**ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**Ε.Μ.Π.**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2026**

**ΦΥΣΙΚΗ Ι**

Διάρκεια: 2 ώρες 18/6/2026

*Διδάσκοντες: Α. Γεωργακίλας, Β. Γιαννόπαπας*

**ΘΕΜΑ 1 (2.5Μ)**

Δύο σωματίδια με μάζες $m$ και $2m$ κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{r}_1(t) = (5 + 2t^2)\hat{x} + (4 + 4t^2)\hat{y} + (5 + 2t)\hat{z}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (19 - t - t^2)\hat{x} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{y} + (1 + 4t)\hat{z}$$

αντίστοιχα, όπου $t$ είναι ο χρόνος (οι αποστάσεις μετρούνται σε m και ο χρόνος σε s).

(α) Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουστούν και να βρείτε τη χρονική στιγμή της σύγκρουσης.

(β) Ποια δύναμη ασκείται σε κάθε σωματίδιο και ποια είναι η συνολική εξωτερική δύναμη που δέχεται το σύστημα;

(γ) Αν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια παραμένουν οι ίδιες πριν και μετά την κρούση, να δείξετε ότι η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται και να υπολογίσετε την τιμή της.

(δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια συνενωθούν σε ένα ενιαίο σώμα, να βρεθεί το διάνυσμα θέσης του συσσωματώματος ως συνάρτηση του χρόνου.

**ΘΕΜΑ 2 (2.5Μ)**

Σωματίδιο με φορτίο $q$ και μάζα $m$ εισέρχεται με ταχύτητα $v$ σε απωστικό ηλεκτροστατικό πεδίο στο κενό. Το πεδίο δημιουργείται από το φορτίο $Q$ ενός βαρέος πυρήνα, ο οποίος θεωρείται ακλόνητος στην αρχή των αξόνων $O$. Το σωματίδιο πλησιάζει με παράμετρο κρούσης $b$, όπου $b$ είναι η κάθετη απόσταση του σημείου $O$ από την αρχική διεύθυνση εισόδου του σωματιδίου στο πεδίο. Θεωρώντας ότι το σωματίδιο ακολουθεί υπερβολική τροχιά λόγω των απωστικών δυνάμεων, να βρεθούν:

(α) Η ελάχιστη απόσταση προσέγγισης $r_0$ των δύο φορτίων ως συνάρτηση των $v$, $b$ και $a$, όπου $a = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m v^2}$ και $\epsilon_0$ η διηλεκτρική σταθερά του κενού.

(β) Η ταχύτητα $v_0$ του σωματιδίου στη θέση ελάχιστης απόστασης $r_0$.

(Οι βαρυτικές δυνάμεις θεωρούνται αμελητέες).

**ΘΕΜΑ 3 (2.5Μ)**

Ένα σωματίδιο μάζας $m$ κινείται σε μία διάσταση, κατά μήκος του άξονα $x$, υπό την επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης $F(x) = 4kx^3 - 16kx$, όπου $k$ θετική σταθερά με κατάλληλες μονάδες μέτρησης.

(α) Βρείτε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$, θεωρώντας ότι στο σημείο $x = 0$ η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν ($U(0) = 0$).

(β) Μελετήστε τη συνάρτηση $U(x)$ βρίσκοντας τις ρίζες της και τα σημεία ισορροπίας του σωματιδίου. Χαρακτηρίστε το κάθε σημείο ισορροπίας ως προς την ευστάθειά του (ευσταθής ή ασταθής ισορροπία) και προσδιορίστε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $U(x)$ για $x \to \pm\infty$. Βάσει αυτών των στοιχείων, σχεδιάστε ένα πρόχειρο γράφημα της συνάρτησης.

(γ) Αν το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά στο σημείο ευσταθούς ισορροπίας (σε ηρεμία), υπολογίστε την ελάχιστη ταχύτητα διαφυγής $v_0$ που πρέπει να του δοθεί ακαριαία ώστε να μπορέσει να διαφύγει στο άπειρο.

**ΘΕΜΑ 4 (2.5Μ)**

Μια ομογενής λεπτή ορθογώνια πλάκα μάζας $M$ και πλευρών $a$ (μήκος) και $b$ (πλάτος) μπορεί να

περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό της και διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Το σύστημα θεωρείται ιδανικό, δηλαδή δεν υπάρχουν όροι απωλειών (όπως π.χ. τριβές στον άξονα). Αρχικά η πλάκα είναι ακίνητη. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να της ασκείται μια χρονικά μεταβαλλόμενη ροπή $N(t) = \beta t + \gamma t^2$, όπου $\beta, \gamma$ θετικές σταθερές.

(α) Αποδείξτε πρώτα ότι η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου μάζας $m$ και μήκους $L$ ως προς το κέντρο της είναι $I = \frac{1}{12} m L^2$. Με βάση αυτό και το θεώρημα καθέτων αξόνων, υπολογίστε τη ροπή αδράνειας $I_z$ της ορθογώνιας πλάκας ως προς τον άξονα περιστροφής της.

(β) Βρείτε τις συναρτήσεις της γωνιακής ταχύτητας $\omega(t)$ και της κινητικής ενέργειας περιστροφής $K(t)$ σε σχέση με το χρόνο.

(γ) Βρείτε τη συνάρτηση της γωνίας περιστροφής $\theta(t)$ της πλάκας ως προς το χρόνο.

**ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**Λύση Θέματος 1.**

**(α) Σύγκρουση σωματιδίων**

Για να συγκρουστούν τα δύο σωματίδια, πρέπει σε κάποια χρονική στιγμή $t$ τα διανύσματα θέσης τους να ταυτίζονται: $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t)$. Εξισώνουμε μία-μία τις συνιστώσες: για τη συνιστώσα $z$:

$$5 + 2t = 1 + 4t \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

Ελέγχουμε αν για $t = 2$ s ταυτίζονται και οι υπόλοιπες συνιστώσες:

- Συνιστώσα $y$: $y_1(2) = 4 + 4(2)^2 = 20$ m και $y_2(2) = 10 + 9(2) - 2(2)^2 = 10 + 18 - 8 = 20$ m. Συμφωνούν.
- Συνιστώσα $x$: $x_1(2) = 5 + 2(2)^2 = 13$ m και $x_2(2) = 19 - 2 - (2)^2 = 19 - 6 = 13$ m. Συμφωνούν.

Άρα τα σωματίδια θα συγκρουστούν τη χρονική στιγμή $t = 2$ s, στο σημείο με συντεταγμένες $(13, 20, 9)$.

**(β) Δυνάμεις**

Οι ταχύτητες των σωματιδίων είναι οι παράγωγοι των θέσεων:

$$\mathbf{v}_1(t) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = 4t\hat{x} + 8t\hat{y} + 2\hat{z}$$

$$\mathbf{v}_2(t) = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = (-1 - 2t)\hat{x} + (9 - 4t)\hat{y} + 4\hat{z}$$

Οι επιταχύνσεις είναι:

$$\mathbf{a}_1(t) = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = 4\hat{x} + 8\hat{y}$$

$$\mathbf{a}_2(t) = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = -2\hat{x} - 4\hat{y}$$

Άρα οι δυνάμεις που ασκούνται είναι:

$$\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1 = m(4\hat{x} + 8\hat{y}) = 4m\hat{x} + 8m\hat{y}$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2 = 2m(-2\hat{x} - 4\hat{y}) = -4m\hat{x} - 8m\hat{y}$$

Η ολική εξωτερική δύναμη στο σύστημα είναι:

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (4m - 4m)\hat{x} + (8m - 8m)\hat{y} = \mathbf{0}$$

**(γ) Διατήρηση της Ορμής**

Εφόσον η συνολική εξωτερική δύναμη είναι μηδέν ($\mathbf{F}_{ext} = 0$), η ολική ορμή $\mathbf{P}$ του συστήματος διατηρείται σταθερή. Υπολογίζουμε την ορμή ως συνάρτηση του χρόνου (πριν την κρούση):

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m(4t\hat{x} + 8t\hat{y} + 2\hat{z}) + 2m((-1 - 2t)\hat{x} + (9 - 4t)\hat{y} + 4\hat{z})$$

$$\mathbf{P} = m(4t - 2 - 4t)\hat{x} + m(8t + 18 - 8t)\hat{y} + m(2 + 8)\hat{z}$$

$$\boxed{\mathbf{P} = -2m\hat{x} + 18m\hat{y} + 10m\hat{z}}$$

Βλέπουμε ότι πράγματι η ολική ορμή δεν εξαρτάται από τον χρόνο, είναι σταθερή (διατηρείται).

**(δ) Θέση συσσωματώματος**

Μετά την πλαστική κρούση ($t \geq 2$ s), το συσσωμάτωμα έχει μάζα $M = 3m$. Εφόσον η ορμή διατηρείται, το συσσωμάτωμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{3m} = -\frac{2}{3}\hat{x} + 6\hat{y} + \frac{10}{3}\hat{z}$$

Η θέση του συσσωματώματος για $t \geq 2$ δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_{collision} + \mathbf{V}(t-2)$$

Όπου $\mathbf{R}_{collision} = (13, 20, 9)$. Επομένως:

$$\boxed{\mathbf{R}(t) = \left(13 - \frac{2}{3}(t-2)\right)\hat{x} + (20 + 6(t-2))\,\hat{y} + \left(9 + \frac{10}{3}(t-2)\right)\hat{z}}$$

**Λύση Θέματος 2.**

**(α) Ελάχιστη απόσταση προσέγγισης**

Στη θέση ελάχιστης προσέγγισης $r_0$, το διανυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου είναι απολύτως κάθετο στο διάνυσμα θέσης, άρα όλη η ταχύτητα $v_0$ είναι εγκάρσια. Εφόσον η ηλεκτροστατική δύναμη είναι κεντρική δύναμη, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται:

$$L_{ap\chi} = L_{min} \Rightarrow mvb = mv_0 r_0 \Rightarrow v_0 = \frac{vb}{r_0} \quad (1)$$

Επίσης, επειδή το πεδίο είναι συντηρητικό, εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ του απείρου και του σημείου ελάχιστης προσέγγισης:

$$E_{ap\chi} = E_{min} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r_0}$$

Αντικαθιστούμε την (1) στην εξίσωση ενέργειας:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{vb}{r_0}\right)^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

Διαιρούμε όλους τους όρους με την αρχική κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}mv^2$:

$$1 = \frac{b^2}{r_0^2} + \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 mv^2 r_0}$$

Με βάση τη σχέση που μας δίνεται, $a = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 mv^2}$, η εξίσωση απλοποιείται:

$$1 = \frac{b^2}{r_0^2} + \frac{a}{r_0} \Rightarrow r_0^2 - ar_0 - b^2 = 0$$

Λύνοντας και κρατώντας την θετική ρίζα (εφόσον $r_0 > 0$), βρίσκουμε την ελάχιστη απόσταση προσέγγισης:

$$\boxed{r_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}$$

**(β) Ταχύτητα ελάχιστης προσέγγισης**

Χρησιμοποιώντας απευθείας τη σχέση (1) που προέκυψε από τη διατήρηση της στροφορμής και αντικαθιστώντας την τιμή του $r_0$, η ταχύτητα είναι:

$$\boxed{v_0 = \frac{vb}{r_0} = \frac{2vb}{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}}$$

**Λύση Θέματος 3.**

**(α) Συνάρτηση δυναμικής ενέργειας** $U(x)$

Επειδή η δύναμη είναι συντηρητική, συνδέεται με τη δυναμική ενέργεια μέσω της σχέσης $F(x) = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow dU = -F(x)dx$. Ολοκληρώνοντας:

$$U(x) - U(0) = -\int_0^x F(x')\,dx' = -\int_0^x (4kx'^3 - 16kx')\,dx' = -\left[kx'^4 - 8kx'^2\right]_0^x$$

Δεδομένου ότι δίνεται $U(0) = 0$, προκύπτει:

$$\boxed{U(x) = 8kx^2 - kx^4 = kx^2(8 - x^2)}$$

**(β) Μελέτη της συνάρτησης** $U(x)$

*Ρίζες (Σημεία μηδενισμού):*

$$U(x) = 0 \Rightarrow kx^2(8 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; (\text{διπλή ρίζα}) \;\; \text{ή} \;\; x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

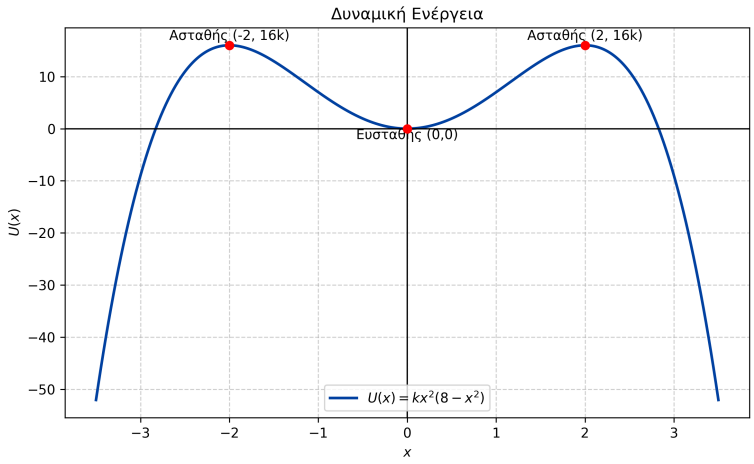
*Σημεία ισορροπίας:* Προκύπτουν στα τοπικά ακρότατα της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή όταν η δύναμη μηδενίζεται:

$$F(x) = 0 \Rightarrow 4kx(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0,\; x = 2,\; x = -2$$

*Ευστάθεια (Δεύτερη παράγωγος):* Η δεύτερη παράγωγος της δυναμικής ενέργειας είναι $U''(x) = -F'(x) = 16k - 12kx^2$.

- Για $x = 0$: $U''(0) = 16k > 0$. Άρα η $U(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Το σημείο $x = 0$ είναι σημείο **ευσταθούς ισορροπίας** με τιμή $U(0) = 0$.
- Για $x = \pm 2$: $U''(\pm 2) = 16k - 12k(\pm 2)^2 = -32k < 0$. Άρα η $U(x)$ παρουσιάζει τοπικά μέγιστα. Τα σημεία $x = \pm 2$ είναι σημεία **ασταθούς ισορροπίας** με τιμές $U(\pm 2) = 8k(4) - k(16) = 16k$.

*Ασυμπτωτική συμπεριφορά:* Καθώς $x \to \pm\infty$, ο όρος μέγιστου βαθμού ($-kx^4$) κυριαρχεί, συνεπώς $U(x) \to -\infty$.




**Σχήμα 1:** Γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας $U(x) = kx^2(8 - x^2)$. Διακρίνονται το σημείο ευσταθούς ισορροπίας στο $x = 0$ και τα σημεία ασταθούς ισορροπίας στα $x = \pm 2$.

**(γ) Ταχύτητα διαφυγής**

Το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά στο σημείο ευσταθούς ισορροπίας $x = 0$ με δυναμική ενέργεια $U(0) = 0$. Για να διαφύγει στο άπειρο, πρέπει να έχει αρκετή ενέργεια ώστε να υπερπηδήσει τα φράγματα δυναμικού που βρίσκονται εκατέρωθεν στα σημεία $x = \pm 2$, όπου η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη: $U_{max} = 16k$.

Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας, η ολική ενέργεια $E$ του σωματιδίου πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με την ενέργεια του φράγματος:

$$E \geq U_{max} \Rightarrow K_0 + U(0) \geq 16k \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \geq 16k \Rightarrow v_0^2 \geq \frac{32k}{m}$$

Άρα η ελάχιστη ταχύτητα διαφυγής είναι:

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{32k}{m}}}$$

**Λύση Θέματος 4.**

**(α) Απόδειξη ροπής αδράνειας**

Για μια ομογενή ράβδο μάζας $m$ και μήκους $L$, θεωρούμε άξονα $x'$ κατά μήκος της ράβδου με αρχή το κέντρο της (δηλαδή εκτείνεται από $-L/2$ έως $L/2$). Η γραμμική πυκνότητα μάζας είναι σταθερή: $\lambda = m/L$. Η στοιχειώδης μάζα $dm$ ενός τμήματος $dx'$ είναι $dm = \lambda\, dx'$. Η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο είναι:

$$I_{\text{ράβδου}} = \int_{-L/2}^{L/2} x'^2\, dm = \int_{-L/2}^{L/2} x'^2 \left(\frac{m}{L}\right) dx' = \frac{m}{L}\left[\frac{x'^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$I_{\text{ράβδου}} = \frac{m}{3L}\left(\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right) = \frac{m}{3L}\frac{2L^3}{8} = \frac{1}{12}mL^2$$

Η ορθογώνια πλάκα (διαστάσεων $a \times b$) μπορεί να θεωρηθεί ως μια δισδιάστατη συνεχής κατανομή τέτοιων ράβδων. Η ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς τον άξονα $x$ (παράλληλο στην πλευρά $a$ και διερχόμενο από το κέντρο μάζας) ισούται με τη ροπή αδράνειας ράβδου μήκους $b$: $I_x = \frac{1}{12}Mb^2$. Αντίστοιχα, ως προς τον άξονα $y$: $I_y = \frac{1}{12}Ma^2$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Καθέτων Αξόνων για επίπεδες κατανομές ($I_z = I_x + I_y$), προκύπτει η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα $z$ που είναι κάθετος στην πλάκα:

$$\boxed{I_z = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)}$$

**(β) Γωνιακή ταχύτητα και κινητική ενέργεια**

Εφόσον δεν υπάρχουν όροι απωλειών, εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης:

$$\Sigma\tau = I_z\alpha \Rightarrow N(t) = I_z\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \beta t + \gamma t^2 = I_z\frac{d\omega}{dt}$$

Χωρίζουμε μεταβλητές και ολοκληρώνουμε από $t' = 0$ (όπου $\omega(0) = 0$) έως $t$:

$$d\omega = \frac{1}{I_z}(\beta t' + \gamma t'^2)\, dt' \Rightarrow \int_0^{\omega} d\omega' = \frac{1}{I_z}\int_0^t (\beta t' + \gamma t'^2)\, dt'$$

$$\omega(t) = \frac{1}{I_z}\left(\frac{\beta t^2}{2} + \frac{\gamma t^3}{3}\right)$$

Αντικαθιστώντας τη ροπή αδράνειας $I_z$:

$$\boxed{\omega(t) = \frac{12}{M(a^2 + b^2)}\left(\frac{\beta t^2}{2} + \frac{\gamma t^3}{3}\right)}$$

Η κινητική ενέργεια περιστροφής είναι $K(t) = \frac{1}{2} I_z \omega(t)^2$:

$$\boxed{K(t) = \frac{1}{2I_z}\left(\frac{\beta t^2}{2} + \frac{\gamma t^3}{3}\right)^2 = \frac{6}{M(a^2+b^2)}\left(\frac{\beta t^2}{2} + \frac{\gamma t^3}{3}\right)^2}$$

**(γ) Γωνία περιστροφής**

Η γωνιακή ταχύτητα αποτελεί το ρυθμό μεταβολής της γωνίας, $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$. Θεωρώντας τη γωνία $\theta(0) = 0$:

$$d\theta = \omega(t)\, dt = \frac{1}{I_z}\left(\frac{\beta t^2}{2} + \frac{\gamma t^3}{3}\right) dt$$

Ολοκληρώνοντας ξανά:

$$\int_0^\theta d\theta' = \frac{1}{I_z}\int_0^t \left(\frac{\beta t'^2}{2} + \frac{\gamma t'^3}{3}\right) dt' \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{I_z}\left(\frac{\beta t^3}{6} + \frac{\gamma t^4}{12}\right)$$

Αντικαθιστώντας το $I_z$:

$$\boxed{\theta(t) = \frac{12}{M(a^2+b^2)}\left(\frac{\beta t^3}{6} + \frac{\gamma t^4}{12}\right)}$$