ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Ε.Μ.Π.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2026

ΦΥΣΙΚΗ Ι

Διάρκεια: 2 ώρες 9-9-2026

ΘΕΜΑ 1 (2.5Μ)

Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας m δίνεται από τη σχέση

$$\vec{r}(t) = (3t^2 - 6t)\,\hat{\mathbf{x}} - 4t^2\,\hat{\mathbf{y}} + (3t + 2)\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Να υπολογίσετε:

(α) τη στροφορμή του σώματος ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων,

(β) τη ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ως προς το ίδιο σημείο.

ΘΕΜΑ 2 (2.5Μ)

Ένα φορτηγό που αρχικά έχει μάζα m_0 και ταχύτητα u_0 κινείται με σβησμένη τη μηχανή του ευθύγραμμα χωρίς τριβές. Στο σημείο $x_0 = 0$ αρχίζει να βρέχει. Η βροχή πέφτει κατακόρυφα στο φορτηγό με σταθερό ρυθμό λ (kg/s). Υπολογίστε την ταχύτητα και τη θέση του φορτηγού συναρτήσει του χρόνου.

ΘΕΜΑ 3 (2.5Μ)

Σωματίδιο μάζας m κινείται πάνω στον άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης

$$F(x) = -kx + \frac{k}{a}x^2,$$

όπου $k > 0$ και $a > 0$. Αρχικά βρίσκεται στη θέση $x = -a$ και έχει μηδενική ταχύτητα.

(α) Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια $U(x)$, με $U(0) = 0$, και να περιγραφεί ποιοτικά η μορφή της (πρόχειρο διάγραμμα).

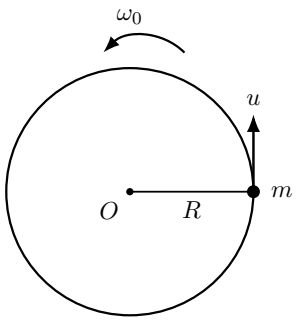
(β) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και, με τη βοήθεια της δυναμικής ενέργειας, να εξεταστεί η ευστάθειά τους.

(γ) Να εξεταστεί αν το σωματίδιο μπορεί να διέλθει από το ασταθές σημείο ισορροπίας.

(δ) Να υπολογιστεί η ελάχιστη αρχική ταχύτητα ώστε να φτάσει ακριβώς στο ασταθές σημείο με μηδενική τελική ταχύτητα.

ΘΕΜΑ 4 (2.5Μ)

Ομογενής συμπαγής δίσκος μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από σταθερό, λείο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0. Σημειακό σώμα μάζας m κινείται εφαπτομενικά στην περιφέρεια με ταχύτητα u, κατά την ίδια φορά περιστροφής, και προσκολλάται πλαστικά στην περιφέρεια.



(α) Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα αμέσως μετά την κρούση.

(β) Να εξηγηθεί γιατί διατηρείται η στροφορμή ως προς τον άξονα, ενώ η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται.

(γ) Να υπολογιστεί η απώλεια κινητικής ενέργειας ΔK.

(δ) Να εξεταστούν οι οριακές περιπτώσεις $m \ll M$ και $m \gg M$.

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Λύση Θέματος 1.

Δίνεται

$$\vec{r}(t) = (3t^2 - 6t)\hat{\mathbf{x}} - 4t^2\hat{\mathbf{y}} + (3t + 2)\hat{\mathbf{z}}.$$

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t - 6)\hat{\mathbf{x}} - 8t\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}},$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\hat{\mathbf{x}} - 8\hat{\mathbf{y}}.$$

(α) Στροφορμή ως προς την αρχή

Η ορμή είναι $\vec{p} = m\vec{v}$, επομένως

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}).$$

Με ανάπτυξη του διανυσματικού γινομένου,

$$\vec{L} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 3t^2 - 6t & -4t^2 & 3t + 2 \\ 6t - 6 & -8t & 3 \end{vmatrix}.$$

Άρα

$$\boxed{\vec{L}(t) = 4mt(3t + 4)\hat{\mathbf{x}} + 3m(3t^2 + 4t - 4)\hat{\mathbf{y}} + 24mt^2\hat{\mathbf{z}}.}$$

(β) Ροπή των δυνάμεων ως προς την αρχή

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(6\hat{\mathbf{x}} - 8\hat{\mathbf{y}}).$$

Η ροπή είναι

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Επομένως

$$\vec{\tau} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 3t^2 - 6t & -4t^2 & 3t + 2 \\ 6 & -8 & 0 \end{vmatrix},$$

και τελικά

$$\boxed{\vec{\tau}(t) = 8m(3t + 2)\hat{\mathbf{x}} + 6m(3t + 2)\hat{\mathbf{y}} + 48mt\hat{\mathbf{z}}.}$$

Ως έλεγχος, πράγματι

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}.$$

Λύση Θέματος 2.

Έστω $m(t)$ η συνολική μάζα του φορτηγού μαζί με το νερό που έχει ήδη συγκρατηθεί. Ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η μάζα είναι σταθερός:

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = \lambda = \text{σταθερό}.}$$

Με αρχική συνθήκη $m(0) = m_0$, ολοκληρώνουμε:

$$\int_{m_0}^{m(t)} dm = \lambda \int_0^t dt',$$

οπότε

$$\boxed{m(t) = m_0 + \lambda t.}$$

Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου

Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον οριζόντιο άξονα για σύστημα μεταβλητής μάζας. Αν $u_{\beta,x}$ είναι η οριζόντια ταχύτητα της βροχής πριν αυτή προσκολληθεί στο φορτηγό, τότε

$$m\frac{dv}{dt} = F_{\text{ext},x} + (u_{\beta,x} - v)\,\frac{dm}{dt}.$$

Στην περίπτωσή μας δεν υπάρχει εξωτερική οριζόντια δύναμη,

$$F_{\text{ext},x} = 0,$$

ενώ η βροχή πέφτει κατακόρυφα, άρα

$$u_{\beta,x} = 0.$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση κίνησης γίνεται

$$m\frac{dv}{dt} = -v\frac{dm}{dt}.$$

Χρησιμοποιώντας $dm/dt = \lambda$ και $m(t) = m_0 + \lambda t$,

$$(m_0 + \lambda t)\frac{dv}{dt} = -\lambda v,$$

ή

$$\frac{1}{v}\,dv = -\frac{\lambda}{m_0 + \lambda t}\,dt.$$

Ολοκληρώνοντας από $v(0) = u_0$ έως $v(t)$,

$$\int_{u_0}^{v(t)} \frac{dv'}{v'} = -\int_0^t \frac{\lambda\,dt'}{m_0 + \lambda t'},$$

οπότε

$$\ln\frac{v(t)}{u_0} = -\ln\frac{m_0 + \lambda t}{m_0}.$$

Άρα

$$\boxed{v(t) = \frac{m_0 u_0}{m_0 + \lambda t} = \frac{u_0}{1 + \frac{\lambda t}{m_0}}.}$$

Θέση συναρτήσει του χρόνου

Εφόσον $v = dx/dt$ και $x(0) = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m_0 u_0}{m_0 + \lambda t}.$$

Άρα

$$x(t) = m_0 u_0 \int_0^t \frac{dt'}{m_0 + \lambda t'} = \frac{m_0 u_0}{\lambda}\left[\ln(m_0 + \lambda t')\right]_0^t.$$

Τελικά,

$$\boxed{x(t) = \frac{m_0 u_0}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{\lambda t}{m_0}\right).}$$

Η ταχύτητα μειώνεται μονοτονικά καθώς αυξάνεται η μάζα του φορτηγού, ενώ η θέση συνεχίζει να αυξάνεται λογαριθμικά με τον χρόνο.

Λύση Θέματος 3.

Η δύναμη είναι

$$F(x) = -kx + \frac{k}{a}x^2 = kx\left(\frac{x}{a} - 1\right).$$

(α) Δυναμική ενέργεια

Ισχύει

$$F(x) = -\frac{dU}{dx},$$

οπότε

$$\frac{dU}{dx} = kx - \frac{k}{a}x^2.$$

Με ολοκλήρωση,

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{3a}x^3 + C.$$

Η συνθήκη $U(0) = 0$ δίνει $C = 0$, άρα

$$\boxed{U(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{3a}x^3.}$$

Οι δύο πρώτες παράγωγοι της δυναμικής ενέργειας είναι

$$U'(x) = kx - \frac{k}{a}x^2, \qquad U''(x) = k - \frac{2k}{a}x.$$

(β) Σημεία ισορροπίας και ευστάθεια

Στα σημεία ισορροπίας ισχύει $F(x) = 0$, ισοδύναμα $U'(x) = 0$. Επομένως

$$kx\left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0,$$

και άρα

$$\boxed{x_1 = 0, \qquad x_2 = a.}$$

Για τον χαρακτηρισμό τους χρησιμοποιούμε τώρα τη δεύτερη παράγωγο της U:

$$U''(0) = k > 0,$$

άρα στο $x = 0$ η δυναμική ενέργεια παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και η ισορροπία είναι **ευσταθής**. Αντίστοιχα,

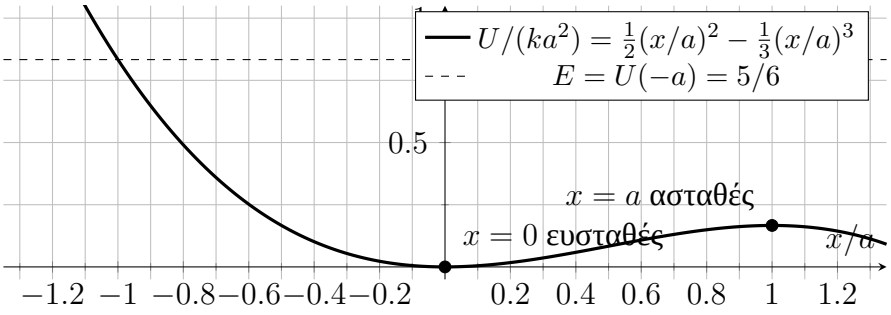
$$U''(a) = k - 2k = -k < 0,$$

άρα στο $x = a$ η δυναμική ενέργεια παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και η ισορροπία είναι **ασταθής**.

(γ) Διέλευση από το ασταθές σημείο

Αρχικά $x = -a$ και $v = 0$, άρα η ολική μηχανική ενέργεια είναι

$$E = U(-a) = \frac{k}{2}a^2 + \frac{k}{3}a^2 = \frac{5}{6}ka^2.$$



Σχήμα 1: Η δυναμική ενέργεια σε αδιάστατες μεταβλητές και το αρχικό ενεργειακό επίπεδο.

Στο ασταθές σημείο

$$U(a) = \frac{k}{2}a^2 - \frac{k}{3}a^2 = \frac{1}{6}ka^2.$$

Επειδή $E > U(a)$, το σώμα φτάνει στο $x = a$ με μη μηδενική κινητική ενέργεια και το διασχίζει. Πράγματι,

$$\frac{1}{2}mv(a)^2 = E - U(a) = \frac{2}{3}ka^2,$$

οπότε

$$\boxed{v(a) = 2a\sqrt{\frac{k}{3m}}.}$$

(δ) Μπορεί να φτάσει στο $x = a$ με μηδενική τελική ταχύτητα;

Αν επιτρέψουμε γενική πραγματική αρχική ταχύτητα v_0 στη θέση $x = -a$, τότε

$$E = \frac{5}{6}ka^2 + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Για να φτάσει στο $x = a$ με $v(a) = 0$ θα έπρεπε

$$E = U(a) = \frac{1}{6}ka^2.$$

Άρα

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{6}ka^2 - \frac{5}{6}ka^2 = -\frac{2}{3}ka^2,$$

ή

$$v_0^2 = -\frac{4ka^2}{3m}.$$

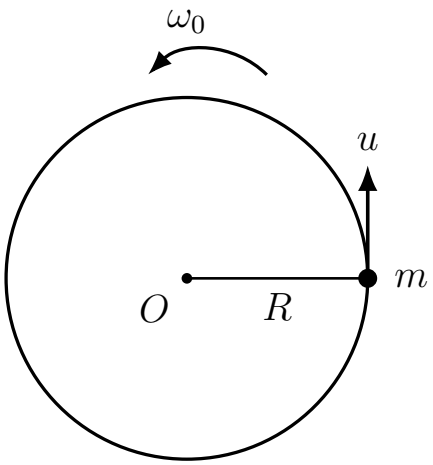
Δεν υπάρχει πραγματική τιμή του v_0 που να ικανοποιεί αυτή τη σχέση. Επομένως

$$\boxed{\text{δεν υπάρχει πραγματική αρχική ταχύτητα που να οδηγεί στο } x = a \text{ με } v = 0.}$$

Λύση Θέματος 4.

Για τον ομογενή συμπαγή δίσκο

$$I_D = \frac{1}{2}MR^2.$$



(α) Γωνιακή ταχύτητα μετά την πλαστική κρούση

Ως προς τον σταθερό άξονα από το O, η εξωτερική ροπή κατά τη σύντομη διάρκεια της κρούσης είναι μηδενική. Επομένως διατηρείται η στροφορμή.

Πριν από την κρούση,

$$L_i = I_D\omega_0 + mRu.$$

Μετά την προσκόλληση της σημειακής μάζας, η συνολική ροπή αδράνειας είναι

$$I_f = I_D + mR^2,$$

και

$$L_f = (I_D + mR^2)\omega_f.$$

Άρα

$$I_D\omega_0 + mRu = (I_D + mR^2)\omega_f,$$

οπότε

$$\boxed{\omega_f = \frac{\frac{M}{2}\omega_0 + m\frac{u}{R}}{\frac{M}{2} + m}.}$$

(β) Στροφορμή και κινητική ενέργεια

Η στροφορμή διατηρείται επειδή η συνισταμένη εξωτερική ροπή ως προς τον άξονα είναι μηδενική. Η κινητική ενέργεια, όμως, δεν διατηρείται, επειδή η κρούση είναι πλαστική: μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια, θερμότητα και παραμόρφωση.

(γ) Απώλεια κινητικής ενέργειας

Η αρχική και η τελική κινητική ενέργεια είναι

$$K_i = \frac{1}{2}I_D\omega_0^2 + \frac{1}{2}mu^2, \qquad K_f = \frac{1}{2}(I_D + mR^2)\omega_f^2.$$

Από το υποερώτημα (α),

$$\omega_f = \frac{I_D\omega_0 + mRu}{I_D + mR^2},$$

οπότε

$$K_f = \frac{1}{2}(I_D + mR^2)\left(\frac{I_D\omega_0 + mRu}{I_D + mR^2}\right)^2 = \frac{(I_D\omega_0 + mRu)^2}{2(I_D + mR^2)}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\Delta K &\equiv K_i - K_f \\ &= \frac{1}{2} I_D \omega_0^2 + \frac{1}{2} m u^2 - \frac{(I_D\omega_0 + mRu)^2}{2(I_D + mR^2)} \\ &= \frac{(I_D\omega_0^2 + mu^2)(I_D + mR^2) - (I_D\omega_0 + mRu)^2}{2(I_D + mR^2)}.\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας τον αριθμητή,

$$\begin{aligned}&(I_D\omega_0^2 + mu^2)(I_D + mR^2) - (I_D\omega_0 + mRu)^2 \\ &= I_D^2\omega_0^2 + I_D mR^2\omega_0^2 + I_D mu^2 + m^2R^2u^2 \\ &\quad - I_D^2\omega_0^2 - 2I_D mRu\omega_0 - m^2R^2u^2 \\ &= I_D m\left(R^2\omega_0^2 + u^2 - 2Ru\omega_0\right) \\ &= I_D m(u - R\omega_0)^2.\end{aligned}$$

Άρα

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{I_D m}{I_D + mR^2}(u - R\omega_0)^2.$$

Τέλος, θέτοντας $I_D = \frac{1}{2}MR^2$,

$$\Delta K = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}MR^2\right)m}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}(u - R\omega_0)^2,$$

και απλοποιώντας τον κοινό παράγοντα R^2,

$$\boxed{\Delta K = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{M}{2}\right)m}{\frac{M}{2} + m}\,(u - R\omega_0)^2.}$$

Η απώλεια είναι μη αρνητική και μηδενίζεται μόνο όταν $u = R\omega_0$.

(δ) Οριακές περιπτώσεις

Για $m \ll M$,

$$\omega_f \simeq \omega_0,$$

δηλαδή ο δίσκος επηρεάζεται λίγο από τη μικρή προσκολλώμενη μάζα.

Για $m \gg M$,

$$\omega_f \longrightarrow \frac{u}{R},$$

δηλαδή η τελική γωνιακή ταχύτητα καθορίζεται κυρίως από την εφαπτομενική ταχύτητα της μεγάλης σημειακής μάζας.