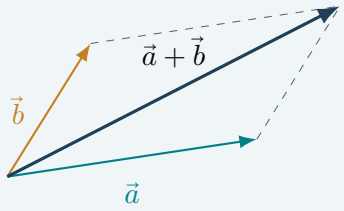
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Χημικών Μηχανικών

ΦΥΣΙΚΗ Ι

Σημειώσεις διαλέξεων



Διάλεξη 1

Διανύσματα και διανυσματικά γινόμενα

Συνιστώσες · Προβολές · Γεωμετρία των γινομένων

Περιεχόμενα

1 Διανύσματα και διανυσματικά γινόμενα **1**

1.1 Διάνυσμα και βαθμωτό μέγεθος 1

1.2 Πρόσθεση, αντίθετο και αφαίρεση 1

1.3 Βασική άλγεβρα διανυσμάτων 3

1.4 Μοναδιαίο διάνυσμα 3

1.5 Συνιστώσες διανύσματος 4

1.6 Εσωτερικό γινόμενο 4

1.7 Προβολή ενός διανύσματος σε άλλο 6

1.8 Εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου 7

1.9 Εξωτερικό γινόμενο 8

1.10 Μικτό γινόμενο και όγκος 10

1.11 Σύνοψη και σύντομη εξάσκηση 11

Διάλεξη 1

Διανύσματα και διανυσματικά γινόμενα

Για να περιγράψουμε μια διαδρομή, δεν αρκεί να γνωρίζουμε πόσα μέτρα περπατήσαμε. Χρειάζεται να ξέρουμε και προς τα πού κινηθήκαμε. Δύο διαδοχικές μετατοπίσεις μπορούν να μας απομακρύνουν περισσότερο από την αφετηρία ή να μας φέρουν ξανά σε αυτήν, ανάλογα με τις κατευθύνσεις τους. Τα διανύσματα οργανώνουν ακριβώς αυτή την πληροφορία για το μέτρο και την κατεύθυνση.

Η ίδια γλώσσα περιγράφει δυνάμεις, ταχύτητες και πεδία. Θα ξεκινήσουμε από τη γεωμετρία των βελών, θα τη συνδέσουμε με τις συνιστώσες σε τρεις άξονες και θα αναπτύξουμε τρεις διαφορετικούς τρόπους πολλαπλασιασμού διανυσμάτων. Κάθε γινόμενο απαντά σε διαφορετικό γεωμετρικό και φυσικό ερώτημα.

1.1 Διάνυσμα και βαθμωτό μέγεθος

Η πληροφορία ότι ένα δείγμα έχει μάζα $2\,\mathrm{kg}$ είναι πλήρης ως προς τη μάζα του. Δεν υπάρχει κατεύθυνση την οποία πρέπει να προσθέσουμε σε αυτή την περιγραφή. Η μάζα είναι βαθμωτό μέγεθος. Το ίδιο ισχύει για τον χρόνο, τη θερμοκρασία, την ενέργεια και το ηλεκτρικό φορτίο. Μια βαθμωτή ποσότητα μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδενική, όταν το επιτρέπει ο φυσικός της ορισμός. Το πρόσημο του φορτίου, για παράδειγμα, δεν το μετατρέπει σε διάνυσμα.

Αντίθετα, η δήλωση ότι ένα σώμα μετατοπίστηκε κατά $5\,\mathrm{m}$ δεν προσδιορίζει την τελική του θέση. Μια μετατόπιση $5\,\mathrm{m}$ προς ανατολάς διαφέρει από μια μετατόπιση ίδιου μέτρου προς βορρά. Η μετατόπιση είναι διανυσματικό μέγεθος. Άλλα παραδείγματα είναι η ταχύτητα $\vec{v}$, η δύναμη $\vec{F}$, το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα παριστάνεται με προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Το μήκος του βέλους, σε επιλεγμένη κλίμακα σχεδίασης, δίνει το *μέτρο*. Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται καθορίζει τη *διεύθυνση*, ενώ η αιχμή επιλέγει μία από τις δύο δυνατές *φορές* πάνω σε αυτή την ευθεία. Δύο διανύσματα είναι ίσα όταν έχουν ίδιο μέτρο, ίδια διεύθυνση και ίδια φορά.

Θα γράφουμε $\vec{a}$ για ένα διάνυσμα και $\|\vec{a}\|$ για το μέτρο του, το οποίο είναι πάντοτε μη αρνητικό. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα χρησιμοποιούμε επίσης το $a = \|\vec{a}\|$. Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ έχει μέτρο μηδέν και δεν διαθέτει καθορισμένη κατεύθυνση. Οι φυσικές μονάδες συνοδεύουν και τα διανυσματικά μεγέθη, όπως m για μετατόπιση και N για δύναμη.

Στη διανυσματική άλγεβρα μπορούμε να μεταφέρουμε ένα βέλος παράλληλα χωρίς να αλλάξουμε το διάνυσμα που παριστάνει. Μιλάμε τότε για *ελεύθερο διάνυσμα*. Η φυσική εφαρμογή μπορεί να απαιτεί πρόσθετες πληροφορίες. Το διάνυσμα θέσης χρειάζεται συγκεκριμένη αρχή αναφοράς, ενώ η περιστροφική επίδραση μιας δύναμης εξαρτάται και από το σημείο εφαρμογής της. Η ισότητα των βελών δεν συνεπάγεται σε κάθε πρόβλημα ταυτόσημη φυσική δράση.

1.2 Πρόσθεση, αντίθετο και αφαίρεση

Δύο διαδοχικές μετατοπίσεις Έστω ότι περπατάμε πρώτα κατά μετατόπιση $\vec{a}$ και κατόπιν κατά $\vec{b}$. Η συνολική μετατόπιση ενώνει την αρχική με την τελική θέση. Για να τη σχεδιάσουμε, τοποθετούμε την αρχή

του δεύτερου βέλους στο πέρας του πρώτου. Το βέλος από την αρχή του $\vec{a}$ μέχρι το πέρας του μεταφερμένου $\vec{b}$ είναι το $\vec{a}+\vec{b}$. Αυτός είναι ο κανόνας του τριγώνου.

Αν τα δύο βέλη σχεδιαστούν με κοινή αρχή, συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο που έχουν ως πλευρές. Η διαγώνιος από την κοινή αρχή παριστάνει το ίδιο άθροισμα. Το σχήμα 1.1 δείχνει γιατί οι δύο κατασκευές είναι ισοδύναμες. Η μεταφορά του $\vec{b}$ στην άκρη του $\vec{a}$ δημιουργεί ακριβώς την απέναντι πλευρά του παραλληλογράμμου.

(α) Διαδοχική τοποθέτηση (β) Παραλληλόγραμμο

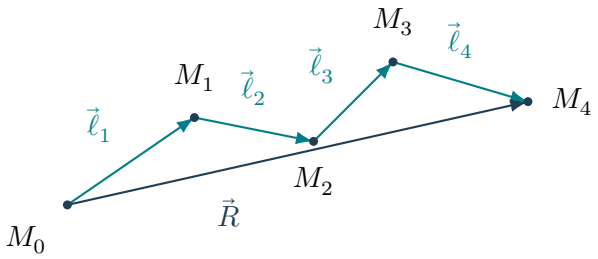
Σχήμα 1.1. Οι δύο γεωμετρικοί κανόνες δίνουν το ίδιο διάνυσμα. Οι διακεκομμένες πλευρές είναι παράλληλες μεταφορές των αρχικών βελών.

Αν κινηθούμε $3\,\mathrm{m}$ προς ανατολάς και $4\,\mathrm{m}$ προς βορρά, η συνολική μετατόπιση έχει μέτρο $5\,\mathrm{m}$ από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Το μήκος της διαδρομής, ωστόσο, είναι $7\,\mathrm{m}$. Προσθέτουμε τα μέτρα των διαδοχικών τμημάτων για να βρούμε πόσο περπατήσαμε, αλλά τα διανύσματα για να βρούμε πού καταλήξαμε.

Η διαδοχική τοποθέτηση επεκτείνεται σε οποιονδήποτε αριθμό βελών. Σε μια πολυμερική αλυσίδα, για παράδειγμα, τα $\vec{\ell}_1,\dots,\vec{\ell}_4$ ενώνουν διαδοχικά μονομερή $M_0,\dots,M_4$. Το διάνυσμα ανάμεσα στα δύο άκρα είναι

$$\vec{R}=\vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2+\vec{\ell}_3+\vec{\ell}_4. \tag{1.1}$$

Στο σχήμα 1.2 η αρχή του $\vec{R}$ είναι η αρχή του πρώτου δεσμού και το πέρας του είναι το πέρας του τελευταίου. Μια αλλαγή στον προσανατολισμό των δεσμών μπορεί να αλλάξει το $\vec{R}$ χωρίς να αλλάξει το συνολικό μήκος της αλυσίδας.

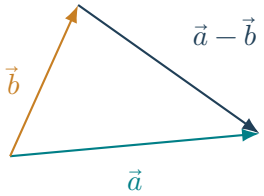


Σχήμα 1.2. Η ολική μετατόπιση εξαρτάται μόνο από τα άκρα, ενώ το συνολικό μήκος περιλαμβάνει όλα τα ενδιάμεσα τμήματα.

Η διαφορά δύο διανυσμάτων Το αντίθετο $-\vec{b}$ έχει ίδιο μέτρο και ίδια διεύθυνση με το $\vec{b}$, αλλά αντίθετη φορά. Η αφαίρεση ορίζεται ως πρόσθεση του αντιθέτου:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}). \tag{1.2}$$

Όταν τα δύο αρχικά διανύσματα έχουν κοινή αρχή, η διαφορά είναι το βέλος από το πέρας του $\vec{b}$ προς το πέρας του $\vec{a}$. Πράγματι, αν σε αυτό το βέλος προσθέσουμε το $\vec{b}$, καταλήγουμε στο $\vec{a}$. Η σειρά της αφαίρεσης καθορίζει τη φορά, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3. Η διαφορά ξεκινά από το άκρο του διανύσματος που αφαιρούμε και καταλήγει στο άκρο του πρώτου.

1.3 Βασική άλγεβρα διανυσμάτων

Η γεωμετρική πρόσθεση επιτρέπει να χειριζόμαστε βέλη με σταθερούς αλγεβρικούς κανόνες. Η εναλλαγή των δύο διαδοχικών μετατοπίσεων δεν αλλάζει την τελική θέση. Γι' αυτό $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, ιδιότητα που ονομάζουμε αντιμεταθετικότητα. Για τρία βέλη μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα οποιοδήποτε από τα δύο επιμέρους αθροίσματα, οπότε

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

Αυτή είναι η προσεταιριστικότητα. Το $\vec{0}$ δεν αλλάζει ένα διάνυσμα όταν προστεθεί σε αυτό, ενώ $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Ο πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό λ αλλάζει την κλίμακα του βέλους. Για $\lambda>0$ διατηρείται η φορά, για $\lambda<0$ αντιστρέφεται και για $\lambda=0$ παίρνουμε το μηδενικό διάνυσμα. Σε κάθε περίπτωση $\|\lambda\vec{a}\|=|\lambda|\,\|\vec{a}\|$. Η επιμεριστικότητα εκφράζεται με τις σχέσεις

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}, \qquad (\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a},$$

ενώ $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ και $1\vec{a}=\vec{a}$. Οι σχέσεις αυτές δικαιολογούν την αναδιάταξη αθροισμάτων και την εξαγωγή κοινού παράγοντα.

Στη Φυσική, η μαθηματικά επιτρεπτή πράξη πρέπει να είναι και διαστατικά συνεπής. Προσθέτουμε δύο μετατοπίσεις ή δύο δυνάμεις, αλλά δεν προσθέτουμε μια δύναμη σε μια ταχύτητα. Ένας βαθμωτός συντελεστής μπορεί επίσης να έχει μονάδες. Στη σχέση $\vec{F}=m\vec{a}$, για παράδειγμα, η μάζα μετατρέπει τις μονάδες της επιτάχυνσης σε μονάδες δύναμης.

1.4 Μοναδιαίο διάνυσμα

Μερικές φορές θέλουμε να δηλώσουμε μόνο την κατεύθυνση ενός μεγέθους. Αν διαιρέσουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα με το μέτρο του, το νέο βέλος έχει μέτρο ένα και διατηρεί τη φορά του αρχικού. Ορίζουμε έτσι το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\hat{a}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \qquad \vec{a}=\|\vec{a}\|\hat{a}. \tag{1.3}$$

Το καπελάκι δηλώνει μοναδιαίο διάνυσμα και το βέλος γενικό διάνυσμα. Η κανονικοποίηση δίνει $\|\hat{a}\|=\|\vec{a}\|/\|\vec{a}\|=1$. Επειδή διαιρούμε μεγέθη με τις ίδιες μονάδες, το $\hat{a}$ είναι αδιάστατο. Δεν ορίζουμε $\hat{0}$, αφού δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με μηδέν και δεν υπάρχει μοναδική κατεύθυνση για να επιλέξουμε.

Για παράδειγμα, μια μετατόπιση $\vec{a}=(3\hat{x}+4\hat{y})\,\mathrm{m}$ έχει μέτρο $5\,\mathrm{m}$. Το μοναδιαίο διάνυσμα στη φορά της είναι $\hat{a}=(3/5)\hat{x}+(4/5)\hat{y}$. Οι αριθμοί $3/5$ και $4/5$ δεν έχουν μονάδες και τα τετράγωνά τους αθροίζονται σε ένα. Έτσι το ίδιο $\hat{a}$ μπορεί να περιγράψει και τη φορά μιας ταχύτητας ή δύναμης, παρότι αυτά τα μεγέθη έχουν διαφορετικές μονάδες.

1.5 Συνιστώσες διανύσματος

Για να υπολογίσουμε μια διαδρομή σε χάρτη, μπορούμε να μετρήσουμε χωριστά τη μετατόπιση προς ανατολάς και προς βορρά. Στον χώρο προσθέτουμε μία τρίτη ανεξάρτητη κατεύθυνση. Επιλέγουμε τρεις κάθετους άξονες και τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ προς τις θετικές τους φορές. Η βάση είναι *ορθοκανονική*, δηλαδή τα διανύσματά της είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουν μέτρο ένα. Θεωρούμε δεξιόστροφο προσανατολισμό, του οποίου η σημασία θα φανεί στο εξωτερικό γινόμενο.

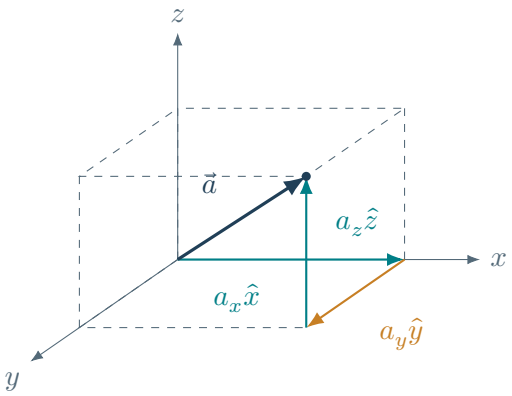
Κάθε διάνυσμα αναλύεται μοναδικά ως

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} \equiv (a_x, a_y, a_z). \tag{1.4}$$

Οι συνιστώσες a_x, a_y, a_z είναι προσημασμένα βαθμωτά μεγέθη με τις ίδιες μονάδες με το $\vec{a}$. Το a_x μπορεί να είναι αρνητικό, ενώ το $\|\vec{a}\|$ δεν μπορεί. Επίσης, η συνιστώσα a_x διαφέρει από το διάνυσμα $a_x\hat{x}$, το οποίο είναι το μέρος του $\vec{a}$ κατά τον άξονα x.

Στο σχήμα 1.4 φθάνουμε στο άκρο του διανύσματος προσθέτοντας διαδοχικά τα τρία κάθετα μέρη. Στο επίπεδο xy, η διαγώνιος έχει τετράγωνο μήκους $a_x^2 + a_y^2$. Ένα δεύτερο ορθογώνιο τρίγωνο, με κατακόρυφη πλευρά μήκους $|a_z|$, δίνει

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.5}$$



Σχήμα 1.4. Ανάλυση σε τρεις κάθετες κατευθύνσεις. Οι ακμές του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου συνδέουν τις προβολές με το άκρο του $\vec{a}$. Η προοπτική στο χαρτί δεν διατηρεί τις ορθές γωνίες.

Η πρόσθεση γίνεται ανεξάρτητα σε κάθε κατεύθυνση. Αναλύουμε και τα δύο διανύσματα και συγκεντρώνουμε τους όρους με τον ίδιο μοναδιαίο φορέα:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z). \tag{1.6}$$

Αν, για παράδειγμα, $\vec{a} = (2, -1, 3)\,\mathrm{m}$ και $\vec{b} = (-1, 4, 0)\,\mathrm{m}$, τότε $\vec{a} + \vec{b} = (1, 3, 3)\,\mathrm{m}$. Το μέτρο του αθροίσματος είναι $\sqrt{19}\,\mathrm{m}$ και δεν ισούται γενικά με το άθροισμα των μέτρων.

Στο επίπεδο, αν η γωνία ϕ μετριέται από τον θετικό x με θετική την αντιωρολογιακή φορά, η τριγωνομετρία δίνει $a_x = a\cos\phi$ και $a_y = a\sin\phi$. Το συνημίτονο και το ημίτονο αναλαμβάνουν αυτόματα τα σωστά πρόσημα σε κάθε τεταρτημόριο. Οι συνιστώσες αλλάζουν αν περιστρέψουμε τους άξονες, αλλά το ίδιο το γεωμετρικό διάνυσμα και το μέτρο του παραμένουν τα ίδια.

1.6 Εσωτερικό γινόμενο

Πόσο συμβάλλει ένα διάνυσμα κατά μια κατεύθυνση; Όταν τραβάμε ένα κιβώτιο με σχοινί που σχηματίζει γωνία με το οριζόντιο δάπεδο, μόνο ένα μέρος της δύναμης είναι παράλληλο στην οριζόντια

μετατόπιση. Για να μετρήσουμε αυτή τη συμβολή, χρειαζόμαστε μια πράξη που συνδυάζει τα μέτρα δύο διανυσμάτων με το πόσο ευθυγραμμίζονται. Αυτή την πληροφορία δίνει το εσωτερικό γινόμενο.

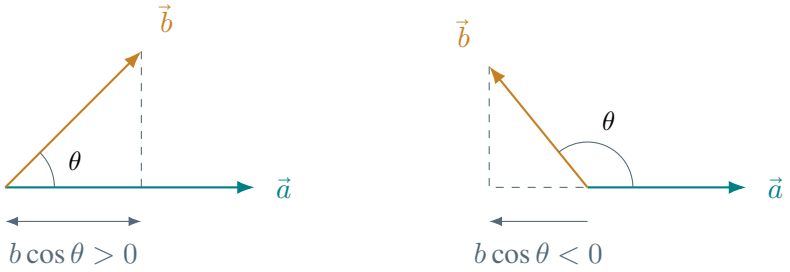
Για μη μηδενικά $\vec{a}, \vec{b}$ και γωνία $0 \le \theta \le \pi$ ανάμεσά τους, ορίζουμε

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos\theta. \tag{1.7}$$

Το αποτέλεσμα είναι βαθμωτό μέγεθος, με μονάδες ίσες με το γινόμενο των μονάδων των δύο παραγόντων. Αν ένα διάνυσμα είναι μηδενικό, ορίζουμε το γινόμενο ίσο με μηδέν, χωρίς να χρειάζεται να αποδώσουμε γωνία στο μηδενικό βέλος.

Όταν τα βέλη έχουν ίδια φορά, το συνημίτονο είναι ένα και το γινόμενο παίρνει τη μέγιστη θετική τιμή ab. Για κάθετα βέλη είναι μηδέν και για αντίθετες φορές είναι $-ab$. Γενικότερα, θετικό γινόμενο αντιστοιχεί σε οξεία γωνία και αρνητικό σε αμβλεία. Για μη μηδενικά διανύσματα η συνθήκη $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ είναι ισοδύναμη με την καθετότητά τους.

Το σχήμα 1.5 δείχνει ότι ο παράγοντας $b\cos\theta$ είναι προσημασμένη προβολή του $\vec{b}$ στη φορά του $\vec{a}$. Το εσωτερικό γινόμενο την πολλαπλασιάζει με το μέτρο a. Δεν μετρά συνεπώς την εγκάρσια απόκλιση του δεύτερου βέλους, αλλά το μέρος του κατά την πρώτη κατεύθυνση.



Σχήμα 1.5. Το πρόσημο της προβολής διακρίνει μια συνιστώσα κατά τη φορά του $\vec{a}$ από μια συνιστώσα προς την αντίθετη φορά.

Από τη γεωμετρία στις συνιστώσες Οι μοναδιαίοι φορείς της ορθοκανονικής βάσης ικανοποιούν $\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$, ενώ τα γινόμενα διαφορετικών φορέων είναι μηδέν. Με την επιμεριστικότητα, το γινόμενο δύο αναλυμένων διανυσμάτων έχει αρχικά εννέα όρους. Οι έξι μικτοί όροι μηδενίζονται λόγω καθετότητας και απομένουν μόνο οι τρεις με κοινή κατεύθυνση:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \\ \|\vec{a}\| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ο τύπος του μέτρου προκύπτει και θέτοντας $\vec{b} = \vec{a}$, αφού η γωνία ενός μη μηδενικού διανύσματος με τον εαυτό του είναι μηδέν. Με την ίδια διαδικασία,

$$a_x = \vec{a} \cdot \hat{x}, \qquad a_y = \vec{a} \cdot \hat{y}, \qquad a_z = \vec{a} \cdot \hat{z}. \tag{1.9}$$

Οι συνιστώσες αποκτούν έτσι έναν ενιαίο ορισμό ως προβολές σε μοναδιαίες κατευθύνσεις. Οι σχέσεις της βάσης γράφονται μερικές φορές συνοπτικά $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$, όπου οι δείκτες επιλέγουν άξονες και το δ_{ij} είναι ένα για ίδιους δείκτες και μηδέν για διαφορετικούς. Αυτό το σύμβολο απλώς συνοψίζει τις προηγούμενες σχέσεις.

Για $\vec{a} = (2, -1, 2)$ και $\vec{b} = (1, 3, 0)$ υπολογίζουμε

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 = -1, \qquad a = 3, \quad b = \sqrt{10}.$$

Άρα $\cos\theta = -1/(3\sqrt{10})$ και $\theta \simeq 96.1^\circ$. Το αρνητικό πρόσημο μάς έδειχνε ήδη ότι η γωνία θα ήταν αμβλεία. Η μέθοδος βρίσκει τη γωνία ακόμη και όταν η τρισδιάστατη γεωμετρία δεν αποτυπώνεται εύκολα σε ένα σκίτσο.

Ιδιότητες και μέτρα αθροισμάτων Το εσωτερικό γινόμενο είναι αντιμεταθετικό και επιμεριστικό, ενώ ένας βαθμωτός παράγοντας μπορεί να βγει έξω από αυτό:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{b}\cdot\vec{a}, \qquad (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}),\\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c},\\ \vec{a}\cdot\vec{a} &= \|\vec{a}\|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Η τελευταία ποσότητα μηδενίζεται μόνο για το μηδενικό διάνυσμα. Αναπτύσσουμε τώρα το γινόμενο του αθροίσματος με τον εαυτό του:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}.$$

Οι δύο μεσαίοι όροι είναι ίσοι. Για το άθροισμα και, αντίστοιχα, για τη διαφορά βρίσκουμε

$$\|\vec{a}\pm\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \pm 2\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{1.11}$$

Για κάθετα διανύσματα ανακτούμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Επίσης, από το $|\cos\theta| \leq 1$ έχουμε $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq ab$. Η ανισότητα αυτή δίνει άμεσο έλεγχο υπολογισμών. Αν από συνιστώσες προκύψει $|\cos\theta| > 1$, υπάρχει λάθος στα δεδομένα, στα πρόσημα ή στην αριθμητική.

1.7 Προβολή ενός διανύσματος σε άλλο

Μια δύναμη σε κεκλιμένο επίπεδο συχνά αναλύεται σε μέρος παράλληλο στο επίπεδο και μέρος κάθετο σε αυτό. Η ίδια κατασκευή μπορεί να γίνει ως προς οποιαδήποτε επιλεγμένη διεύθυνση. Για $\vec{a} \neq \vec{0}$ διακρίνουμε πρώτα έναν αριθμό από ένα βέλος:

$$\begin{aligned} b_\parallel &= \vec{b}\cdot\hat{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|} = \|\vec{b}\|\cos\theta,\\ \mathrm{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b} &= b_\parallel\hat{a} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

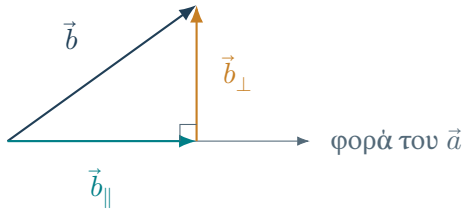
Το $b_\parallel$ είναι η βαθμωτή προβολή και μπορεί να είναι αρνητικό. Η διανυσματική προβολή $\vec{b}_\parallel = \mathrm{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$ έχει τη φορά του $\vec{a}$ όταν ο συντελεστής είναι θετικός και την αντίθετη όταν είναι αρνητικός. Το μέτρο της είναι $|b_\parallel|$, όχι γενικά το ίδιο το προσημασμένο $b_\parallel$.

Το υπόλοιπο μέρος είναι $\vec{b}_\perp = \vec{b} - \vec{b}_\parallel$, ώστε $\vec{b} = \vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp$. Πράγματι,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}_\perp = \vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}(\vec{a}\cdot\vec{a}) = 0.$$

Ο έλεγχος αποδεικνύει ότι το υπόλοιπο είναι κάθετο στην επιλεγμένη διεύθυνση. Στο σχήμα 1.6 τα δύο μέρη σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

Έστω τώρα $\vec{a} = \hat{x} + \hat{y}$ και $\vec{b} = (3\hat{x} + \hat{y})\,\mathrm{m}$. Έχουμε $\vec{b}\cdot\vec{a} = 4\,\mathrm{m}$ και $a^2 = 2$. Άρα $\vec{b}_\parallel = (2\hat{x} + 2\hat{y})\,\mathrm{m}$ και $\vec{b}_\perp = (\hat{x} - \hat{y})\,\mathrm{m}$. Τα μέτρα τους είναι $2\sqrt{2}\,\mathrm{m}$ και $\sqrt{2}\,\mathrm{m}$ και τα τετράγωνά τους αθροίζονται στο $b^2 = 10\,\mathrm{m}^2$. Αν πολλαπλασιάσουμε το $\vec{a}$ με μη μηδενικό αριθμό, η ίδια ευθεία προβολής δίνει το ίδιο $\vec{b}_\parallel$.



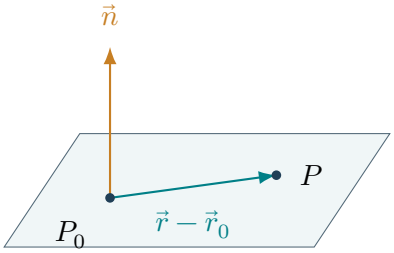
Σχήμα 1.6. Η ανάλυση εξαρτάται από τη διεύθυνση που επιλέγουμε. Η διανυσματική προβολή και το κάθετο υπόλοιπο αθροίζονται στο αρχικό διάνυσμα.

1.8 Εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου

Περιγραφή ενός επιπέδου με την κάθετή του Μια επίπεδη επιφάνεια μπορεί να καθοριστεί δίνοντας ένα σημείο της και την κάθετη διεύθυνση. Έστω P_0 με θέση $\vec{r}_0$ και μη μηδενικό κάθετο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, C)$. Για οποιοδήποτε άλλο σημείο P του επιπέδου, η μετατόπιση $\vec{r} - \vec{r}_0$ βρίσκεται μέσα σε αυτό και είναι κάθετη στο $\vec{n}$. Επομένως

$$\begin{aligned} & \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \\ \iff \quad & A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Η διαφορά των θέσεων, και όχι η ίδια η θέση $\vec{r}$, είναι το διάνυσμα που πρέπει να είναι κάθετο. Το σχήμα 1.7 αποτυπώνει αυτή τη γεωμετρία.



Σχήμα 1.7. Το $\vec{n}$ είναι κάθετο σε κάθε μετατόπιση μέσα στο επίπεδο. Το προοπτικό σκίτσο δεν διατηρεί τις γωνίες της τρισδιάστατης εικόνας.

Για σημείο $(1, 0, 2)\,\mathrm{m}$ και κάθετο $\vec{n} = (2, -1, 3)$, η σχέση γίνεται $2(x - 1\,\mathrm{m}) - y + 3(z - 2\,\mathrm{m}) = 0$, δηλαδή $2x - y + 3z = 8\,\mathrm{m}$. Η αντικατάσταση του αρχικού σημείου επιστρέφει $8\,\mathrm{m}$ στο αριστερό μέλος, όπως πρέπει. Το μέτρο του $\vec{n}$ δεν επηρεάζει το επίπεδο.

Συνισταμένη δύναμη και έργο Η (1.11), μαζί με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, δίνει

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta}. \tag{1.14}$$

Δύο δυνάμεις ίσου μέτρου F που σχηματίζουν 60° έχουν συνεπώς συνισταμένη μέτρου

$$F_{\text{ολ}} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2(1/2)} = \sqrt{3}F.$$

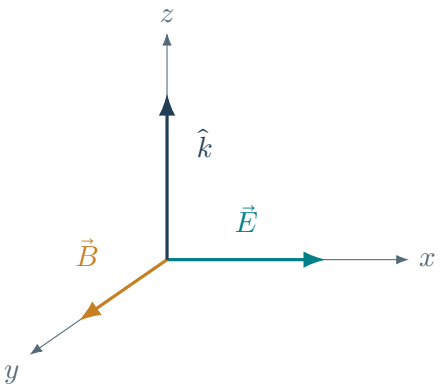
Αν η γωνία ήταν μηδέν, θα παίρναμε $2F$, ενώ για αντίθετες φορές το αποτέλεσμα θα ήταν μηδέν. Οι έλεγχοι αυτοί συνδέουν τον αλγεβρικό τύπο με τη γεωμετρία της πρόσθεσης.

Για σταθερή δύναμη και μετατόπιση $\Delta\vec{r}$, το έργο ορίζεται ως $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\|\Delta\vec{r}\|\cos\theta$. Μετρά την επίδραση της παράλληλης συνιστώσας της δύναμης κατά τη μετατόπιση. Αν $F = 10\,\mathrm{N}$, $\|\Delta\vec{r}\| = 2\,\mathrm{m}$ και $\theta = 60^\circ$, τότε $W = 10\,\mathrm{J}$, με $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$. Μια κάθετη δύναμη δίνει μηδενικό έργο, ενώ μια αντίθετη δύναμη δίνει αρνητικό. Η γενίκευση σε μεταβαλλόμενη δύναμη θα απαιτήσει ολοκλήρωση.

Καθετότητα σε ηλεκτρομαγνητικό κύμα Σε επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο κενό, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι εγκάρσια στη διάδοση. Αν $\hat{k}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα προς τη φορά διάδοσης, οι γεωμετρικές σχέσεις είναι

$$\vec{E} \cdot \hat{k} = 0, \qquad \vec{B} \cdot \hat{k} = 0, \qquad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0. \tag{1.15}$$

Για μη μηδενικά πεδία οι τρεις κατευθύνσεις είναι αμοιβαία κάθετες. Στο σχήμα 1.8 επιλέγουμε μια στιγμή όπου το $\vec{E}$ δείχνει προς $+x$, το $\vec{B}$ προς $+y$ και η διάδοση γίνεται προς $+z$. Οι σχέσεις μηδενισμού εκφράζουν καθετότητα και δεν σημαίνουν ότι τα πεδία έχουν μηδενικά μέτρα.



Σχήμα 1.8. Ένας επιτρεπτός προσανατολισμός των πεδίων σε κύμα που διαδίδεται στο κενό. Τα βέλη δηλώνουν κατευθύνσεις και δεν συγκρίνουν τα μέτρα διαφορετικών φυσικών μεγεθών.

1.9 Εξωτερικό γινόμενο

Μια κάθετη διεύθυνση και ένα εμβαδό Για να ανοίξουμε μια πόρτα, η ίδια δύναμη έχει διαφορετικό αποτέλεσμα ανάλογα με το πού εφαρμόζεται και προς τα πού δείχνει. Μια ώθηση προς τον μεντεσέ δεν προκαλεί την ίδια περιστροφική τάση με μια κάθετη ώθηση στην άκρη της πόρτας. Χρειαζόμαστε επομένως μια πράξη που λαμβάνει υπόψη την εγκάρσια συνιστώσα και αποδίδει και προσανατολισμό περιστροφής.

Το εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι διάνυσμα με μέτρο

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

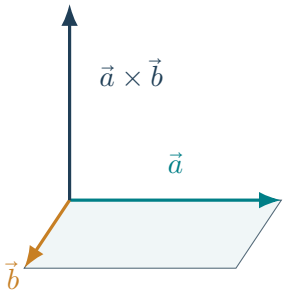
Όταν το αποτέλεσμα είναι μη μηδενικό, η διεύθυνσή του είναι κάθετη στο επίπεδο των δύο αρχικών βελών. Η φορά επιλέγεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Στρέφουμε τα δάκτυλα από το πρώτο διάνυσμα προς το δεύτερο κατά τη μικρότερη γωνία και ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του γινομένου. Στο σχήμα 1.9 η φορά αυτή είναι προς τη θετική κάθετη κατεύθυνση της δεξιόστροφης βάσης.

Για παράλληλα ή αντιπαράλληλα διανύσματα, το ημίτονο είναι μηδέν και το γινόμενο είναι $\vec{0}$. Το ίδιο ισχύει αν ένας παράγοντας είναι μηδενικός. Για κάθετα βέλη το μέτρο του γινομένου είναι ab, η μέγιστη τιμή για δεδομένα a, b. Η αντιστροφή της σειράς των δύο μη παράλληλων βελών αντιστρέφει τη φορά της κάθετης, ενώ διατηρεί το μέτρο.

Υπολογισμός σε δεξιόστροφη βάση Ο προσανατολισμός της καρτεσιανής βάσης καθορίζεται από τις κυκλικές σχέσεις

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \qquad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \qquad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}. \tag{1.16}$$

Με αντίστροφη σειρά αλλάζει το πρόσημο, για παράδειγμα $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$. Το γινόμενο ενός μοναδιαίου φορέα με τον εαυτό του είναι μηδενικό.



Σχήμα 1.9. Το εξωτερικό γινόμενο είναι κάθετο στο επίπεδο των παραγόντων του. Η σειρά $\vec{a},\vec{b}$ καθορίζει τη φορά με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Το σχήμα είναι προοπτική απεικόνιση του χώρου.

Αναλύουμε τα δύο διανύσματα στις τρεις κατευθύνσεις και εφαρμόζουμε επιμεριστικότητα. Οι τρεις όροι με ίδιους φορείς μηδενίζονται. Οι υπόλοιποι δίνουν

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} = a_x b_y\hat{z} - a_x b_z\hat{y} - a_y b_x\hat{z} + a_y b_z\hat{x}\\ + a_z b_x\hat{y} - a_z b_y\hat{x}.\end{aligned}$$

Συγκεντρώνοντας κάθε κατεύθυνση, καταλήγουμε στον πρακτικό τύπο

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{y}\\ &\quad + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{z}.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Η γραφή με την «ορίζουσα» είναι μνημονικός τρόπος οργάνωσης. Αναπτύσσουμε κατά την πρώτη γραμμή με πρόσημα $+,-,+$. Κάθε ορίζουσα δύο επί δύο υπολογίζεται ως γινόμενο της κύριας διαγωνίου μείον το γινόμενο της άλλης. Η πρώτη γραμμή περιέχει διανύσματα, γι' αυτό το τελικό αποτέλεσμα παραμένει διάνυσμα.

Για $\vec{a}=(2,-1,3)$ και $\vec{b}=(1,4,-2)$, αναπτύσσουμε αναλυτικά:

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= \hat{x}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix} - \hat{y}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix} + \hat{z}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}\\ &= [(-1)(-2) - 3\cdot 4]\hat{x} - [2(-2) - 3\cdot 1]\hat{y}\\ &\quad + [2\cdot 4 - (-1)\cdot 1]\hat{z}\\ &= -10\hat{x} + 7\hat{y} + 9\hat{z}.\end{aligned}$$

Ο μεσαίος συντελεστής είναι θετικός, επειδή το εξωτερικό αρνητικό πρόσημο πολλαπλασιάζει την τιμή -7 της αντίστοιχης μικρής ορίζουσας. Ελέγχουμε την καθετότητα με εσωτερικά γινόμενα:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) &= 2(-10) + (-1)7 + 3\cdot 9 = 0,\\ \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) &= 1(-10) + 4\cdot 7 + (-2)9 = 0.\end{aligned}$$

Αν ένας από αυτούς τους ελέγχους αποτύχει, το υπολογισμένο βέλος δεν μπορεί να είναι το σωστό εξωτερικό γινόμενο.

Ιδιότητες και έλεγχοι Η σειρά των παραγόντων έχει σημασία, ενώ η επιμεριστικότητα και η εξαγωγή βαθμωτού παράγοντα παραμένουν σε ισχύ:

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= -\vec{b}\times\vec{a},\\ \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c},\\ (\lambda\vec{a})\times\vec{b} &= \lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}).\end{aligned}$$

Η πρώτη ιδιότητα λέγεται αντιμεταθετικότητα με αλλαγή προσήμου. Επίσης, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ και το γινόμενο είναι κάθετο σε κάθε παράγοντά του.

Δεν μπορούμε γενικά να μετακινούμε παρενθέσεις σε διαδοχικά εξωτερικά γινόμενα. Για παράδειγμα, $(\hat{x} \times \hat{y}) \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$, ενώ $\hat{x} \times (\hat{y} \times \hat{y}) = \vec{0}$. Ένας επιπλέον έλεγχος του μέτρου ακολουθεί από το $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

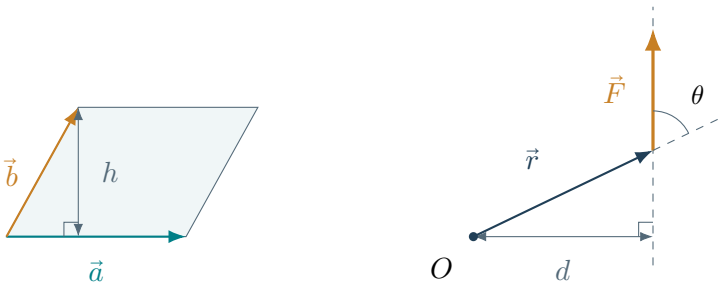
Η σχέση συνδέει τα δύο γινόμενα, χωρίς να τα εξισώνει ως πράξεις. Το εσωτερικό αποδίδει βαθμωτό, ενώ το εξωτερικό διάνυσμα.

Εμβαδό και ροπή δύναμης Το παραλληλόγραμμο με πλευρές $\vec{a}, \vec{b}$ έχει βάση a και ύψος $h = b\sin\theta$. Άρα το εμβαδό του είναι $A_{\text{παρ}} = ah = ab\sin\theta = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$. Το αντίστοιχο τρίγωνο έχει το μισό εμβαδό. Η γεωμετρία εξηγεί γιατί το γινόμενο μηδενίζεται όταν οι πλευρές γίνουν παράλληλες.

Για τη ροπή μιας δύναμης ως προς σημείο O, το πρώτο διάνυσμα είναι η θέση του σημείου εφαρμογής ως προς το O και το δεύτερο η δύναμη:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad \|\vec{\tau}_O\| = rF\sin\theta = Fd. \tag{1.18}$$

Το $d = r\sin\theta$ είναι η κάθετη απόσταση του O από την ευθεία δράσης της δύναμης, ο μοχλοβραχίονας. Το σχήμα 1.10 δείχνει τις δύο γεωμετρικές χρήσεις του ημιτόνου. Η ροπή μειώνεται όταν η ευθεία δράσης πλησιάζει το O, ακόμη και αν η δύναμη διατηρεί το μέτρο της.



(α) Εμβαδό $A = ah$ (β) Μοχλοβραχίονας της δύναμης

Σχήμα 1.10. Στα αριστερά το ύψος είναι $b\sin\theta$. Στα δεξιά η γωνία μετριέται ανάμεσα στη φορά του $\vec{r}$ και στη δύναμη, αφού μεταφέρουμε παράλληλα τη μία διεύθυνση. Η ροπή του σχήματος δείχνει προς τον αναγνώστη.

Για $\vec{r} = (0.50, 0, 0)\,\text{m}$ και $\vec{F} = (0, 10, 0)\,\text{N}$, βρίσκουμε $\vec{\tau}_O = (0, 0, 5)\,\text{N m}$. Η δύναμη είναι κάθετη στον βραχίονα και το μέτρο είναι $0.50 \cdot 10 = 5\,\text{N m}$. Αν δείχνει κατά μήκος του βραχίονα, η ροπή γίνεται μηδέν. Παρότι το N m έχει τις ίδιες διαστάσεις με το joule, η ροπή είναι διάνυσμα και δεν είναι ενέργεια.

Μια άλλη εφαρμογή είναι το διάνυσμα Poynting $\vec{S} = (1/\mu_0)\vec{E} \times \vec{B}$, όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Περιγράφει τη ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας, με μέτρο σε W/m^2. Στο επίπεδο κύμα του σχήματος 1.8, το $\vec{E} \times \vec{B}$ και επομένως το $\vec{S}$ δείχνουν προς τη διάδοση. Εδώ ο συνδυασμός δύο πεδίων παράγει μια τρίτη φυσικά χρήσιμη κατεύθυνση.

1.10 Μικτό γινόμενο και όγκος

Για να βρούμε τον όγκο ενός λοξού παραλληλεπιπέδου, χρειαζόμαστε το εμβαδό μιας βάσης και το κάθετο ύψος. Το εξωτερικό γινόμενο των δύο ακμών της βάσης δίνει ήδη το εμβαδό και την κάθετη διεύθυνση. Το εσωτερικό γινόμενο με την τρίτη ακμή επιλέγει το κατάλληλο ύψος.

Αυτός ο συνδυασμός ονομάζεται μικτό ή βαθμωτό τριπλό γινόμενο:

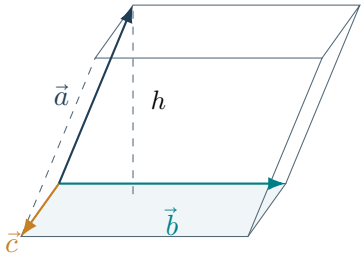
$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.19}$$

Η τελευταία ορίζουσα προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις συνιστώσες του $\vec{b}\times\vec{c}$ και εκτελέσουμε το εσωτερικό γινόμενο με το $\vec{a}$. Το αποτέλεσμα είναι βαθμωτό, επειδή η τελική πράξη είναι εσωτερικό γινόμενο.

Έστω πρώτα $\vec{b}\times\vec{c}\neq\vec{0}$ και $\hat{n} = (\vec{b}\times\vec{c})/\|\vec{b}\times\vec{c}\|$ η κάθετη στη βάση. Το εμβαδό της είναι $A = \|\vec{b}\times\vec{c}\|$ και το ύψος είναι $h = |\vec{a}\cdot\hat{n}|$. Συνεπώς ο όγκος είναι

$$V = Ah = \left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|. \tag{1.20}$$

Η απόλυτη τιμή είναι αναγκαία, επειδή ο γεωμετρικός όγκος δεν εξαρτάται από τη φορά της κάθετης. Το μικτό γινόμενο πριν από την απόλυτη τιμή διατηρεί αυτή την πληροφορία και λέγεται προσημασμένος όγκος. Αν οι ακμές έχουν μονάδες μήκους, το αποτέλεσμα έχει μονάδες μήκους στον κύβο. Η γεωμετρική κατασκευή φαίνεται στο σχήμα 1.11.



Σχήμα 1.11. Βάση με ακμές $\vec{b},\vec{c}$ και τρίτη ακμή $\vec{a}$. Το ύψος h είναι κάθετο στη βάση και διαφέρει γενικά από το μήκος της τρίτης ακμής.

Η εναλλαγή δύο διανυσμάτων αντιστρέφει το πρόσημο του μικτού γινομένου. Οι κυκλικές μεταθέσεις διατηρούν την τιμή του, οπότε

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Αν το γινόμενο είναι μηδέν, ο όγκος μηδενίζεται. Τα τρία βέλη με κοινή αρχή βρίσκονται τότε σε ένα επίπεδο, με τις εκφυλισμένες περιπτώσεις παράλληλων ή μηδενικών ακμών να περιλαμβάνονται. Αλγεβρικά λέμε ότι είναι γραμμικά εξαρτημένα. Αυτό σημαίνει ότι ένας συνδυασμός τους μπορεί να δώσει το μηδενικό διάνυσμα χωρίς να μηδενιστούν όλοι οι συντελεστές του συνδυασμού.

Για $\vec{a} = (2,0,0)\,\mathrm{m}$, $\vec{b} = (1,3,0)\,\mathrm{m}$ και $\vec{c} = (1,2,4)\,\mathrm{m}$, η πρώτη γραμμή της ορίζουσας έχει μόνο έναν μη μηδενικό όρο:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\mathrm{m}^3 = 2(3\cdot 4 - 0\cdot 2)\,\mathrm{m}^3 = 24\,\mathrm{m}^3.$$

Ο όγκος είναι επομένως $24\,\mathrm{m}^3$. Αν αντιστρέψουμε τη σειρά των δύο τελευταίων ακμών, το μικτό γινόμενο γίνεται $-24\,\mathrm{m}^3$, ενώ ο όγκος παραμένει ο ίδιος.

1.11 Σύνοψη και σύντομη εξάσκηση

Η διανυσματική περιγραφή κρατά ενωμένες την πληροφορία για το μέτρο και την πληροφορία για την κατεύθυνση. Οι συνιστώσες μετατρέπουν τη γεωμετρία σε υπολογισμό, αλλά κάθε αποτέλεσμα χρειάζεται να ερμηνεύεται ξανά ως βέλος ή ως βαθμωτό μέγεθος. Ο ακόλουθος πίνακας συνοψίζει τι μετρά καθεμία από τις βασικές πράξεις.

Πράξη	Αποτέλεσμα	Γεωμετρικό νόημα
$\vec{a}+\vec{b}$	διάνυσμα	συνολική μετατόπιση
$\vec{a}\cdot\vec{b}$	βαθμωτό	παράλληλη προβολή επί μέτρο
$\vec{a}\times\vec{b}$	διάνυσμα	εμβαδό και κάθετη φορά
$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$	βαθμωτό	προσημασμένος όγκος

Τρεις ασκήσεις ελέγχου Στις δύο πρώτες ασκήσεις θεωρήστε $\vec{a}=(3,-1,2)$ και $\vec{b}=(1,2,-2)$. Οι συνιστώσες δίνονται χωρίς φυσικές μονάδες, ώστε να επικεντρωθούμε στις πράξεις.

1. Βρείτε τα $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ και $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$. Ελέγξτε αν η προβολή έχει ίδια ή αντίθετη φορά από το $\vec{a}$.

2. Υπολογίστε το $\vec{a}\times\vec{b}$ και ελέγξτε με εσωτερικά γινόμενα ότι είναι κάθετο και στα δύο αρχικά διανύσματα.

3. Βρείτε το επίπεδο που περνά από το $(0,1,2)$ και έχει κάθετο διάνυσμα $(1,2,-1)$.

Απαντήσεις και έλεγχοι Στην πρώτη άσκηση βρίσκουμε $\vec{a}-\vec{b}=(2,-3,4)$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=3-2-4=-3$ και $a^2=14$. Άρα η προβολή είναι $-(3/14)(3,-1,2)$ και έχει αντίθετη φορά από το $\vec{a}$.

Στη δεύτερη άσκηση το αποτέλεσμα είναι $(-2,8,7)$. Οι έλεγχοι δίνουν $3(-2)-8+2\cdot 7=0$ και $-2+2\cdot 8-2\cdot 7=0$. Επιπλέον, το τετράγωνο του μέτρου του είναι $4+64+49=117$, ίσο με $a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=14\cdot 9-9$.

Στην τρίτη άσκηση η εξίσωση είναι $x+2(y-1)-(z-2)=0$, δηλαδή $x+2y-z=0$. Το δοσμένο σημείο την ικανοποιεί. Σε όλες τις εφαρμογές, η γεωμετρική εικόνα, οι μονάδες και οι απλοί αλγεβρικοί έλεγχοι βοηθούν να ξεχωρίσουμε ένα σωστό αποτέλεσμα από έναν τύπο που απλώς μοιάζει οικείος.