ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Ε.Μ.Π.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2025-2026

ΦΥΣΙΚΗ Ι

Διάρκεια: 2 ώρες 19/1/2026

ΘΕΜΑ 1 (2.5Μ)

Ένα σώμα μάζας m αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα στην επιφάνεια μιας λίμνης (πολύ μεγάλου βάθους) και στη συνέχεια βυθίζεται κατακόρυφα προς τον πυθμένα της λίμνης. Στο σώμα ασκούνται οι ακόλουθες δυνάμεις: το βάρος του $\vec{B} = mg\hat{\mathbf{z}}$, η άνωση $\vec{A} = -A\hat{\mathbf{z}}$ και μία δύναμη αντίστασης $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$, όπου $\gamma > 0$ σταθερά και $\vec{v}$ η ταχύτητα του σώματος. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{z}}$ έχει διεύθυνση κατακόρυφη προς τον πυθμένα της λίμνης. Υποθέτουμε ότι $A < mg$.

(α) Βρείτε την εξίσωση κίνησης του σώματος.

(β) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του σώματος (δηλαδή την απόσταση από την επιφάνεια της λίμνης) συναρτήσει του χρόνου t.

(γ) Βρείτε την οριακή ταχύτητα του σώματος v_∞.

(δ) Βρείτε το έργο του βάρους μέχρι τη χρονική στιγμή t, υποθέτοντας ότι $t >> 1/\lambda$ όπου $\lambda = \gamma/m$.

ΘΕΜΑ 2 (2.5Μ)

Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα δίνεται από το δυναμικό πεδίο

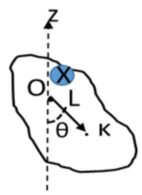
$$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2 + yz)\,\hat{\mathbf{i}} + (2y^2 + xz)\,\hat{\mathbf{j}} + (3z^2 + xy)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Δείξτε ότι το παραπάνω δυναμικό πεδίο είναι συντηρητικό (διατηρητικό). Βρείτε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $V(x,y,z)$, αν γνωρίζουμε ότι $V(0,0,0) = 0$.

ΘΕΜΑ 3 (2.5Μ)

Φυσικό εκκρεμές

(α) Να υπολογισθούν η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης ω και η περίοδος T για στερεό σώμα μάζας M που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα περιστροφής (x) κάθετο στο επίπεδο του σώματος που διέρχεται σταθερό σημείο Ο, για μικρές αποκλίσεις της γωνίας θ γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z . Με Κ συμβολίζουμε τη θέση του κέντρου μάζας, ενώ L είναι η απόσταση του σημείου Ο από το Κ.



Σχήμα 1: Φυσικό εκκρεμές

(β) Εφαρμόστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) για την περίπτωση ομογενούς ράβδου μήκους L και μάζας M όπου μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από άξονα οριζόντιο (ε) που διέρχεται από το άνω της άκρο Α. Σημείωση: να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το άκρο Α.

ΘΕΜΑ 4 (2.5Μ)

Σηκώνουμε μια ομογενή αλυσίδα μάζας M και μήκους L εφαρμόζοντας μια κάθετη προς τα πάνω δύναμη F.

(α) Βρείτε την εξάρτηση του μέτρου της δύναμης F από το ύψος που έχει φτάσει η αλυσίδα, αν θέλουμε η ταχύτητα του τμήματος της αλυσίδας που είναι στον αέρα να είναι σταθερή.

(β) Ποια είναι η συνολική μεταβολή της μηχανικής ενέργειας της αλυσίδας όταν σηκωθεί όλη η αλυσίδα στον αέρα;

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Λύση Θέματος 1.

Θεωρούμε ως θετική τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{z}}$ (προς τον πυθμένα). Η κίνηση είναι μονοδιάστατη, με ταχύτητα $\vec{v}(t) = v(t)\hat{\mathbf{z}}$.

(α) Εξίσωση κίνησης

Οι δυνάμεις κατά $\hat{\mathbf{z}}$ είναι:

$$\vec{B} = mg\,\hat{\mathbf{z}}, \qquad \vec{A} = -A\,\hat{\mathbf{z}}, \qquad \vec{F}_{\text{αντ}} = -\gamma v\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Άρα, από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα:

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - A - \gamma v.$$

Θέτοντας $\lambda = \gamma/m$ παίρνουμε

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \lambda v = g - \frac{A}{m}.}$$

(β) Ταχύτητα και θέση

Ξεκινάμε από

$$\frac{dv}{dt} + \lambda v = g - \frac{A}{m} \equiv B \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = B - \lambda v.$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει τη μορφή διαφορικής εξίσωσης χωριζόμενων μεταβολητών. Οπότε

$$\frac{dv}{B - \lambda v} = dt.$$

Ολοκληρώνουμε:

$$\int \frac{dv}{B - \lambda v} = \int dt.$$

Για το αριστερό ολοκλήρωμα κάνουμε αντικατάσταση

$$u = B - \lambda v \quad \Rightarrow \quad du = -\lambda\,dv \quad \Rightarrow \quad dv = -\frac{1}{\lambda}du,$$

οπότε

$$\int \frac{dv}{B - \lambda v} = \int \frac{-\frac{1}{\lambda}du}{u} = -\frac{1}{\lambda}\ln|u| = -\frac{1}{\lambda}\ln|B - \lambda v|.$$

Άρα

$$-\frac{1}{\lambda}\ln|B - \lambda v| = t + C \quad \Rightarrow \quad \ln|B - \lambda v| = -\lambda t + C_1.$$

Αντιστρέφουμε τον λογάριθμο:

$$|B - \lambda v| = C_2 e^{-\lambda t}.$$

Απορροφούμε το πρόσημο στη σταθερά:

$$B - \lambda v = C e^{-\lambda t}.$$

Λύνουμε ως προς $v(t)$:

$$v(t) = \frac{B}{\lambda} - \frac{C}{\lambda}e^{-\lambda t}.$$

Αρχική συνθήκη $v(0) = 0$.

$$0 = \frac{B}{\lambda} - \frac{C}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad C = B.$$

Άρα

$$v(t) = \frac{B}{\lambda}\Big(1 - e^{-\lambda t}\Big) = \frac{g - \frac{A}{m}}{\lambda}\Big(1 - e^{-\lambda t}\Big).$$

Αν $\lambda = \frac{\gamma}{m}$, τότε

$$v(t) = \frac{g - \frac{A}{m}}{\gamma/m}\Big(1 - e^{-\lambda t}\Big) = \frac{mg - A}{\gamma}\Big(1 - e^{-\lambda t}\Big).$$

Για τη θέση του σώματος έχουμε

$$z(t) = \int_0^t v(t')\,dt' = \frac{mg - A}{\gamma}\int_0^t \Big(1 - e^{-\lambda t'}\Big)\,dt'.$$

Είναι:

$$\int_0^t \Big(1 - e^{-\lambda t'}\Big)\,dt' = t - \left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}\right) = t - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}.$$

Ισοδύναμα,

$$t - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} = t - \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Τελικά,

$$\boxed{z(t) = \frac{mg - A}{\gamma}\left[t - \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}\right].}$$

Άρα

$$\boxed{v(t) = v_\infty\big(1 - e^{-\lambda t}\big), \qquad z(t) = v_\infty\left[t - \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}\right],}$$

όπου $v_\infty = \dfrac{mg - A}{\gamma}$.

(γ) Οριακή ταχύτητα

Για $t \to \infty$ προκύπτει

$$\boxed{v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg - A}{\gamma}.}$$

(δ) Έργο του βάρους για $t \gg 1/\lambda$

Το βάρος είναι σταθερό και παράλληλο στη μετατόπιση, άρα το έργο του μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι

$$W_B(t) = \int_0^{z(t)} mg\,dz = mg\,z(t).$$

Για $t \gg 1/\lambda$ έχουμε $e^{-\lambda t} \simeq 0$, οπότε

$$z(t) \simeq v_\infty\left(t - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Επομένως

$$\boxed{W_B(t) \simeq mg\,v_\infty\left(t - \frac{1}{\lambda}\right) = mg\left(\frac{mg - A}{\gamma}\right)\left(t - \frac{m}{\gamma}\right) \simeq mg\left(\frac{mg - A}{\gamma}\right)t.}$$

Λύση Θέματος 2.

Οι συνιστώσες της δύναμης είναι

$$F_x = 3x^2 + yz, \qquad F_y = 2y^2 + xz, \qquad F_z = 3z^2 + xy.$$

Έλεγχος συντηρητικότητας
Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= z, & \frac{\partial F_y}{\partial x} &= z, \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= y, & \frac{\partial F_z}{\partial x} &= y, \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= x, & \frac{\partial F_z}{\partial y} &= x. \end{aligned}$$

Όλες οι αντίστοιχες παράγωγοι συμπίπτουν, άρα $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ και το πεδίο είναι συντηρητικό. Επομένως υπάρχει βαθμωτό δυναμικό $U(x, y, z)$ με $\vec{F} = \nabla U$.

Εύρεση του U
Α' τρόπος
Από τη συνιστώσα F_x:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + yz.$$

Ολοκλήρωση ως προς x:

$$U(x, y, z) = x^3 + xyz + g(y, z),$$

όπου $g(y, z)$ ανεξάρτητη από το x.
Από F_y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_y = 2y^2 + xz.$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = xz + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z),$$

άρα

$$xz + g_y = 2y^2 + xz \quad \Rightarrow \quad g_y = 2y^2.$$

Ολοκλήρωση:

$$g(y, z) = \frac{2}{3}y^3 + h(z).$$

Τώρα από F_z:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = F_z = 3z^2 + xy.$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = xy + h'(z),$$

οπότε

$$xy + h'(z) = xy + 3z^2 \quad \Rightarrow \quad h'(z) = 3z^2 \quad \Rightarrow \quad h(z) = z^3 + C.$$

Άρα

$$U(x, y, z) = x^3 + xyz + \frac{2}{3}y^3 + z^3 + C.$$

Δυναμική ενέργεια

Παίρνουμε $V = -U$ ώστε $\vec{F} = -\nabla V$. Η συνθήκη $V(0,0,0) = 0$ δίνει $C = 0$. Επομένως

$$\boxed{V(x,y,z) = -\left(x^3 + xyz + \frac{2}{3}y^3 + z^3\right).}$$

Β' Τρόπος

Για συντηρητικό πεδίο ισχύει

$$V(x,y,z) - V(0,0,0) = -\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \qquad V(0,0,0) = 0,$$

όπου $\mathcal{C}$ η τεθλασμένη $(0,0,0) \to (x,0,0) \to (x,y,0) \to (x,y,z)$.

(i) $(0,0,0) \to (x,0,0)$**:** $d\vec{r} = (dx,0,0)$, $y = z = 0$,

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^x 3x'^2\,dx' = x^3.$$

(ii) $(x,0,0) \to (x,y,0)$**:** $d\vec{r} = (0,dy,0)$, $z = 0$,

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^y 2y'^2\,dy' = \frac{2}{3}y^3.$$

(iii) $(x,y,0) \to (x,y,z)$**:** $d\vec{r} = (0,0,dz)$,

$$\int_{\mathcal{C}_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^z (3z'^2 + xy)\,dz' = z^3 + xyz.$$

Συνεπώς

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = x^3 + \frac{2}{3}y^3 + z^3 + xyz,$$

και η δυναμική ενέργεια είναι

$$\boxed{V(x,y,z) = -(x^3 + \frac{2}{3}y^3 + z^3 + xyz).}$$

Λύση Θέματος 3.

(α) Φυσικό εκκρεμές

Θεωρούμε στερεό σώμα που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα στο σημείο O. Το κέντρο μάζας C απέχει απόσταση d από το σημείο ανάρτησης. Για γωνιακή απομάκρυνση θ από τη θέση ισορροπίας, η ροπή του βάρους ως προς O είναι

$$\tau = -Mg\,d\sin\theta. \tag{1}$$

Η εξίσωση περιστροφικής κίνησης γράφεται

$$I_O\ddot{\theta} = -Mg\,d\sin\theta, \tag{2}$$

όπου I_O η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα στο O.

Για μικρές γωνιακές αποκλίσεις ($\sin\theta \simeq \theta$) η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$I_O\ddot{\theta} + Mg\,d\,\theta = 0, \tag{3}$$

που είναι εξίσωση απλής αρμονικής ταλάντωσης.

Η γωνιακή συχνότητα του φυσικού εκκρεμούς είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\,d}{I_O}}, \tag{4}$$

οπότε η περίοδος και η συχνότητα δίνονται από

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{Mg\,d}}, \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg\,d}{I_O}}. \tag{5}$$

(β) Ομογενής ράβδος μήκους L με άξονα στο άνω άκρο A

Θεωρούμε ομογενή λεπτή ράβδο μήκους L και μάζας M. Η γραμμική πυκνότητα μάζας είναι

$$\lambda = \frac{M}{L}. \tag{6}$$

Παίρνουμε στοιχειώδες τμήμα μήκους dx σε απόσταση x από το άκρο περιστροφής. Η στοιχειώδης μάζα είναι

$$dm = \lambda\,dx = \frac{M}{L}\,dx. \tag{7}$$

Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα από το άκρο ορίζεται ως

$$I_O = \int x^2\,dm. \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας, προκύπτει

$$I_O = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3}ML^2. \tag{9}$$

Άρα η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα από το ένα άκρο της είναι

$$\boxed{I_O = \frac{1}{3}ML^2.} \tag{10}$$

Επομένως

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg(L/2)}{(1/3)ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Δηλαδή

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}.}$$

Λύση Θέματος 4.

Θεωρούμε ότι σηκώνουμε την αλυσίδα από το ένα άκρο της, κατακόρυφα προς τα πάνω. Έστω ότι το μήκος που έχει ήδη σηκωθεί (και βρίσκεται στον αέρα) είναι y. Η γραμμική πυκνότητα είναι

$$\mu = \frac{M}{L}.$$

Η μάζα που κινείται στον αέρα είναι $m(y) = \mu y$ και ζητείται η ταχύτητά της να είναι σταθερή ίση με v.

(α) Εξάρτηση της δύναμης F από το y

Η ορμή του κινούμενου τμήματος είναι $p = mv = \mu y\, v$. Επειδή $v =$ σταθ.,

$$\frac{dp}{dt} = v\frac{dm}{dt} = v\,\mu\frac{dy}{dt} = \mu v^2.$$

Οι εξωτερικές δυνάμεις στο κινούμενο τμήμα είναι η εφαρμοζόμενη F (προς τα πάνω) και το βάρος $mg = \mu yg$ (προς τα κάτω). Άρα

$$F - \mu yg = \frac{dp}{dt} = \mu v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(y) = \mu gy + \mu v^2.}$$

Δηλαδή η δύναμη αυξάνει γραμμικά με το ύψος/μήκος y που έχει σηκωθεί, με πρόσθετο σταθερό όρο μv^2 λόγω της συνεχούς «παραλαβής» μάζας από το ακίνητο τμήμα.

(β) Συνολική μεταβολή μηχανικής ενέργειας όταν σηκωθεί όλη η αλυσίδα

Όταν σηκωθεί όλη η αλυσίδα, $y = L$. Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας (από αλυσίδα στο έδαφος σε κατακόρυφη αλυσίδα) είναι

$$\Delta U = Mg\,\frac{L}{2}.$$

Τη χρονική στιγμή που σηκώνεται ολόκληρη με ταχύτητα v, η κινητική ενέργεια της αλυσίδας είναι

$$K = \frac{1}{2}Mv^2.$$

Άρα η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας της αλυσίδας είναι

$$\boxed{\Delta E_{\text{μηχ}} = \Delta U + \Delta K = Mg\,\frac{L}{2} + \frac{1}{2}Mv^2.}$$

(Αν στη συνέχεια ακινητοποιηθεί, τότε επιπλέον $\frac{1}{2}Mv^2$ θα αφαιρεθεί και θα απομείνει μόνο $Mg\,\frac{L}{2}$.)