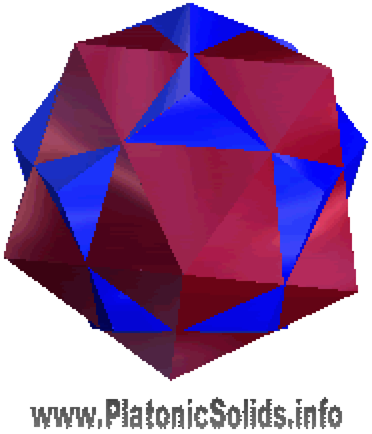
ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ

Αποκαλούμε (συνήθως) στερεό σώμα ένα σύστημα σωμάτων των οποίων οι μεταξύ τους αποστάσεις παραμένουν αμετάβλητες στο πρόβλημα που μας ενδιαφέρει.

Προβλήματα στερεών σωμάτων αναφέρονται ως επί το πλείστον σε περιστροφές γύρω από άξονα που είτε είναι σταθερός, είτε κινείται.



Βασικές εξισώσεις κίνησης:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\varepsilon\xi} \quad (1),$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (2),$$

όπου $\vec{L}$ είναι η συνολική στροφορμή του συστήματος σωμάτων και $\vec{N}$ η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων.

ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ

Η κίνηση στερεού σώματος μπορεί εν γένει να θεωρηθεί ως συνδυασμός μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης.

Τα προβλήματα στερεού σώματος απλοποιούνται με την ανάλυση της κίνησης σε δύο συστήματα αναφοράς, σε ένα εκ των οποίων υπάρχει μόνο ιδιοπεριστροφή του σώματος.

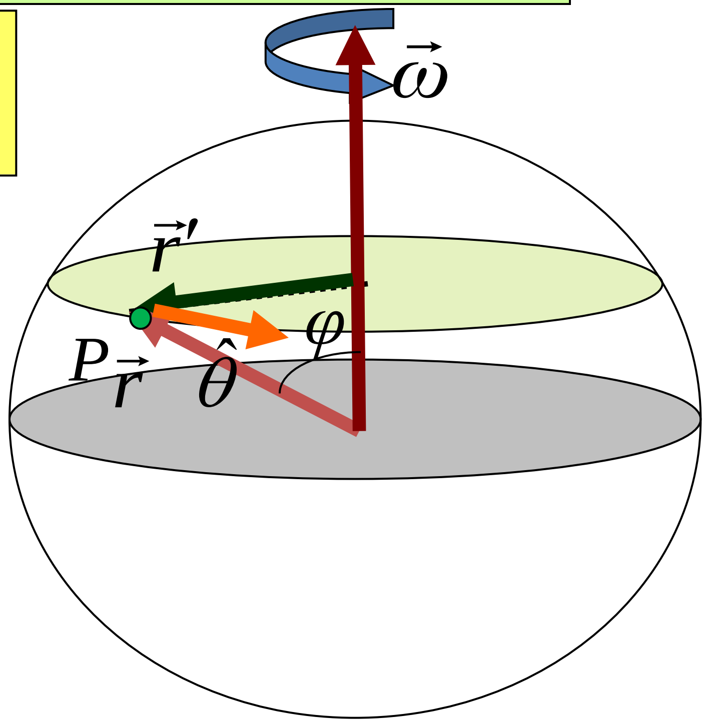
Οταν βάλλουμε ένα στερεό σώμα (π.χ. το σφυρί του σχήματος)

το κέντρο μάζας διαγράφει την τροχιά βολής, ενώ στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας μπορεί να υπάρχει ιδιοπεριστροφή.

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ – ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Έστω στερεό σώμα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από σταθερό άξονα που περνάει από σημείο του σώματος Ο.

Αν $\vec{v}$ είναι η ταχύτητα του σημείου P με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς το Ο, τότε ισχύει ότι $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (2).

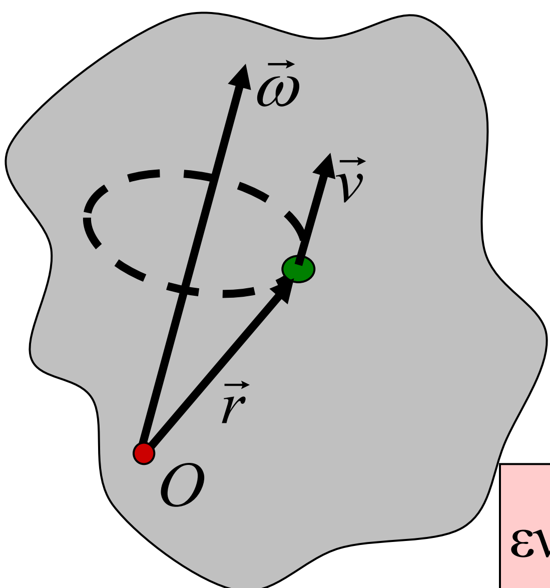


Προφανώς $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}'}{dt}$.

Όμως $\dfrac{d\vec{r}'}{dt} = \omega r \sin\varphi\,\hat{\theta}$

Είναι όμως και $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \sin\varphi\,\hat{\theta}$.

Άρα όντως $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

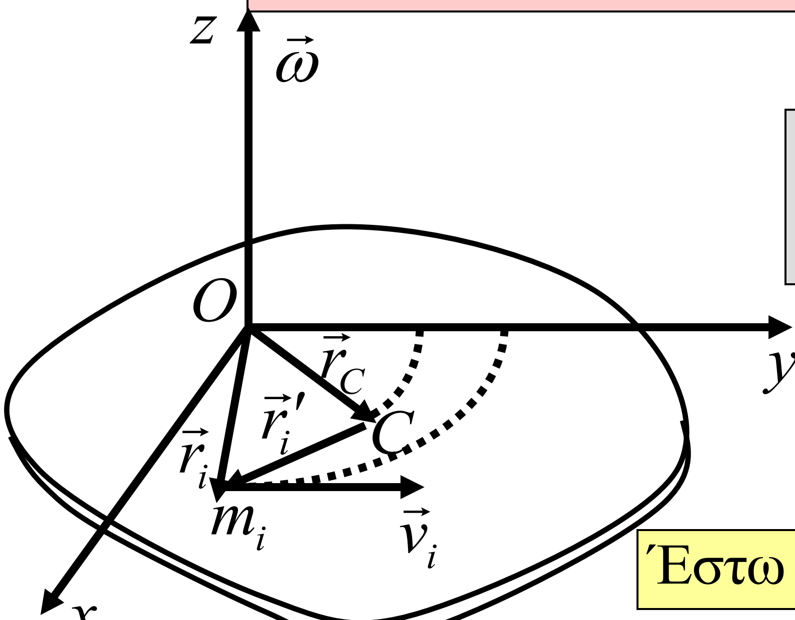


Επομένως, αν το στερεό σώμα είναι συλλογή μαζών m_i με διανύσματα θέσης $\vec{r}_i$, τότε η ολική στροφορμή είναι $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)$ (3),

ενώ η ολική κινητική ενέργεια είναι $K = \dfrac{1}{2} \sum_i m_i \left|\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right|^2$.

ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Λεπτή πλάκα στο επίπεδο xy περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Επειδή είναι $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \Rightarrow v_i = \omega r_i$



βρίσκουμε για την κινητική ενέργεια

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (4).$$

όπου $I_z = \sum_i m_i r_i^2$ (5) ορίζει την ροπή αδράνειας της πλάκας γύρω από τον άξονα z.

Έστω τώρα C το κέντρο μάζας της πλάκας. Τότε

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i m_i \left(\vec{r}_C + \vec{r}_i\,'\right)\cdot\left(\vec{r}_C + \vec{r}_i\,'\right) = \sum_i m_i \left(r_C^2 + 2\vec{r}_C \cdot \vec{r}_i\,' + r_i'^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_z = M r_C^2 + 2\vec{r}_C \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i\,' + \sum_i m_i r_i'^2 = M r_C^2 + \sum_i m_i r_i'^2 \Rightarrow I_z = M r_C^2 + I_{cz} \quad (6),$$

όπου $\vec{r}_i\,'$ τα διανύσματα θέσης και $I_{cz} = \sum_i m_i r_i'^2$ η ροπή αδράνειας ως προς το C.

Αν τοποθετήσουμε λεπτές φέτες τη μία πάνω στην άλλη παίρνουμε ένα τρισδιάστατο στερεό και ισχύουν οι ίδιες σχέσεις (4), (5) και (6).

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

$I_z = Mr_C^2 + I_{cz}$, όπου $I_{cz} = \sum_i m_i r_i'^2$ είναι η ροπή αδράνειας ως το C.

Η ροπή αδράνειας ως προς τυχαίο άξονα είναι ίση με την ροπή αδράνειας ως προς παράλληλο άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του σώματος συν το γινόμενο της ολικής μάζας επί το τετράγωνο της απόστασης των δύο αξόνων.

Έστω τώρα ότι κάθε σώμα m_i έχει ολική ταχύτητα $\vec{V}_i = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$, εκτός από την συνιστώσα περιστροφής $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$ γύρω από το κέντρο μάζας υπάρχει και συνιστώσα $\vec{V}$ που είναι κοινή για όλα τα σώματα. Η κινητική ενέργεια είναι τότε

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\vec{V}\cdot\vec{V} + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i'\right)\cdot\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i'\right) + 2\vec{V}\cdot\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i'\right)\right] \Rightarrow$$

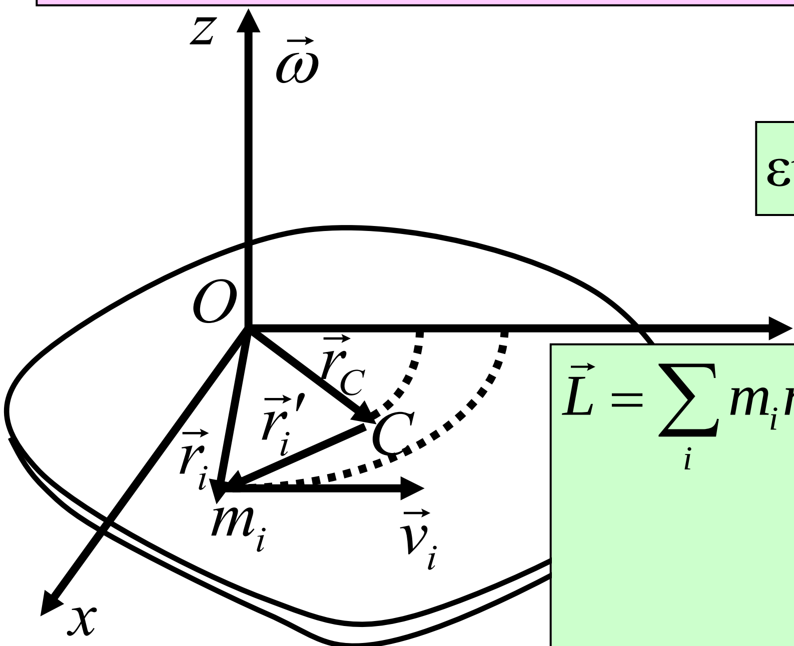
$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}\overbrace{\left(\sum_i m_i\right)}^{M_{o\lambda}} V^2 + \frac{1}{2} I_{cz}\omega^2 + \vec{V}\cdot\left(\vec{\omega} \times \overbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i'}^{0}\right) = \frac{1}{2} M_{o\lambda} V^2 + \frac{1}{2} I_{cz}\omega^2 \quad (5)$$

Δηλαδή η ολική κινητική ενέργεια έχει συνεισφορά από την ιδιοπεριστροφή γύρω από το κέντρο μάζας και από τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

$I_z = Mr_C^2 + I_{cz}$, όπου $I_{cz} = \sum_i m_i r_i'^2$ είναι η ροπή αδράνειας ως το C.

Η ροπή αδράνειας ως προς τυχαίο άξονα είναι ίση με την ροπή αδράνειας ως προς παράλληλο άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του σώματος συν το γινόμενο της ολικής μάζας επί το τετράγωνο της απόστασης των δύο αξόνων.



Για τη στροφορμή έχουμε

είναι $\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{r}_i \times [(\omega r_i)\hat{v}_i] = \omega r_i^2 \hat{z}$ και άρα

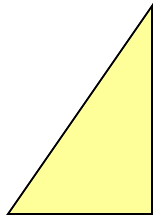
$$\vec{L} = \sum_i m_i r_i^2 \omega \hat{z} = I_z \omega \hat{z} = \left(I_{cz} + Mr_C^2\right)\omega \hat{z} = I_{cz}\omega \hat{z} + M\vec{r}_C \times \vec{V},$$

όπου $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}_C$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Η στροφορμή ως προς τυχαίο σημείο είναι ίση με την στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας του σώματος συν την στροφορμή ως προς το ίδιο σημείο μάζας M που κινείται με την ταχύτητα $\vec{V}$ του κέντρου μάζας.

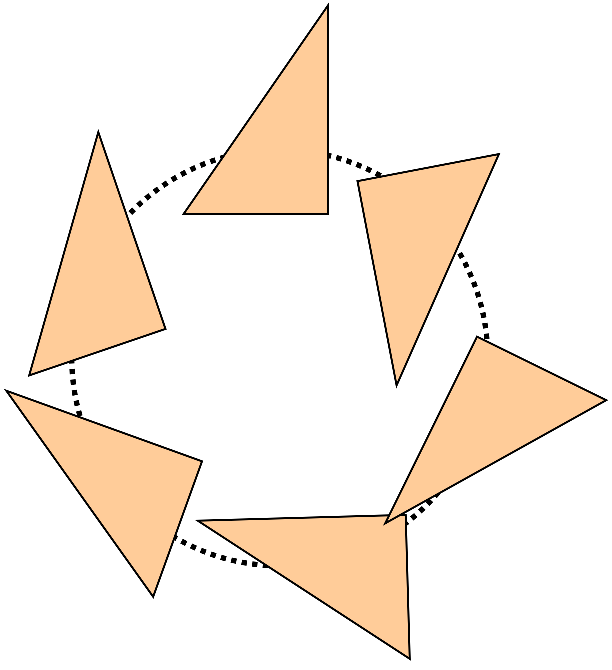
ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ – ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

$$I_z = Mr_C^2 + I_{cz}, K = \frac{1}{2} I_{cz}\omega^2 + \frac{1}{2} MV^2 \quad (5).$$



$$\vec{L} = M\vec{r}_C \times \vec{V}.$$

$$K = \frac{1}{2} MV^2.$$

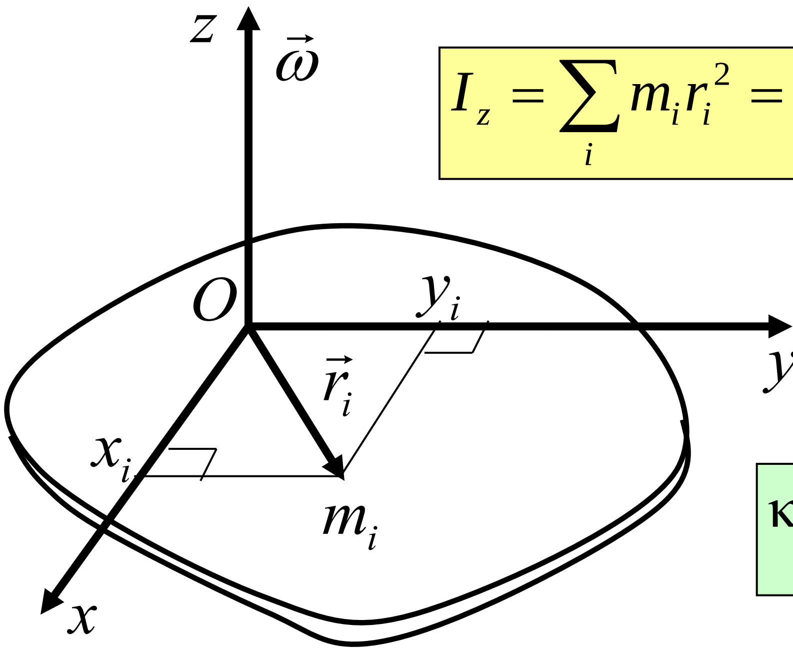


$$\vec{L} = I_{cz}\omega\hat{z} + M\vec{r}_C \times \vec{V}.$$

$$K = \frac{1}{2} I_{cz}\omega^2 + \frac{1}{2} MV^2.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΘΕΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

Για την ροπή αδράνειας επίπεδης *xy* πλάκας ως προς τον άξονα *z* έχουμε



$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x,$$

$I_x = \sum_i m_i y_i^2$ είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα *x*

και $I_y = \sum_i m_i x_i^2$ η ροπή αδράνειας ως προς *y*.

Η ροπή αδράνειας επίπεδου λεπτού φύλλου ως προς άξονα κάθετο στο φύλλο είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας ως προς κάθετους μεταξύ τους άξονες μέσα στο φύλλο.

ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Για ένα σύστημα διακριτών μαζών η ροπή αδράνειας ορίζεται ως άθροισμα

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (1).$$

Για ένα συνεχές σώμα ο ορισμός της ροπής αδράνειας γίνεται μέσω ολοκληρώματος

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho\left(\vec{r}\right) dV$$

όπου $\rho(\vec{r})$ είναι η πυκνότητα του σώματος στην θέση $\vec{r}$

r η απόσταση της μάζας dm από τον άξονα περιστροφής

και το $\int_V$ δηλώνει ολοκλήρωμα πάνω σε όλο το σώμα.