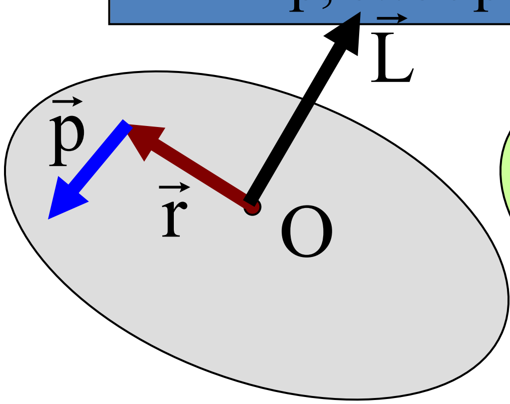
ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ-ΡΟΠΗ

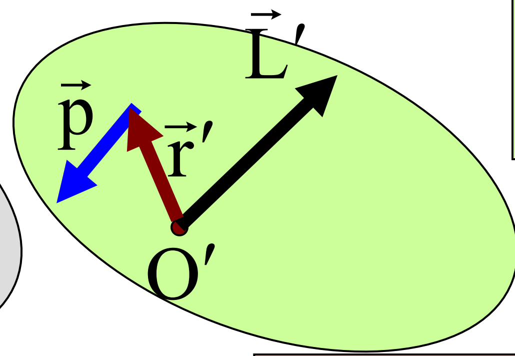
Αν Ο είναι ένα σημείο ακίνητο σε κάποιο αδρανειακό σύστημα

και $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σώματος ως προς το Ο,

τότε η στροφορμή $\vec{L}$ ως προς το Ο ορίζεται ως

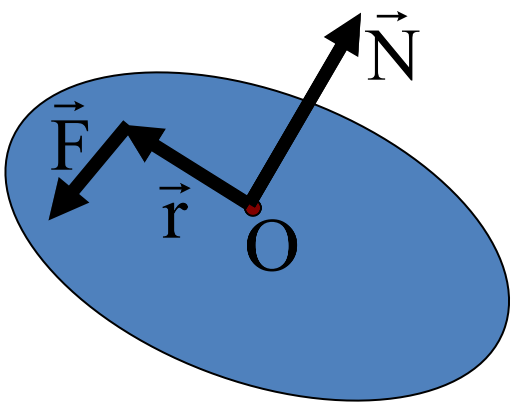
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, όπου $\vec{p} = M\vec{v}$ είναι η ορμή του σώματος στο σύστημα αυτό.





Για διαφορετικό σημείο αναφοράς O′, είναι εν γένει $\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p} \neq \vec{L}$.

Η στροφορμή ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο σημείο.



Αν στο παραπάνω σώμα ασκείται δύναμη $\vec{F}$,

τότε η ροπή $\vec{N}$ αυτής της δύναμης ως προς το Ο

είναι το διανυσματικό μέγεθος $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Όπως και η στροφορμή, έτσι και η ροπή ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο σημείο.

ΡΟΠΗ - ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Από τους ορισμούς της στροφορμής και της ροπής προκύπτει

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{N}, \ (1)$$

αφού $\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} = \vec{v}\times\left(M\vec{v}\right) = M\left(\vec{v}\times\vec{v}\right) = 0.$

Γενικά για σύστημα σωμάτων : $\frac{d\vec{L}_{ολ}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i\left(\vec{r}_i\times\vec{p}_i\right) = \sum_i\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\vec{p}_i + \vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{ολ}}{dt} = \sum_\iota \vec{r}_i\times\vec{F}_i = \vec{N}_{ολ}$, όπου $\vec{N}_{ολ}$ η συνολική ροπή στο σύστημα.

Διατήρηση της στροφορμής: Αν $\vec{N} = 0$ τότε από την (1) έχουμε $\vec{L} =$ σταθερά.

Αν $\vec{N} = 0$ τότε η στροφορμή παραμένει σταθερή με το χρόνο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Κεντρικές δυνάμεις

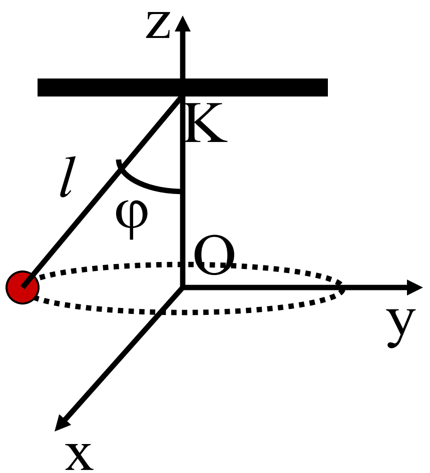
$\vec{F} = f\left(r\right)\hat{r}$ και επομένως $\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = f\left(r\right)\left(\vec{r}\times\hat{r}\right) = 0.$

Όταν $\vec{L} =$ σταθερά, τότε το $\vec{r}$ και το $\vec{v}$ πρέπει να παραμένουν κάθετα στο $\vec{L}$, ή αλλιώς το σώμα κινείται σε ένα επίπεδο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Μικρή σφαίρα μάζας m κρέμεται μέσω νήματος μήκους l από ακλόνητο σημείο ανάρτησης K, και κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω σε οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας r (της οποίας το κέντρο O βρίσκεται στην κατακόρυφο από το σημείο ανάρτησης). Τη στιγμή $t = 0$ η μάζα είναι στο $(x_0, 0, 0)$ με ταχύτητα $(0, v_0, 0)$.

Να υπολογιστεί : α) η στροφορμή $\vec{L}_K$ της σφαίρας ως προς το σημείο K και β) το το σημείο O, γ) ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος της στροφορμής ως προς το σημείο K, δ) ο ρυθμός μεταβολής της $\vec{L}_O$ ως προς το O.



ΛΥΣΗ: α) Είναι $\vec{r}_K = \left(r\cos\omega t, r\sin\omega t, -l\cos\varphi\right)$,

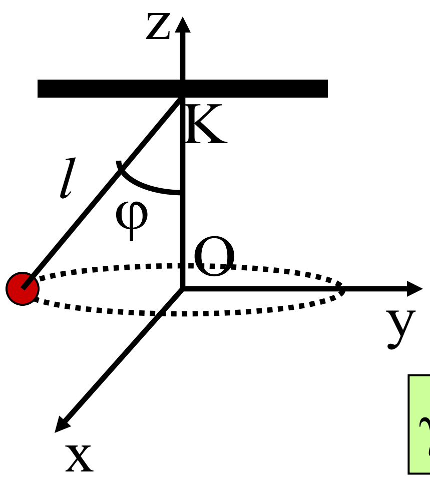
$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_K = \left(-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, 0\right)$, όπου $r = l\sin\varphi$.

$$\text{Άρα } \vec{L}_K = \vec{r}_K \times \left(m\vec{v}\right) = m\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r\cos\omega t & r\sin\omega t & -l\cos\varphi \\ -v_0\sin\omega t & v_0\cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_K = mv_0 l\cos\varphi\left(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t\right) + mrv_0\hat{z}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Να υπολογιστεί: β) η $\vec{L}$ ως προς το Ο, γ-δ) ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς Κ και Ο.



ΛΥΣΗ: β) Είναι $\vec{r}_O = (r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0)$ και άρα

$$\text{Άρα } \vec{L}_O = \vec{r}_O \times m\vec{v} = m\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r\cos\omega t & r\sin\omega t & 0 \\ -v_0\sin\omega t & v_0\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}mrv_0.$$

γ) Βρήκαμε $\vec{L}_K = mv_0 l\cos\varphi(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t) + mrv_0\hat{z}$, άρα

$$d\vec{L}_K/dt = \omega mv_0 l\cos\varphi(-\hat{x}\sin\omega t + \hat{y}\cos\omega t).$$

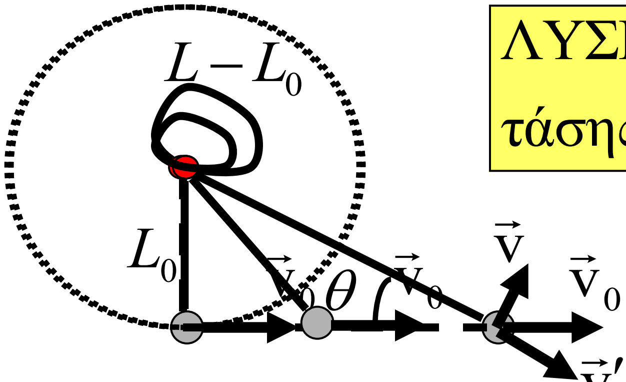
Είναι $d\vec{L}_K/dt = \vec{N}_K = \vec{r}_K \times \vec{F}$, όπου $\vec{F} = \vec{W} + \vec{T}$ η ολική δύναμη που δρα ως κεντρομόλος $\vec{F} = -\dfrac{mv_0^2}{l\sin\varphi}\hat{r}_O = -mv_0\omega\hat{r}_O$, όπου $\hat{r}_O = \hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t$.

$$\vec{N}_K = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r\cos\omega t & r\sin\omega t & -l\cos\varphi \\ -mv_0\omega\cos\omega t & -mv_0\omega\sin\omega t & 0 \end{vmatrix} = d\vec{L}_K/dt.$$

δ) $d\vec{L}_O/dt = 0.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Σώμα μάζας m είναι στερεωμένο στο άκρο χορδής μήκους L της οποίας το άλλο άκρο είναι μόνιμα στερεωμένο με πινέζα σε σημείο O πάνω σε λείο τραπέζι. Στην αρχή κρατάμε ένα ενδιάμεσο σημείο της χορδής στο O και θέτουμε το σώμα σε κυκλική τροχιά ακτίνας $L_0 < L$ περί το O. Στην συνέχεια αφήνουμε ελεύθερο το ενδιάμεσο σημείο της χορδής. Βρείτε α) την ώθηση που ασκείται στιγμιαία στην πινέζα κατά την στιγμή που το νήμα τεντώνεται καθ' όλο το μήκος του, β) την τελική κινητική ενέργεια και γ) την τελική κεντρομόλο δύναμη.



ΛΥΣΗ : α) Στο σώμα ασκείται μόνο η κεντρική δύναμη της τάσης του νήματος την στιγμή που αυτό τεντώνεται.

Άρα διατηρείται η στροφορμή και βρίσκουμε

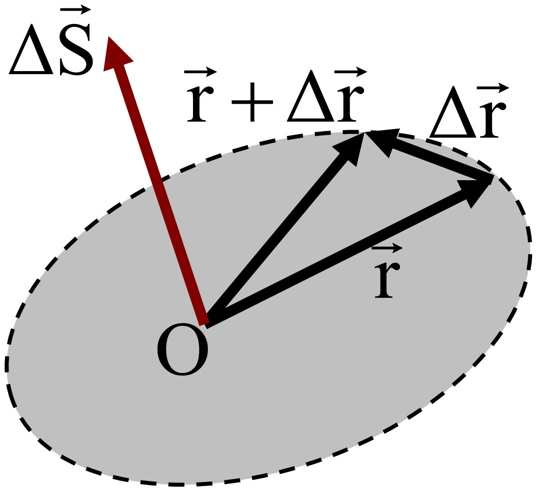
$$mL_0v_0 = mLv \Rightarrow v = v_0L_0/L.$$

Όταν τεντώνει το νήμα η ορμή αλλάζει από $m\vec{v}_0$ σε $m\vec{v}$.

Η ώθηση στη πινέζα είναι $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{P} = m\vec{v}' = \hat{v}' m v_0 \cos\theta = \hat{v}' m v_0 \sqrt{1-\left(L_0/L\right)^2}.$

β - γ) Κινητική ενέργεια $E_{\kappa\iota\nu} = mv^2/2 = mv_0^2L_0^2/\left(2L^2\right)$, κεντρομόλος $F = mv^2/L.$

ΕΠΙΠΕΔΗ ΤΡΟΧΙΑ



Έστω ότι το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς σημείο αναφοράς O μεταβάλλεται κατά $\Delta\vec{r}$.

Το σώμα διαγράφει ένα τρίγωνο το εμβαδό του οποίου δίνεται από το εξωτερικό γινόμενο

$$\Delta\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\left(\vec{r}+\Delta\vec{r}\right) = \frac{1}{2}\vec{r}\times\Delta\vec{r}. \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς χρόνο παίρνουμε

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2M}\vec{r}\times M\vec{v} = \frac{\vec{L}}{2M}. \quad (2)$$

Από την (2) λοιπόν βλέπουμε ότι αν $\vec{L}$ είναι σταθερά της κίνησης τότε

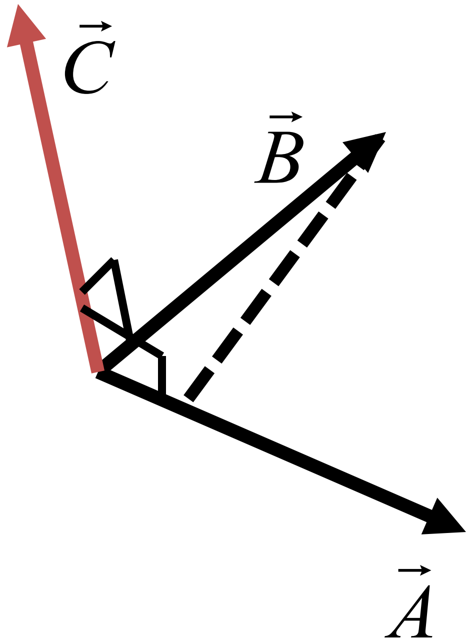
η διεύθυνση $\hat{S}(t)$ παραμένει σταθερή με τον χρόνο, δηλαδή η τροχιά είναι επίπεδη.

και το σώμα διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

Η δύναμη της παγκόσμιας έλξης μεταξύ πλανητών είναι κεντρική, άρα διατηρείται η στροφορμή και έτσι προκύπτει από τα παραπάνω

ο $2^{ος}$ νόμος του Kepler για την κίνηση πλανητών.

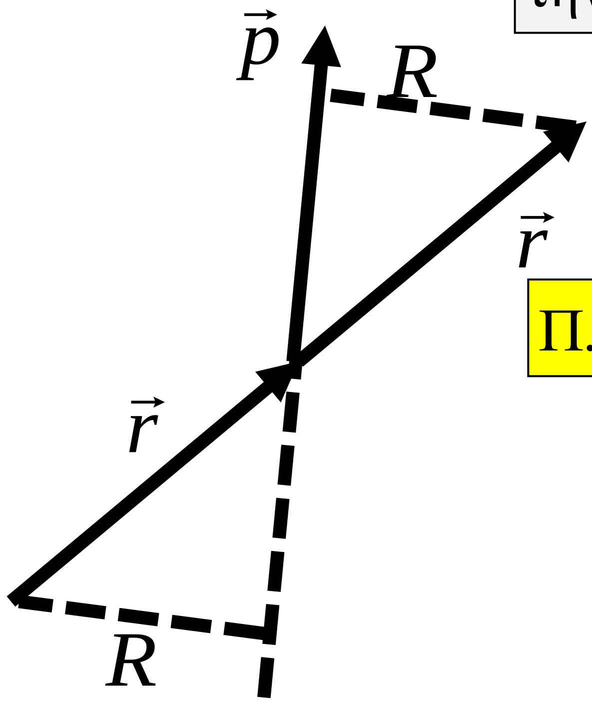
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ



Το εξωτερικό γινόμενο των $\vec{\mathrm{A}}$ και $\vec{\mathrm{B}}$ είναι το *διάνυσμα*:

$$\vec{\mathrm{C}} = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} \equiv \mathrm{AB}|\sin\theta|\hat{\mathrm{C}}.$$

Άρα, το μέτρο C υπολογίζεται φέρνοντας την κάθετο από την διεύθυνση του ενός διανύσματος στην διεύθυνση του άλλου διανύσματος και υπολογίζοντας την σχετική προβολή.



Π.χ., για το μέτρο της στροφορμής $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ έχουμε

$$L = pR$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Θα δείξουμε ότι για σύστημα σωμάτων με διανύσματα θέσης $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}}$ η συνισταμένη $\vec{\mathrm{N}}_{\mathrm{tot}}$ ροπών εσωτερικών κεντρικώνδυνάμεων είναι μηδέν.

Έστω $\vec{f}_{ij}$ η δύναμη που ασκεί το σώμα j στο i. Τότε

$$\vec{\mathrm{N}}_{\mathrm{tot}}^{\varepsilon\sigma\omega\tau} = \sum_i \left[\sum_{j \neq i} \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} \right) \right] \quad (A).$$

Με λόγια, για να συμπεριλάβουμε όλες τις δυνάμεις, αθροίζουμε πάνω σε όλα τα ζεύγη σωμάτων που ανήκουν στο σύστημα. Αυτό δηλώνει το διπλό άθροισμα $\sum_i \sum_{j \neq i}$

Είναι $\sum_i \left[\sum_{j \neq i} \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} \right) \right] = \sum_j \left[\sum_{i \neq j} \left(\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \right) \right]$ αφού και τα δύο αυτά διπλά αθροίσματα κάνουν το ίδιο πράγμα, αθροίζουν πάνω σε όλα τα ζεύγη (ij).

Για τον ίδιο λόγο είναι $\sum_j \left[\sum_{i \neq j} \left(\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \right) \right] = \sum_i \left[\sum_{j \neq i} \left(\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \right) \right]$

και άρα $\vec{\mathrm{N}}_{\mathrm{tot}}^{\varepsilon\sigma\omega\tau} = \sum_i \left[\sum_{j \neq i} \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} \right) \right] = \frac{1}{2} \sum_i \left[\sum_{j \neq i} \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \right) \right],$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Θα δείξουμε ότι το άθροισμα των ροπών εσωτερικών κεντρικών δυνάμεων είναι μηδέν.

Αν $\vec{r}_i$ είναι τα διανύσματα θέσης και $\vec{f}_{ij}$ η δύναμη που ασκεί το σώμα j στο i

τότε η συνισταμένη ροπή λόγω όλων των εσωτερικών δυνάμεων είναι

$$\vec{\mathrm{N}}_{\mathrm{tot}}^{\varepsilon\sigma\omega\tau} = \sum_i \left[\sum_{j\neq i} \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} \right) \right] = \frac{1}{2} \sum_i \left[\sum_{j\neq i} \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \right) \right],$$

$$\text{αφού } \sum_i \left[\sum_{j\neq i} \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} \right) \right] = \sum_j \left[\sum_{i\neq j} \left(\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \right) \right]$$

Από τον 3$^{\text{ο}}$ νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$.

$$\text{Άρα}: \vec{\mathrm{N}}_{\mathrm{tot}}^{\varepsilon\sigma\omega\tau} = \frac{1}{2} \sum_i \left[\sum_{j\neq i} \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \times \vec{f}_{ij} \right] = \frac{1}{2} \sum_i \left[\sum_{j\neq i} \vec{r}_{ij} \times \vec{f}_{ij} \right],$$ με $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

Στην περίπτωση κεντρικών δυνάμεων είναι : $\vec{f}_{ij} = f\left(r_{ij}\right)\hat{r}_{ij}$

και αφού $\vec{r}_{ij} \times \hat{r}_{ij} = 0$ βρίσκουμε τελικά $\vec{\mathrm{N}}_{\mathrm{tot}}^{\varepsilon\sigma\omega\tau} = 0$.

ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΡΟΠΗ-ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ

Για ένα σύστημα σωμάτων με μάζες m_i θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα σημείο O (το λεγόμενο κέντρο βάρους) ως προς το οποίο η συνολική ροπή λόγω του βαρυτικού πεδίου της Γης είναι μηδέν.

Για την ολική ροπή ως προς σημείο O είναι $\vec{\mathrm{N}}_{\mathrm{O}} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{g}\right) = \sum_i \left(m_i \vec{r}_i\right) \times \vec{g}$. (1)

Από τον ορισμό του κέντρου μάζας έχουμε $\vec{\mathrm{R}}_{\mathrm{cm}} = \sum_i \left(m_i \vec{r}_i\right) \Big/ \sum_i m_i$,

οπότε η (1) δίνει $\vec{\mathrm{N}}_{\mathrm{O}} = \mathrm{M}\vec{R}_{cm} \times \vec{g}$. (2)

Επομένως, αν το O συμπίπτει με το κέντρο μάζας τότε $\vec{\mathrm{R}}_{\mathrm{cm}} = 0$ και $\vec{\mathrm{N}}_{\mathrm{O}} = 0$.

Για ομογενές βαρυτικό πεδίο το κέντρο μάζας είναι και κέντρο βάρους.

Για την συνολική δύναμη έχουμε $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{tot}} = \sum_i \left(m_i \vec{g}\right) = M\vec{g}$. (3)

Από τις (2) και (3) βλέπουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε πως σε ό,τι έχει να κάνει με την συνολική κίνηση του συστήματος σωμάτων, στο σύστημα ασκείται μία δύναμη $\mathrm{M}\vec{g}$ στο κέντρο μάζας και μία ροπή όπως αυτή περιγράφεται από την (2).

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Η συνολική στροφορμή $\vec{\mathrm{L}}$ ενός συστήματος σωμάτων δίνεται από την σχέση

$\vec{\mathrm{L}} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$ (1), όπου $\vec{r}_i$ είναι διανύσματα θέσης ως προς τυχαίο σημείο.

Αν $\vec{\mathrm{R}}_{\mathrm{cm}}$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας τότε η (1) δίνει

$$\vec{\mathrm{L}} = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}\right) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{R}_{cm} \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_i + \vec{R}_{cm} \times \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{\mathrm{L}}_{\mathrm{cm}} + \vec{R}_{cm} \times \vec{P},$$

όπου $\vec{r}_i{}' \equiv \vec{r}_i - \vec{R}_{cm}$ είναι τα διανύσματα θέσης ως προς το κέντρο μάζας,

$\vec{\mathrm{L}}_{\mathrm{cm}}$ η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας

$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ η συνολική ορμή του συστήματος

και $\vec{R}_{cm} \times \vec{P}$ η στροφορμή λόγω της κίνησης του κέντρου μάζας.

Η $\vec{\mathrm{L}}_{\mathrm{cm}}$ ονομάζεται και ιδιοστροφορμή (ή spin) του συστήματος.

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Έχουμε δείξει ότι $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$, όπου $\vec{N} = \vec{N}_{\varepsilon\sigma} + \vec{N}_{\varepsilon\xi}$.

$\vec{N}_{\varepsilon\sigma}$ είναι η συνολική ροπή λόγω **εσωτερικών** δυνάμεων,

$\vec{N}_{\varepsilon\xi}$ είναι η συνολική ροπή λόγω **εξωτερικών** δυνάμεων

Για κεντρικές δυνάμεις είναι $\vec{N}_{\varepsilon\sigma} = 0$ και άρα $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{\varepsilon\xi}$.

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας είναι $\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \vec{P} = \vec{L}_{cm}$

και βρίσκουμε $\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{N}_{\varepsilon\xi}$.

Γενικά, στην περίπτωση σύνθετης κίνησης χρειάζεται συνήθως να κάνουμε ανάλυση κίνησης. Αυτό το κάνουμε με το να περιγράψουμε από τη μία τη συνολική κίνηση συστήματος σωμάτων, όπως αυτή αντιπροσωπεύεται από την κίνηση του κέντρου μάζας. Από την άλλη, η κίνηση περιλαμβάνει και την κίνηση των συνιστωσών του συστήματος στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.