

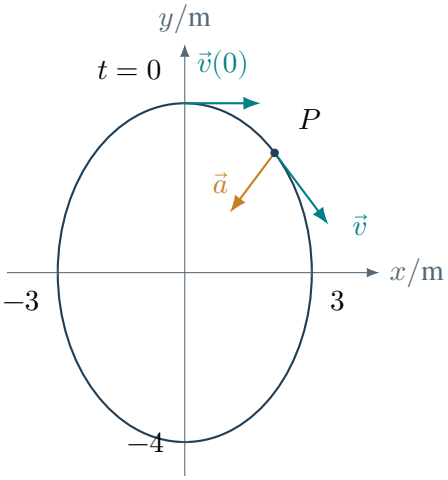
Για να βρούμε την τροχιά, εξαλείφουμε τον χρόνο. Από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε $\sin\theta = x/A$ και $\cos\theta = y/B$. Η ταυτότητα $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ δίνει

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \qquad A = 3\,\mathrm{m}, \quad B = 4\,\mathrm{m}. \tag{2.8}$$

Η τροχιά είναι έλλειψη με ημιάξονες A, B. Η εξίσωσή της περιγράφει τα σημεία από τα οποία περνά το σώμα, αλλά όχι το πότε τα διασχίζει. Η αρχική θέση είναι $(0, 4)\,\mathrm{m}$ και η αρχική ταχύτητα $15\hat x\,\mathrm{m/s}$. Άρα η κίνηση ξεκινά από την κορυφή προς τα δεξιά και είναι ωρολογιακή, όπως στο σχήμα 2.5.

Έλεγχοι και φυσική ερμηνεία Η περίοδος είναι $T = 2\pi/\omega = 2\pi/5\,\mathrm{s} \simeq 1.26\,\mathrm{s}$. Στην κορυφή της έλλειψης το μέτρο της ταχύτητας είναι $15\,\mathrm{m/s}$, ενώ στο δεξιό άκρο είναι $20\,\mathrm{m/s}$. Η αριθμητική ταχύτητα επομένως δεν είναι σταθερή. Αντίστοιχα, το μέτρο της επιτάχυνσης κυμαίνεται από 75 έως $100\,\mathrm{m/s^2}$.

Από τους διανυσματικούς τύπους επαληθεύουμε ότι $\vec a = -\omega^2\vec r$. Η επιτάχυνση δείχνει προς το κέντρο της έλλειψης, αλλά αυτό δεν συνεπάγεται ότι είναι πάντοτε κάθετη στην ταχύτητα. Πράγματι, $\vec v\cdot\vec a = \omega^3(B^2 - A^2)\sin\theta\cos\theta$, που γενικά δεν μηδενίζεται. Αν οι ημιάξονες γίνουν ίσοι, η τροχιά γίνεται κύκλος, η αριθμητική ταχύτητα γίνεται σταθερή και το γινόμενο μηδενίζεται παντού. Το όριο αυτό ελέγχει ταυτόχρονα τη γεωμετρία και τις παραγώγους.



Σχήμα 2.5. Η ταχύτητα είναι εφαπτομενική και η επιτάχυνση δείχνει προς το κέντρο. Στην έλλειψη, όμως, τα δύο διανύσματα δεν είναι γενικά κάθετα. Τα βέλη τους χρησιμοποιούν διαφορετικές κλίμακες μήκους.

Άσκηση 2. Κυβική τροχιά και γωνία ταχύτητας με επιτάχυνση

Εκφώνηση. Το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{r}(t) = \lambda t\hat{x} - bt^3\hat{y}$, όπου λ, b πραγματικές σταθερές. Να βρεθούν η τροχιά, η ταχύτητα, η επιτάχυνση και τα μέτρα τους. Να υπολογιστεί η γωνία $\varphi(t)$ ανάμεσα στην ταχύτητα και στην επιτάχυνση όπου αυτή ορίζεται.

Από τις συνιστώσες $x = \lambda t$ και $y = -bt^3$ φαίνεται ότι η οριζόντια κίνηση έχει σταθερό ρυθμό, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα μεταβάλλεται μη γραμμικά. Αν η θέση μετριέται σε μέτρα, οι μονάδες των σταθερών πρέπει να είναι $[\lambda] = \mathrm{m/s}$ και $[b] = \mathrm{m/s^3}$.

Εξάλειψη χρόνου και παράγωγοι Για $\lambda \neq 0$ η πρώτη εξίσωση δίνει $t = x/\lambda$. Την αντικαθιστούμε στη δεύτερη:

$$y = -\frac{b}{\lambda^3}x^3. \tag{2.9}$$

Το b/λ^3 έχει μονάδες αντίστροφου μήκους στο τετράγωνο, οπότε το δεξί μέλος έχει μονάδες μήκους. Για $t \geq 0$ η κίνηση διατρέχει το τμήμα της καμπύλης με $x/\lambda \geq 0$. Για $\lambda = 0$ δεν επιτρέπεται η διαίρεση και η κίνηση γίνεται πάνω στον άξονα y.

Η παραγώγιση δίνει

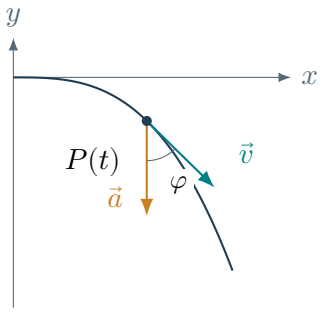
$$\vec{v} = \lambda\hat{x} - 3bt^2\hat{y}, \qquad \vec{a} = -6bt\hat{y}, \qquad v = \sqrt{\lambda^2 + 9b^2t^4}, \quad \|\vec{a}\| = 6|bt|.$$

Η απόλυτη τιμή στο μέτρο της επιτάχυνσης είναι απαραίτητη, επειδή το b και ο χρόνος μπορούν να έχουν πρόσημο. Στο σχήμα 2.6 φαίνεται η περίπτωση $\lambda, b > 0$ και $t > 0$. Η ταχύτητα στρέφεται ολοένα περισσότερο προς τα κάτω, ενώ η επιτάχυνση είναι κατακόρυφη.

Η γωνία από το εσωτερικό γινόμενο Για μη μηδενικά $\vec{v}, \vec{a}$, ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου δίνει $\vec{v}\cdot\vec{a} = v\|\vec{a}\|\cos\varphi$. Από τις συνιστώσες έχουμε $\vec{v}\cdot\vec{a} = \lambda\cdot 0 + (-3bt^2)(-6bt) = 18b^2t^3$. Συνεπώς

$$\cos\varphi(t) = \frac{18b^2t^3}{6|bt|\sqrt{\lambda^2 + 9b^2t^4}}. \tag{2.10}$$

Για $t > 0$ και $b \neq 0$ απλοποιείται σε $\cos\varphi = 3|b|t^2/\sqrt{\lambda^2 + 9b^2t^4}$, και η ίδια η γωνία είναι το τόξο συνημιτόνου αυτής της ποσότητας. Όταν επίσης $\lambda \neq 0$, έχουμε $0 < \varphi < \pi/2$. Καθώς $t \to 0^+$ η γωνία τείνει στο $\pi/2$, ενώ για μεγάλους χρόνους τείνει στο μηδέν. Στο ίδιο το $t = 0$, όμως, η επιτάχυνση είναι μηδενική και η γωνία δεν ορίζεται.



Σχήμα 2.6. Σχηματική κίνηση για θετικά λ, b, t. Η γωνία της ταχύτητας με την καθοδική επιτάχυνση είναι οξεία και η αριθμητική ταχύτητα αυξάνει.

Για παράδειγμα, αν $\lambda = 2\,\mathrm{m/s}$, $b = 1\,\mathrm{m/s^3}$ και $t = 1\,\mathrm{s}$, βρίσκουμε $\vec{v} = (2,-3)\,\mathrm{m/s}$ και $\vec{a} = (0,-6)\,\mathrm{m/s^2}$. Τότε $\cos\varphi = 18/(6\sqrt{13}) = 3/\sqrt{13}$ και $\varphi \simeq 33.7^\circ$. Το θετικό γινόμενο συμφωνεί με την αύξηση του μέτρου της ταχύτητας.

Αν $b = 0$, η επιτάχυνση είναι μηδέν σε κάθε στιγμή και δεν υπάρχει γωνία με αυτήν. Αν $\lambda = 0$ αλλά $b \neq 0$, για $t > 0$ τα δύο μη μηδενικά βέλη έχουν ίδια φορά και $\varphi = 0$. Για αρνητικούς χρόνους ο γενικός τύπος (2.10) δίνει αρνητικό συνημίτονο. Οι εξαιρέσεις αυτές δείχνουν γιατί ελέγχουμε τις μηδενικές ποσότητες πριν διαιρέσουμε με μέτρα διανυσμάτων.

Άσκηση 3. Συνάντηση και πλήρως πλαστική κρούση

Εκφώνηση. Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$, με $m > 0$, έχουν πριν από τη σύγκρουσή τους θέσεις

$$\vec{r}_1(t) = \ell_*[(3u + 2u^2)\hat{x} + (4 + 4u^2)\hat{y} + (5 + 2u)\hat{z}],$$
$$\vec{r}_2(t) = \ell_*[(20 - u - u^2)\hat{x} + (10 + 9u - 2u^2)\hat{y} + (1 + 4u)\hat{z}],$$

όπου $\ell_* = 1\,\mathrm{m}$, $t_* = 1\,\mathrm{s}$ και $u = t/t_*$. Να βρεθούν ο χρόνος και το σημείο συνάντησης, οι συνισταμένες δυνάμεις και η συνολική ορμή πριν από τη σύγκρουση. Αν τα σωματίδια ενώνονται, να βρεθεί η θέση τους μετά την κρούση. Η εξωτερική ώση κατά τη σύντομη κρούση θεωρείται αμελητέα και η συνολική εξωτερική δύναμη μετά από αυτήν θεωρείται μηδενική.

Η τελευταία υπόθεση καθορίζει τη μετέπειτα κίνηση. Οι δοσμένες τροχιές περιγράφουν όσα συμβαίνουν πριν από τη σύγκρουση και δεν καθορίζουν από μόνες τους ποιες εξωτερικές δυνάμεις θα δρουν μετά. Θα λύσουμε το τελευταίο ερώτημα με τη ρητά δοσμένη μηδενική συνισταμένη.

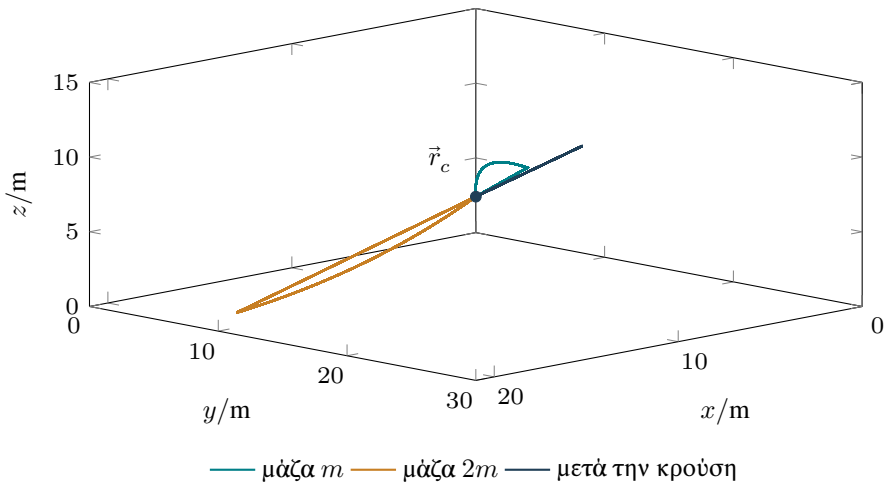
Ταυτόχρονη ισότητα και των τριών συντεταγμένων Η τομή δύο γεωμετρικών τροχιών δεν αρκεί για σύγκρουση. Τα δύο σωματίδια πρέπει να φθάσουν στο ίδιο σημείο την ίδια στιγμή. Επιλέγουμε πρώτα την απλούστερη εξίσωση, την ισότητα των z:

$$5 + 2u = 1 + 4u \quad\Longrightarrow\quad u_c = 2, \qquad t_c = 2t_* = 2\,\mathrm{s}.$$

Αυτή είναι υποψήφια στιγμή συνάντησης. Ελέγχουμε τις άλλες δύο συντεταγμένες στην ίδια τιμή:

$$x_1(2t_*) = [3\cdot 2 + 2\cdot 2^2]\ell_* = 14\ell_*, \quad x_2(2t_*) = [20 - 2 - 2^2]\ell_* = 14\ell_*,$$
$$y_1(2t_*) = [4 + 4\cdot 2^2]\ell_* = 20\ell_*, \qquad y_2(2t_*) = [10 + 9\cdot 2 - 2\cdot 2^2]\ell_* = 20\ell_*.$$

Επειδή και τα τρία ζεύγη συμφωνούν, το σημείο σύγκρουσης είναι $\vec{r}_c = (14, 20, 9)\,\mathrm{m}$. Η εξίσωση των z είχε μοναδική λύση, οπότε δεν υπάρχει άλλη κοινή στιγμή στις δοσμένες παραμετρικές κινήσεις. Το σχήμα 2.7 δείχνει τις τροχιές και τη συνέχεια του ενωμένου σώματος.



Σχήμα 2.7. Οι δύο προ της κρούσης κινήσεις φθάνουν στο ίδιο τρισδιάστατο σημείο για $t_c = 2\,\mathrm{s}$. Με τις υποθέσεις του προβλήματος, το ενωμένο σώμα συνεχίζει σε ευθεία με σταθερή ταχύτητα.

Από τις παραγώγους στις δυνάμεις Για να απαντήσουμε στο ερώτημα των δυνάμεων, χρησιμοποιούμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για σώμα σταθερής μάζας σε αδρανειακό σύστημα. Η συνισταμένη ισούται με τη μάζα επί την επιτάχυνση, $\vec{F}_{\text{ολ}} = m\vec{a}$. Η σχέση θα μελετηθεί αναλυτικά στη δυναμική. Εδώ αρκεί για να μετατρέψουμε τις ήδη υπολογίσιμες επιταχύνσεις σε συνισταμένες δυνάμεις.

Παραγωγίζουμε τις πολυωνυμικές θέσεις για $t < t_c$:

$$\vec{v}_1 = \frac{\ell_*}{t_*}\big[(3+4u)\hat{x} + 8u\hat{y} + 2\hat{z}\big], \qquad \vec{a}_1 = \frac{\ell_*}{t_*^2}(4\hat{x} + 8\hat{y}),$$
$$\vec{v}_2 = \frac{\ell_*}{t_*}\big[(-1-2u)\hat{x} + (9-4u)\hat{y} + 4\hat{z}\big], \quad \vec{a}_2 = \frac{\ell_*}{t_*^2}(-2\hat{x} - 4\hat{y}).$$

Οι συνισταμένες είναι συνεπώς

$$\vec{F}_1 = \frac{m\ell_*}{t_*^2}(4\hat{x} + 8\hat{y}), \qquad \vec{F}_2 = 2m\vec{a}_2 = -\vec{F}_1.$$

Οι μονάδες είναι δύναμης, αφού $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m/s^2}$. Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από τις τροχιές ποια επιμέρους αλληλεπίδραση παράγει κάθε συνισταμένη. Επίσης, το ότι οι δύο συνισταμένες είναι αντίθετες δεν αποδεικνύει ότι αποτελούν ένα συγκεκριμένο ζεύγος δράσης και αντίδρασης.

Για το συνολικό σύστημα, οι εσωτερικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης ακυρώνονται ανά ζεύγη στο άθροισμα των δυνάμεων. Επομένως το $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ δίνει τη συνολική εξωτερική δύναμη, που εδώ είναι μηδέν πριν από τη σύγκρουση. Οι πολυωνυμικές παράγωγοι δεν περιγράφουν τη σύντομη απότομη αλλαγή ταχύτητας κατά την ίδια την κρούση.

Συνολική ορμή πριν από την κρούση Η ορμή ενός σώματος σταθερής μάζας είναι $\vec{p} = m\vec{v}$. Για τα δύο σώματα η συνολική ορμή είναι το διανυσματικό άθροισμα $\vec{P} = m\vec{v}_1 + 2m\vec{v}_2$. Η παραγώγισή της δίνει $\dot{\vec{P}} = m\vec{a}_1 + 2m\vec{a}_2 = \vec{F}_{\text{εξ,ολ}}$. Όταν η συνολική εξωτερική δύναμη είναι μηδέν, η συνολική ορμή είναι σταθερή.

Ελέγχουμε άμεσα με τις συγκεκριμένες ταχύτητες:

$$\vec{P}(t) = \frac{m\ell_*}{t_*}\{[(3+4u) + 2(-1-2u)]\hat{x} + [8u + 2(9-4u)]\hat{y} + [2 + 2\cdot 4]\hat{z}\}$$
$$= \frac{m\ell_*}{t_*}(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z}).$$

Οι όροι με τον χρόνο ακυρώνονται σε κάθε συνιστώσα. Οι συντελεστές μάζας είναι ουσιαστικοί. Το απλό άθροισμα των ταχυτήτων δεν είναι η συνολική ορμή και δεν θα έδινε αυτό το αποτέλεσμα. Η μονάδα της ορμής είναι $\mathrm{kg\,m/s}$.

Τι διατηρείται κατά τη σύγκρουση Ολοκληρώνοντας τη σχέση για τη συνολική ορμή στη διάρκεια της κρούσης, παίρνουμε $\vec{P}_{\text{μετά}} - \vec{P}_{\text{πριν}} = \int \vec{F}_{\text{εξ,ολ}}\,\mathrm{d}t$. Το ολοκλήρωμα λέγεται εξωτερική ώση και μετρά τη μεταβολή της συνολικής ορμής. Στο μοντέλο του προβλήματος το θεωρούμε αμελητέο και εξισώνουμε τις δύο ορμές.

Αμέσως πριν από τη σύγκρουση, για $u_c = 2$, οι ταχύτητες είναι $\vec{v}_1^{\,-} = (11, 16, 2)\,\mathrm{m/s}$ και $\vec{v}_2^{\,-} = (-5, 1, 4)\,\mathrm{m/s}$. Το άθροισμα με τις μάζες δίνει ξανά $\vec{P} = (m\ell_*/t_*)(1, 18, 10)$. Επειδή τα σώματα ενώνονται σε μάζα $3m$, αποκτούν κοινή ταχύτητα $\vec{V}$ με

$$3m\vec{V} = \vec{P}, \qquad \vec{V} = \frac{\ell_*}{3t_*}(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z}).$$

Αριθμητικά είναι $\vec{V} = (1/3, 6, 10/3)\,\mathrm{m/s}$. Η κρούση ονομάζεται πλήρως πλαστική επειδή τα σώματα παραμένουν ενωμένα. Η διατήρηση της ορμής δεν συνεπάγεται διατήρηση της κινητικής ενέργειας.

Η κινητική ενέργεια σώματος μάζας M και αριθμητικής ταχύτητας v είναι $K = Mv^2/2$. Εδώ $\|\vec{v}_1^{\,-}\|^2 = 381\,\mathrm{m^2/s^2}$ και $\|\vec{v}_2^{\,-}\|^2 = 42\,\mathrm{m^2/s^2}$, οπότε

$$K_{\text{πριν}} = \frac{465}{2}\frac{m\ell_*^2}{t_*^2}, \qquad K_{\text{μετά}} = \frac{425}{6}\frac{m\ell_*^2}{t_*^2}.$$

Η μείωση είναι $(485/3)m\ell_*^2/t_*^2 > 0$. Η ενέργεια αυτή μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια, παραμόρφωση και άλλες μορφές που δεν περιλαμβάνονται στην κινητική ενέργεια της κοινής μεταφορικής κίνησης.

Η νέα αρχική συνθήκη μετά την κρούση Με μηδενική συνολική εξωτερική δύναμη, το ενωμένο σώμα έχει μηδενική επιτάχυνση και διατηρεί το $\vec{V}$. Η κατάλληλη αρχική στιγμή είναι τώρα το t_c, όχι το μηδέν. Από την ολοκλήρωση της σταθερής ταχύτητας προκύπτει

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\text{μετά}}(t) &= \ell_*(14\hat{x} + 20\hat{y} + 9\hat{z}) \\ &\quad + \frac{\ell_*(t - 2t_*)}{3t_*}(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z}), \qquad t \geq 2t_*.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Η θέση είναι συνεχής, αφού στο $t = 2t_*$ επιστρέφει το $\vec{r}_c$. Η παράγωγός της είναι η κοινή ταχύτητα $\vec{V}$ και η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται για $t > t_c$. Στην ίδια τη στιγμή της ιδεατής κρούσης η ταχύτητα αλλάζει απότομα, γι' αυτό δεν εφαρμόζουμε εκεί τη συνηθισμένη παραγώγιση μιας λείας τροχιάς.

Αναπτύσσοντας τον χρόνο στον τελευταίο τύπο, παίρνουμε ισοδύναμα

$$\vec{r}_{\text{μετά}}(t) = \frac{\ell_*}{3}\big[(40 + u)\hat{x} + (24 + 18u)\hat{y} + (7 + 10u)\hat{z}\big].$$

Αυτός είναι και ο τύπος του κέντρου μάζας πριν από τη σύγκρουση, $\vec{R} = (\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2)/3$, δηλαδή της μέσης θέσης σταθμισμένης με τις μάζες. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $\vec{P}/(3m)$ και παραμένει σταθερή. Η συμφωνία προσφέρει έναν ανεξάρτητο έλεγχο της τελικής τροχιάς.

Από την τροχιά στον χρονικό νόμο

Η θέση δηλώνει πού βρίσκεται το σώμα ως προς μια αρχή. Η ταχύτητα περιγράφει τη στιγμιαία μεταβολή της θέσης και η επιτάχυνση τη στιγμιαία μεταβολή της ταχύτητας. Οι τρεις ποσότητες είναι διανύσματα και δεν έχουν γενικά την ίδια διεύθυνση. Μια γεωμετρική εξίσωση τροχιάς δεν υποκαθιστά τον χρονικό νόμο κίνησης.

Η ολοκλήρωση αντιστρέφει τη διαδοχή των παραγώγων, αλλά χρειάζεται αρχική ταχύτητα και αρχική θέση για να δώσει μία συγκεκριμένη κίνηση. Στα σύνθετα προβλήματα ελέγχουμε κάθε συνιστώσα, τις μονάδες, τις αρχικές τιμές και τις περιπτώσεις όπου μηδενίζονται οι ποσότητες με τις οποίες διαιρούμε. Στην κρούση χρειάστηκε επιπλέον να ξεχωρίσουμε τη διατήρηση της ορμής από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας και να δηλώσουμε ποιες δυνάμεις καθορίζουν την κίνηση μετά το συμβάν.