ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ

Ελατήριο ασκεί σε μάζα Μ δύναμη $\vec{F} = -Cx\hat{x}$, (1) όπου C η σταθερά του ελατηρίου. Η (1) είναι ο λεγόμενος νόμος του Hooke.

Για να μετακινήσουμε την μάζα Μ μακρυά από την θέση ισορροπίας $x = 0$ πρέπει να ασκήσουμε δύναμη $\vec{\mathrm{F}}_{\varepsilon\mu\varepsilon\acute{\iota}\varsigma} = -\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Hooke}}$.

και να παράγουμε έργο $\mathrm{W}_{0\to x} = \int_0^{x} \mathrm{C}x'\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}\mathrm{C}x^2$.

Επομένως, η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο είναι $\mathrm{U}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{C}x^2$.

Έαν $x_{\max}$ είναι η μέγιστη μετατόπιση από την θέση ισορροπίας $x = 0$,

τότε η αρχή διατήρησης της ενέργειας δίνει : $\frac{1}{2}\mathrm{C}x_{\max}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{M}v_0^2$,

όπου v_0 είναι η ταχύτητα του σώματος στην θέση ισορροπίας.

ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ – ΜΑΖΑ ΣΕ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

Η εξίσωση κίνησης ενός αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Cx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{C}{M}x \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \;\; (1), \text{όπου } \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}}.$$

Η γενική λύση της (1) έχει την μορφή $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ (2),

με ω_0 να είναι η κυκλική συχνότητα.

A: πλάτος

φ: (αρχική) φάση

Η διατήρηση της ενέργειας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο επίλυσης της κίνησης:

$$\frac{1}{2}\mathrm{M}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Cx^2 = E \;\; (2).$$

Έστω ότι για $\dfrac{dx}{dt} = 0$ είναι $x = A$.

Τότε η (2) δίνει $\mathrm{E} = \mathrm{C\,A}^2/2$ και

$$\frac{dx}{dt} = \pm\omega_0\sqrt{\mathrm{A}^2 - x^2} \Rightarrow \pm\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega_0 dt \;\; (3).$$

Κρατώντας το + βρίσκουμε ολοκληρώνοντας την (3):

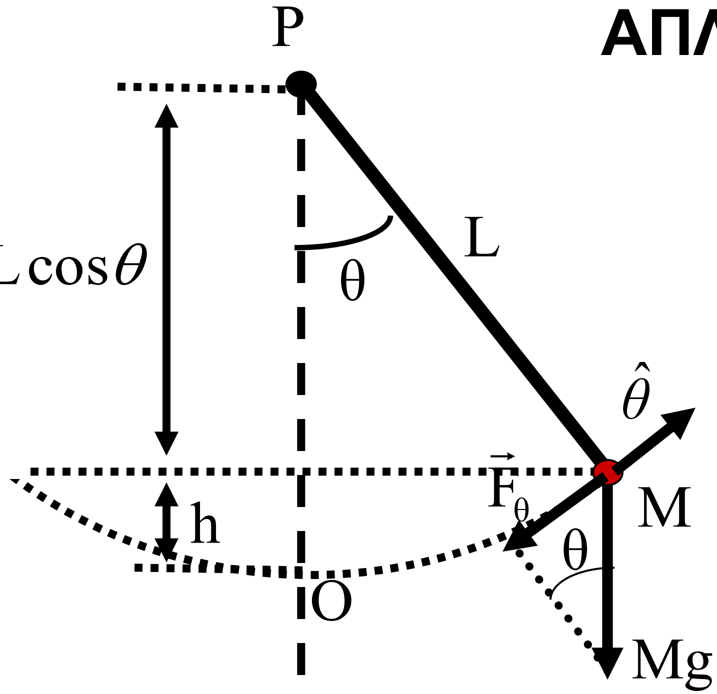
$$\sin^{-1}\frac{x}{A} = \omega_0 t + \varphi \;(4), \text{ όπου } \varphi \text{ μια σταθερά ολοκλήρωσης.}$$

Από την (4) βρίσκουμε την λύση (1).

Αν κρατήσουμε το – βρίσκουμε την ίδια μορφή γενικής λύσης

$$x(t) = \mathrm{A}\sin(-\omega_0 t + \varphi) = \mathrm{A}\sin(\omega_0 t + \varphi') \text{ με } \varphi' = \pi + \varphi$$

ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ



Αν s είναι το μήκος της κυκλικής διαδρομής που ακολουθεί η μάζα M τότε ισχύει

$$s = L\theta \Rightarrow v = \dot{s} = L\dot{\theta} \Rightarrow a = L\ddot{\theta} \quad (1)$$

Η δύναμη επαναφοράς είναι η $F_\theta = Mg\sin\theta$.

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$ML\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta \quad (2).$$

Για αρνητικά θ το $\hat{\theta}$ κοιτάει πάλι προς τα δεξιά,

αλλά $F_\theta = +Mg\sin|\theta| = -Mg\sin\theta$ και καταλήγουμε πάλι στην εξίσωση (2).

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor για το $\sin\theta$ ($\sin\theta = \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \ldots$)

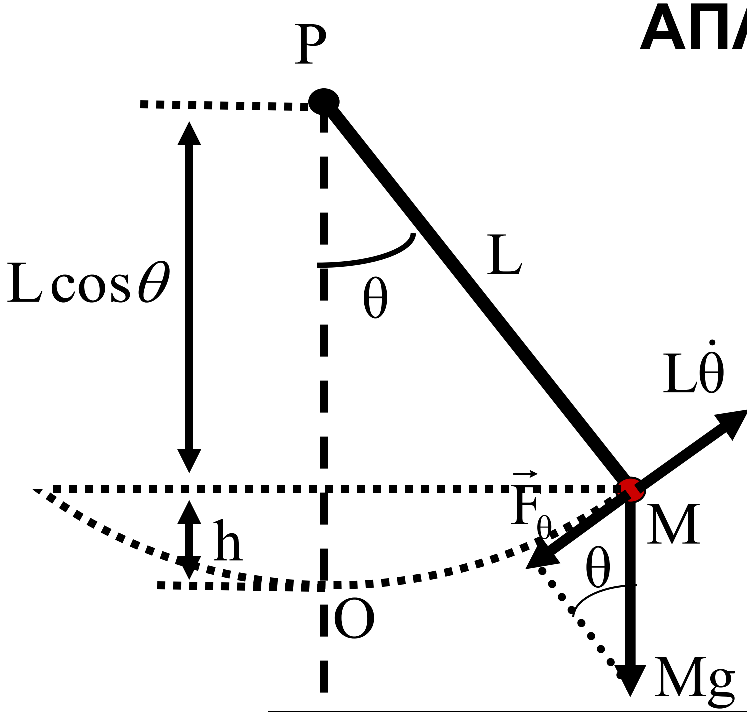
βρίσκουμε για μικρές γωνίες την εξίσωση $\ddot{\theta} = -g\theta/L \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (3)$.

Η εξίσωση (3) είναι ίδια με αυτήν του αρμονικού ταλαντωτή.

Η γενική λύση της (3) είναι η $\theta = \theta_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$ (4), με $\omega_0 = \sqrt{g/L}$.

Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{\sqrt{g/L}}{2\pi}$ και η περίοδος $T_0 = 1/f_0$.

ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ



Η συχνότητα f_0 είναι ανεξάρτητη του πλάτους της ταλάντωσης (για μικρές γωνίες θ).

Για πεπερασμένες γωνίες η περίοδος Τ μεταβάλλεται κατά μικρό ποσοστό :

Πλάτος	T/T_0
0^o	1,0000
10^o	1,0019
20^o	1,0077
30^o	1,0174

Θα αναλύσουμε τώρα την κίνηση του εκκρεμούς χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας :

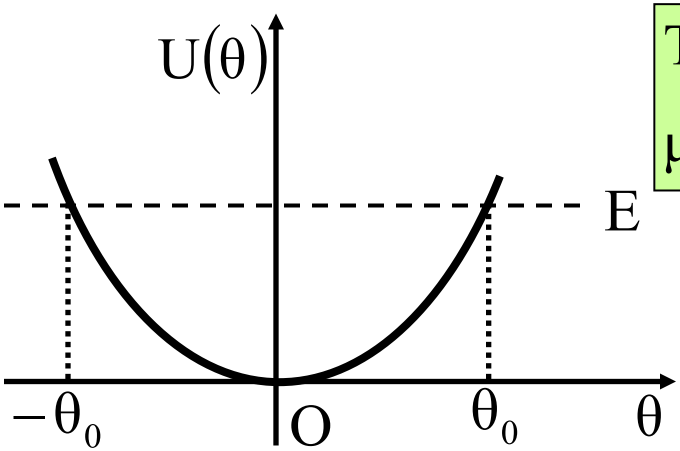
Απόκλιση σε γωνία θ αυξάνει την δυναμική ενέργεια λόγω της βαρύτητας της Γης σε $U(\theta) = Mgh = MgL(1-\cos\theta)$.

Αν Ε είναι η ολική ενέργεια τότε $E = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + MgL(1-\cos\theta)$ (4).

Για μικρά θ είναι $\cos\theta \approx 1-\theta^2/2$ και η (4) δίνει $E = ML^2\dot{\theta}^2/2 + MgL\theta^2/2$ (5).

ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

Για μικρά θ είναι $\cos\theta \approx 1-\theta^2/2$ και η (4) δίνει $E = ML^2\dot{\theta}^2/2 + MgL\theta^2/2$ (5).



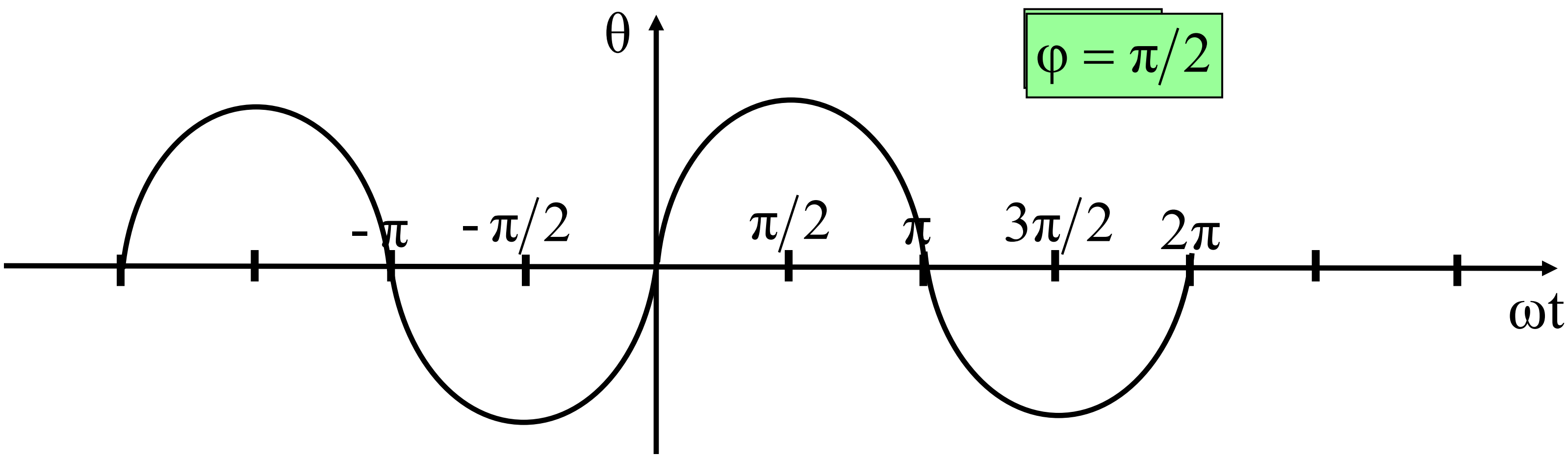
Τα σημεία ανάκαμψης θ_0 προσδιορζονται από τον μηδενισμό της κινητικής ενέργειας : $E = MgL\theta_0^2/2$.

Αντικαθιστώντας στην (5) βρίσκουμε :

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2E - MgL\theta^2}{ML^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\theta_0^2-\theta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}dt \Rightarrow \sin^{-1}\frac{\theta}{\theta_0} = \omega_0 t + \varphi \Rightarrow \theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (6).$$

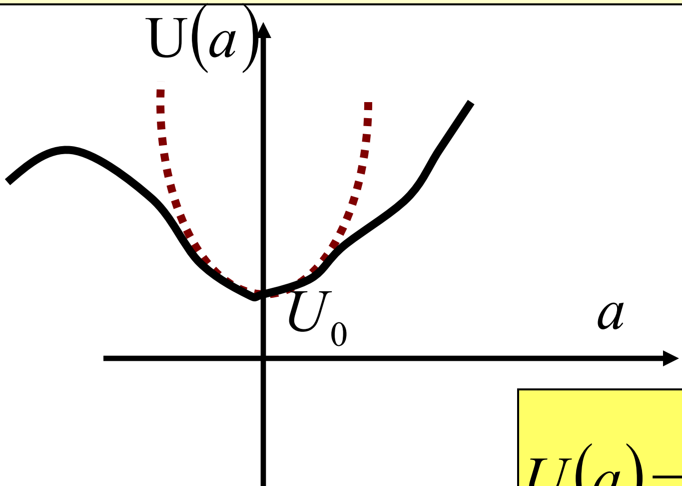
$\varphi = \pi/2$



ΚΙΝΗΣΗ ΚΟΝΤΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Έστω $U(a)$ η δυναμική ενέργεια ενός φυσικού συστήματος συναρτήσει κάποιου βαθμού ελευθερίας a (π.χ., απόσταση, γωνία, φορτίο, κλπ).

Έστω ακόμη ότι για $a=0$ το σύστημα είναι σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας.



Είναι τότε $\left(\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}a}\right)_{a=0}=0$ και $\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{d}a^2}\right)_{a=0}=k>0.$

Το ανάπτυγμα Taylor της $\mathrm{U}(a)$ γύρω από το 0 δίνει τότε :

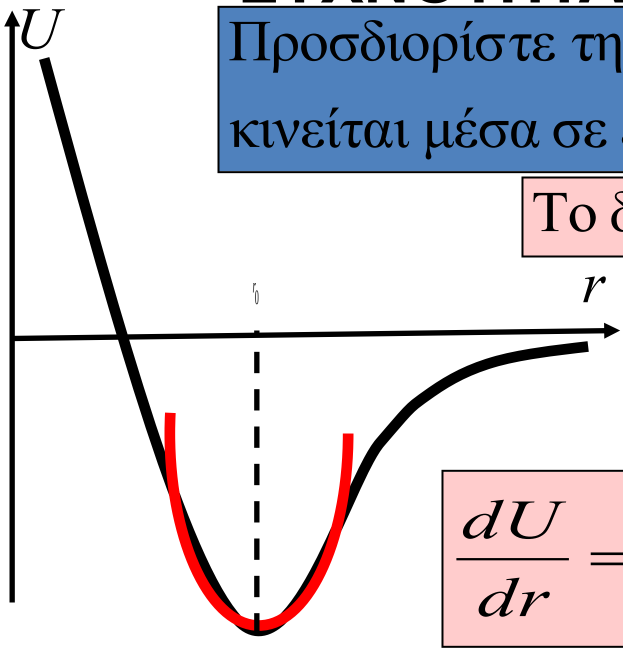
$$U(a)=\mathrm{U}(0)+a\left(\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}a}\right)_{a=0}+\frac{a^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{d}a^2}\right)_{a=0}+\ldots\approx U(0)+\frac{ka^2}{2}.$$

Η (γενικευμένη) δύναμη $\mathrm{F}(a)$ που σχετίζεται με την $\mathrm{U}(a)$ είναι $\mathrm{F}(a)=-\frac{dU}{da}$

και ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει $M\frac{d^2a}{dt^2}=-ka\quad(1).$

Η (1) είναι η εξίσωση κίνησης αρμονικού ταλαντωτή.

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ LENNARD-JONES



Προσδιορίστε την συχνότητα ταλάντωσης ατόμου μάζας m που κινείται μέσα σε ένα δυναμικό τύπου Lennard - Jones.

Το δυναμικό Lennard - Jones έχει την μορφή

$$U = -A\left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}\right] \quad (1).$$

$$\frac{dU}{dr} = 0 \Rightarrow A\left(12\frac{r_0^6}{r^7} - 12\frac{r_0^{12}}{r^{13}}\right) = 0 \Rightarrow r = r_0. \quad (1).$$

Κοντά στο σημείο ισορροπίας r_0 είναι

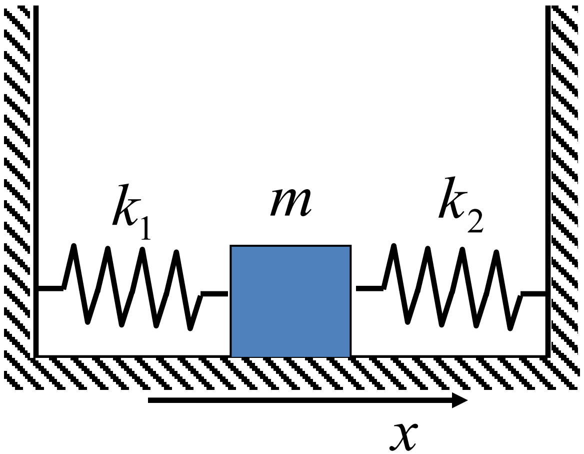
$$U \approx U(r_0) + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0}$$

Είναι $\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} = -A\left.\left(84\frac{r_0^6}{r^8} - 156\frac{r_0^{12}}{r^{14}}\right)\right|_{r=r_0} = 72\frac{A}{r_0^2}.$

Από τη σχέση $U = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$ προκύπτει ότι $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{72\,A/m}}{r_0}.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Προσδιορίστε την συχνότητα ταλάντωσης για την μάζα m του σχήματος. Οι σταθερές των ελατηρίων είναι k_1 και k_2.



Έστω ότι η μάζα m συμπιέζει το ελατήριο k_2 κατά Δx.

Συγχρόνως το ελατήριο k_1 τεντώνει κατά Δx.

Η δύναμη που δέχεται η μάζα m είναι το άθροισμα $F = F_1 + F_2 = -k_1\Delta x - k_2\Delta x = -(k_1 + k_2)\Delta x$.

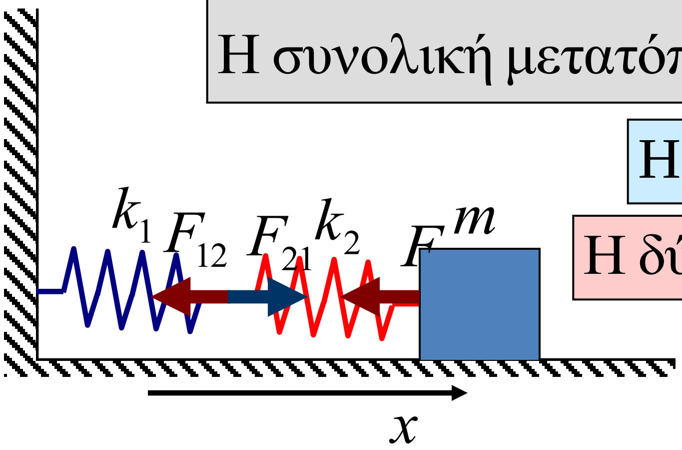
Επομένως, το σύστημα των δύο ελατηρίων του σχήματος είναι ισοδύναμο με ένα ελατήριο σταθεράς $k = k_1 + k_2$.

Η κυκλική συχνότητα της κίνησης είναι $\omega = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Προσδιορίστε την συχνότητα ταλάντωσης για την μάζα m του σχήματος. Οι σταθερές των ελατηρίων είναι k_1 και k_2.

Έστω ότι το ελατήριο k_1 επιμηκύνεται κατά Δx_1 και το k_2 κατά Δx_2. Η συνολική μετατόπιση για την m είναι $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$.



Η δύναμη που ασκεί το k_2 στο k_1 είναι $F_{21} = k_2 \Delta x_2$.

Η δύναμη που ασκεί το k_1 στο k_2 είναι $F_{12} = -k_1 \Delta x_1$.

Από τον 3ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$F_{21} = -F_{12} \Rightarrow \Delta x_1 / \Delta x_2 = k_2 / k_1$ (1).

Έστω ότι η δύναμη F που δέχεται η m μπορεί να γραφτεί ως $F = -k\Delta x$. Τότε:

$$F = -F_{21} \Rightarrow -k\Delta x = -k_2 \Delta x_2 \Rightarrow k = k_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta x} = k_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = k_2 \frac{1}{1 + \Delta x_1 / \Delta x_2} \Rightarrow$$

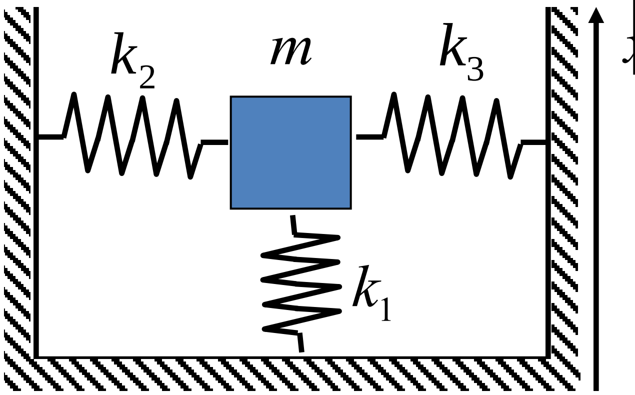
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} k = k_2 \frac{1}{1 + k_2 / k_1} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (2).$$

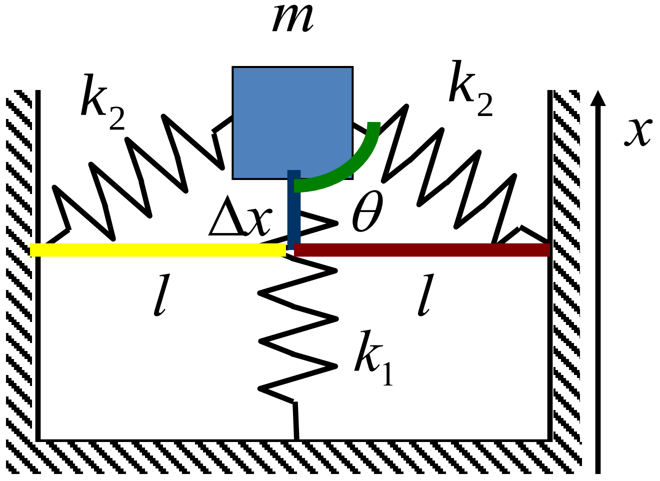
Άρα η συχνότητα ταλάντωσης της μάζας m

είναι $\omega = \sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) m}}$ (3).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Το σύστημα ελατηρίων του σχήματος αρχικά ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο xy με τα ελατήρια να έχουν τα φυσικά τους μήκη $l_1 = l_2 = l_3 = l$, ενώ $k_3 = k_2 \neq k_1$. Μετατοπίζουμε τη μάζα m κατά Δx κατά την κατεύθυνση x. Δείξτε ότι η κίνηση που θα ακολουθήσει είναι κατά προσέγγιση αρμονική ταλάντωση για μικρά Δx.





Μετατόπιση Δx δημιουργεί 3 δυνάμεις επαναφοράς :

$$F_1 = -k_1 \Delta x,\ F_2 = -k_2 \Delta x_2,\ F_3 = -k_2 \Delta x_3,$$

όπου $\Delta x_2 = \Delta x_3$ και $(\Delta x)^2 + l^2 = (l + \Delta x_2)^2 \Rightarrow$

$$\Delta x_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + l^2} - l = l\left(\sqrt{1 + (\Delta x/l)^2} - 1\right) \Rightarrow$$

(είναι $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 + \ldots$)

$$\Rightarrow \Delta x_2 \approx l\left[1 + (\Delta x/l)^2/2 - 1\right] = (\Delta x)^2/2l.$$

Η προβολή κατά τον άξονα x δίνει δύναμη

$$2F_{2x} = 2\cos\theta\, k_2 (\Delta x)^2/2l \approx k_2 (\Delta x)^3/l^2.$$

Άρα, για μικρές μετατοπίσεις η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση που καθορίζεται από το k_1.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Η γενική μορφή γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Δ.Ε.) 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι $A\frac{d^2F}{dx^2}+B\frac{dF}{dx}+CF(x)=D(x)\ (1)$.

Αν $D(x)=0$ τότε η Δ.Ε. ονομάζεται ομογενής (διαφορετικά καλείται μη-ομογενής).

Έστω $f(x)$ η γενική λύση (με 2 σταθερές ολοκλήρωσης) της $Af''+Bf'+Cf=0\ (2)$.

Έστω ακόμη $g(x)$ μία λύση της μη-ομογενούς Δ.Ε. (1).

Τότε η $f(x)+g(x)$ είναι η **γενική** λύση της (1), ενώ η $g(x)$ καλείται **μερική** λύση.

Επομένως, το 1ο βήμα της επίλυσης της (1) είναι η εύρεση της $f(x)$.

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $f(x)=e^{\lambda x}$. Είναι $f'=\lambda e^{\lambda x}$ και $f''=\lambda^2 e^{\lambda x}$.

Εισάγοντας την $f(x)=e^{\lambda x}$ στη (2) παίρνουμε

την **χαρακτηριστική εξίσωση** $A\lambda^2+B\lambda+C=0\ (3)$.

Η αλγεβρική εξίσωση (3) έχει δύο λύσεις $\lambda_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$.

Οι λύσεις $\lambda_{1,2}$ μπορεί να είναι και μιγαδικοί αριθμοί.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Γραμμική Δ.Ε.2ης με σταθερούς συντελεστές $A\frac{d^2F}{dx^2}+B\frac{dF}{dx}+CF(x)=D(x)\ (1).$

Έστω $f(x)$ η γενική λύση της γραμμικής ομογενούς Δ.Ε. $Af''+Bf'+Cf=0\ (2).$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $f(x)=e^{\lambda x}$. Είναι $f'=\lambda e^{\lambda x}$ και $f''=\lambda^2 e^{\lambda x}$.

Η **χαρακτηριστική** εξίσωση $A\lambda^2+B\lambda+C=0$ έχει λύσεις $\lambda_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

Αν $A,B,C\in\Re$ και $B^2-4AC\geq 0$ τότε $\lambda_{1,2}\in\Re$, ενώ εάν ισχύει

$B^2-4AC<0$ τότε οι $\lambda_{1,2}=\frac{-B\pm i\sqrt{\left|B^2-4AC\right|}}{2A}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί

και $\lambda_1=\bar{\lambda}_2$, όπου $\bar{z}=x-iy$ είναι ο συζυγής του $z=x+iy\ (x,y\in\Re)$.

Επομένως δύο διαφορετικές (τις καλούμε γραμμικώς ανεξάρτητες) λύσεις είναι οι $f_1(x)=e^{\lambda_1 x}$ και $f_2(x)=e^{\lambda_2 x}$. Επειδή η Δ.Ε. (2) είναι γραμμική

η γενική λύση της (2) είναι η συνάρτηση $f(x)=af_1(x)+bf_2(x)$,
όπου τα a,b είναι σταθερές που προσδιορίζονται από αρχικές συνθήκες.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Γραμμική Δ.Ε.2ης με σταθερούς συντελεστές $A\frac{d^2F}{dx^2}+B\frac{dF}{dx}+CF(x)=D(x)\ (1).$

Έστω $g(x)$ μία **μερική** (ή αλλιώς, **ειδική**) λύση της (1)

και $f(x)$ η **γενική** λύση της γραμμικής ομογενούς Δ.Ε. $Af''+Bf'+Cf=0\ (2).$

Η εξίσωση $A\lambda^2+B\lambda+C=0\,(3)$ έχει λύσεις $\lambda_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$

Η **γενική** λύση της (1) είναι η $F(x)=f(x)+g(x)=ae^{\lambda_1 x}+be^{\lambda_2 x}+g(x).$

Τι συμβαίνει όμως όταν $B^2=4AC$ και $\lambda_1=\lambda_2=-B/2A$;

Τότε γενική λύση της (2) είναι η $f(x)=af_1(x)+bf_2(x)$, με $f_1(x)=e^{\lambda_1 x}$, $f_2(x)=xe^{\lambda_1 x}.$

Είναι $f_2'(x)=e^{\lambda_1 x}(1+\lambda_1 x)$, $f_2''(x)=e^{\lambda_1 x}\lambda_1(2+\lambda_1 x)$, και η (2) δίνει

$$\left[A\lambda_1(2+\lambda_1 x)+B(1+\lambda_1 x)+Cx\right]e^{\lambda_1 x}=\left[(B+2A\lambda_1)+\left(\lambda_1^2A+\lambda_1B+C\right)x\right]e^{\lambda_1 x}=0$$

αφού σε αυτήν την περίπτωση είναι $\lambda_1=-B/2A.$

Η γενική λύση της (1) και στην περίπτωση $\lambda_1=\lambda_2$ είναι η

$$F(x)=af_1(x)+bf_2(x)+g(x)=ae^{\lambda_1 x}+bxe^{\lambda_1 x}+g(x).$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Η γενική μορφή διαφορικής εξίσωσης (Δ.Ε.) 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

είναι $A\frac{d^2F}{dx^2}+B\frac{dF}{dx}+CF(x)=D(x)$ (1).

Θέλουμε να λύσουμε την Δ.Ε. $\frac{d^2 f}{dx^2}+2\frac{df}{dx}-3f=x$ (4).

Μία μερική λύση της (4) είναι η $g(x)=\alpha x+\beta$. Με αντικατάσταση στην (4)

βρίσκουμε $2\alpha-3\alpha x-3\beta=x \Leftrightarrow (1+3\alpha)x-2\alpha+3\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=-1/3,\ \beta=-2/9$.

Για τη λύση της ομογενούς Δ.Ε. $\frac{d^2 f}{dx^2}+2\frac{df}{dx}-3f=0$ (5) αναζητούμε $f_1(x)=e^{\lambda x}$.

Εισάγοντας την $f_1(x)$ στη (2) παίρνουμε την εξίσωση $\lambda^2+2\lambda-3=0$ (6).

Η αλγεβρική εξίσωση έχει δύο λύσεις $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-3$.

Η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. $f''+2f'-3=0$ είναι η $f_1(x)=ae^{x}+be^{-3x}$

Τελικά η γενική λύση της (4) είναι η $f(x)=ae^{x}+be^{-3x}-\frac{x}{3}-\frac{2}{9}$.

Γραμμική Δ.Ε.$2^{ης}$ με σταθερούς συντελεστές $A\dfrac{d^2F}{dx^2}+B\dfrac{dF}{dx}+CF(x)=D(x)\ (1).$

Η **γενική** λύση της (1) είναι η $F(x)=f(x)+g(x)=ae^{\lambda_1 x}+be^{\lambda_2 x}+g(x).$

Τα φυσικά μεγέθη περιγράφονται από πραγματικές συναρτήσεις και ικανοποιούν εξισώσεις με πραγματικούς συντελεστές.

Πως το παραπάνω συνδυάζεται με το ότι οι $\lambda_{1,2}$ είναι εν γένει μιγαδικοί;

Για $A,B,C\in\Re$, $\lambda_2=\overline{\lambda_1}=\alpha-i\beta$ και η γενική λύση της ομογενούς γράφεται

για $\mathrm{Re}[\lambda_1]=-B/2A=\alpha, \mathrm{Im}[\lambda_1]=\beta$ $f(x)=ae^{\alpha x}e^{i\beta x}+be^{\alpha x}e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}\left(ae^{i\beta x}+be^{-i\beta x}\right).$

Είναι $e^{\pm i\beta x}=\cos\beta x\pm i\sin\beta x$, άρα $F(x)=e^{\alpha x}\left[(a+b)\cos\beta x+i(a-b)\sin\beta x\right]$

Για $a=b=\dfrac{1}{2}$ ή $a=\bar{b}=-i$ οι $\varphi_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x, \varphi_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$ είναι λύσεις της $Af''+Bf+Cf=0$, και η γενική λύση είναι $\Phi(x)=e^{\alpha x}(\gamma\cos\beta x+\delta\sin\beta x)$,

που είναι πραγματική συνάρτηση εάν διαλέξουμε γ,δ πραγματικούς αριθμούς.

Για απλό αρμονικό ταλαντωτή είναι $\ddot{x}+\omega^2x=0$, άρα : $B=0=\alpha$ και οι λύσεις είναι (για $x\equiv t, \beta\equiv\omega$) οι συναρτήσεις $\cos\omega t$, $\sin\omega t$, ή γενικά $x_0\sin(\omega t+\varphi)$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ης ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι $A\dfrac{d^2 f}{dx^2}+B\dfrac{df}{dx}+Cf(x)=D(x)\ (1).$

Αν $D(x)=0$ τότε η Δ.Ε. ονομάζεται ομογενής (διαφορετικά καλείται μη-ομογενής).

Έστω $f(x)$ η γενική λύση (με 2 σταθερές ολοκλήρωσης) της $Af''+Bf'+Cf=0\ (2).$

Εισάγοντας την $f(x)=e^{\lambda x}$ στη (2) παίρνουμε την εξίσωση $A\lambda^2+B\lambda+C=0\ (3).$

Η (3) έχει δύο λύσεις $\lambda_{1,2}=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ που μπορεί να είναι μιγαδικοί.

Αν $A,B,C,\lambda_1,\lambda_2$ είναι πραγματικοί τότε $F(x)=ae^{\lambda_1 x}+be^{\lambda_2 x}+g(x).$

Αν A,B,C είναι πραγματικοί και $\lambda_{1,2}$ μιγαδικοί με $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\overline{\lambda_1}$, όπου

$$\alpha=\frac{-B}{2A},\beta=\frac{\sqrt{\left|B^2-4AC\right|}}{2A},\ \text{τότε}\ f(x)=e^{\alpha x}\left(a\cos\beta x+b\sin\beta x\right)=\gamma e^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi).$$

$(\gamma\sin\varphi=a,\gamma\cos\varphi=b)$

Για τον αρμονικό ταλαντωτή είναι: $A=1,B=0,C=\omega^2.$

Άρα, $\alpha=0,\beta=\omega$ και τα $\gamma=x_0,\varphi$ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Έστω ότι μάζα M είναι δεμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς C και δέχεται αντίσταση $-bv$ ανάλογη της ταχύτητας v.

Τότε από το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $M\ddot{x} = -Cx - bv = -Cx - b\dot{x} \Rightarrow$

$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = 0 \;\; (1)$ $\Rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \;\; (2)$ όπου $\frac{1}{\tau} = \frac{b}{M} \;\; (3), \;\; \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}} \;\; (4).$

Υπάρχει αντιστοιχία με την ομογενή Δ.Ε. $2^{\eta\varsigma}$ τάξης $Af'' + Bf' + Cf = 0 \; (2)$:

$x \leftrightarrow t, A = 1, B = 1/\tau, C = \omega_0^2.$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 + \lambda/\tau + \omega_0^2 = 0$ έχει λύσεις

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1/\tau \pm \sqrt{(1/\tau)^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} = \alpha \pm i\beta, \text{ αν } \omega_0^2 - (1/2\tau)^2 \geq 0.$$

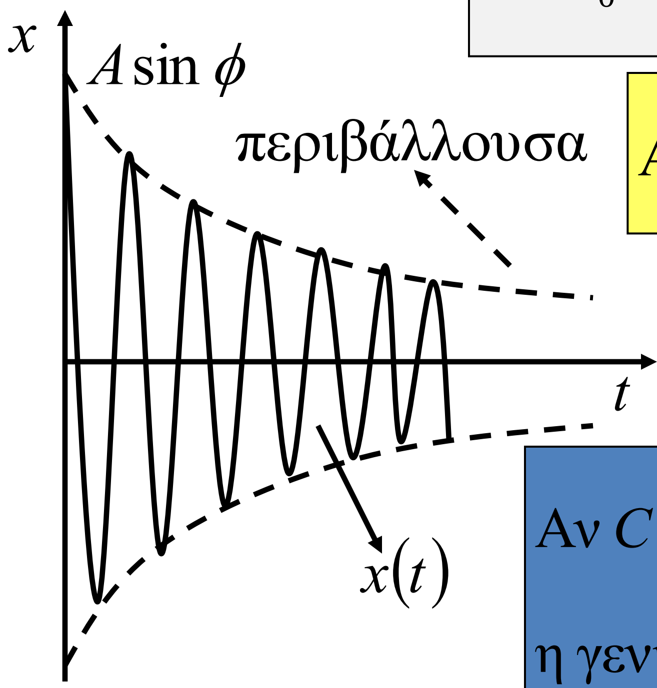
Επομένως η γενική λύση $f(x) = \gamma e^{\alpha x}\sin(\beta x + \varphi)$ για την περίπτωση με αρνητική διακρίνουσα $B^2 - 4AC = (1/\tau)^2 - 4\omega_0^2 < 0$ γράφεται τώρα

για $\alpha = -1/2\tau, \beta \equiv \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (1/2\tau)^2}$

$$x(t) = x_0 e^{-t/2\tau}\sin(\omega t + \varphi)$$

ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

$$x = x_0 e^{-t/2\tau} \sin(\omega t + \varphi) \ (5) \text{ με } \omega = \sqrt{\frac{C}{M} - \frac{b^2}{4M^2}}.$$



Αν $C = \dfrac{b^2}{4M} \Rightarrow \omega = 0$ η γενική λύση έχει την μορφή:

$$x = A' e^{-bt/2M} + Bte^{-bt/2M} \quad (9)$$

Η (9) είναι η λύση για κρίσιμη απόσβεση.

Αν $C < \dfrac{b^2}{4M}$ τότε έχουμε περίπτωση υπεραπόσβεσης και η γενική λύση είναι $x = e^{-bt/2M}\left[A\exp(\lambda t) + B\exp(-\lambda t)\right]$

ή αλλιώς $x = Ae^{-c_1 t} + Be^{-c_2 t}$

όπου $\lambda = \sqrt{b^2/4M^2 - C/M}$ και $c_1 = b/2M - \lambda$, $c_2 = b/2M + \lambda$.

ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Έστω ότι μάζα Μ είναι δεμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς C και δέχεται αντίσταση $-bv$ ανάλογη της ταχύτητας v.

Τότε από το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $M\ddot{x} = -Cx - bv = -Cx - b\dot{x} \Rightarrow$

$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = 0 \;\; (1)$ $\Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \;\; (2)$ όπου $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{b}{M} \;\; (3), \;\; \omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{M}} \;\; (4).$

Υπάρχει αντιστοιχία με την ομογενή Δ.Ε. $2^{\eta\varsigma}$ τάξης $Af'' + Bf' + Cf = 0 \; (2)$.

$x \leftrightarrow t, A = 1, B = 1/\tau, C = \omega_0^2.$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 + \lambda/\tau + \omega_0^2 = 0$ έχει λύσεις

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1/\tau \pm \sqrt{(1/\tau)^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -1/2\tau \pm i\sqrt{\omega_0^2 - (1/2\tau)^2}, \text{ αν } \omega_0^2 - (1/2\tau)^2 \geq 0.$$

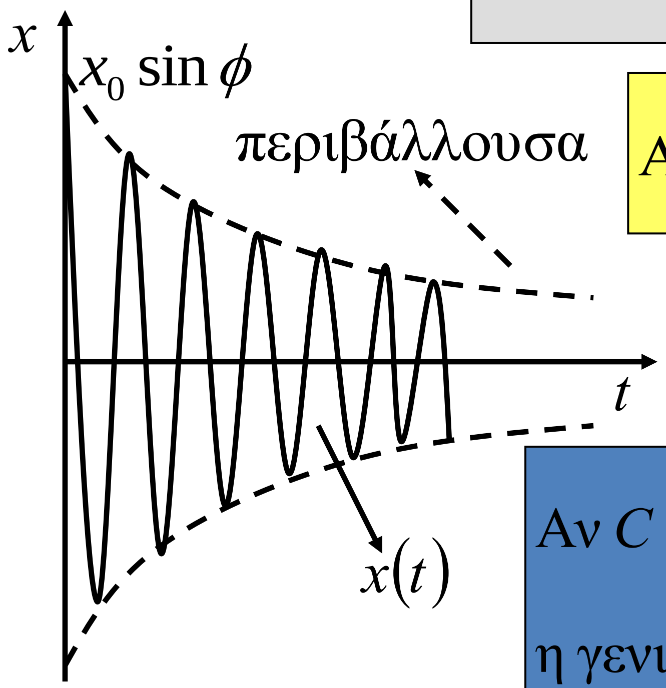
Επομένως η γενική λύση $f(x) = \gamma e^{\alpha x}\sin(\beta x + \varphi)$ γράφεται τώρα

για $\alpha = -1/2\tau, \beta \equiv \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (1/2\tau)^2}$

$$x(t) = x_0 e^{-t/2\tau}\sin(\omega t + \varphi)$$

ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

$$x = x_0 e^{-t/2\tau}\sin(\omega t + \varphi)\ (5)\ \text{με}\ \omega = \sqrt{\frac{C}{M} - \frac{b^2}{4M^2}}.$$



$$\text{Αν } C = \frac{b^2}{4M} \Rightarrow \omega = 0 \text{ η γενική λύση έχει την μορφή:}$$

$$x = A' e^{-bt/2M} + Bte^{-bt/2M}\quad (9)$$

Η (9) είναι η λύση για κρίσιμη απόσβεση.

Αν $C < \dfrac{b^2}{4M}$ τότε έχουμε περίπτωση υπεραπόσβεσης και η γενική λύση είναι $x = e^{-bt/2M}\left[A\exp(\lambda t) + B\exp(-\lambda t)\right]$

ή αλλιώς $x = Ae^{-c_1 t} + Be^{-c_2 t}$

όπου $\lambda = \sqrt{b^2/4M^2 - C/M}$ και $c_1 = b/2M - \lambda$, $c_2 = b/2M + \lambda$.

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ

Σώμα μάζας M είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς C και δέχεται εξωτερική δύναμη F(t). Ας υποθέσουμε ότι $F(t) = F_0 \sin\omega t$. Η εξίσωση κίνησης είναι

$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = F_0 \sin\omega t$ (1), όπου b ο συντελεστής για την δύναμη αντίστασης

Για $\tau = M/b$, $\omega_0 = \sqrt{C/M}$, $a_0 = F_0/M$ η (1) παίρνει την μορφή

$\ddot{x} + \dot{x}/\tau + \omega_0^2 x = a_0 \sin\omega t$ (2).

Θα δοκιμάσουμε την λύση $x = x_0 \sin(\omega t + \phi)$ (3).

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) βρίσκουμε (μετά από κάποιες πράξεις)

$$\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\phi - \frac{\omega}{\tau}\sin\phi\right]\sin\omega t + \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\phi + \frac{\omega}{\tau}\cos\phi\right]\cos\omega t = \frac{a_0}{x_0}\sin\omega t$$

Άρα : $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\phi - \frac{\omega}{\tau}\sin\phi = \frac{a_0}{x_0}$ (4) και $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\phi + \frac{\omega}{\tau}\cos\phi = 0$ (5).

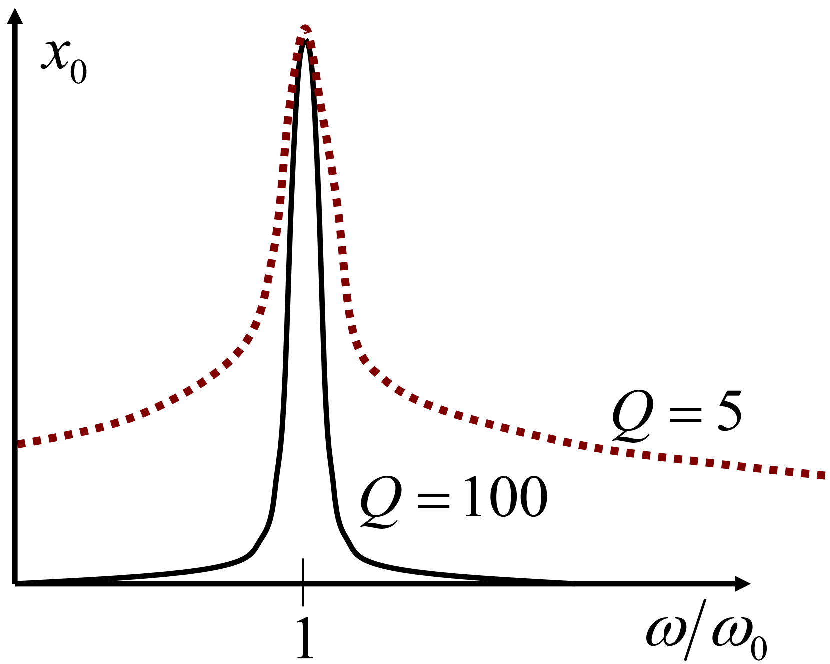
Από την (5) βρίσκουμε $\tan\phi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$ (6).

Η (6) μας δίνει τα $\sin\phi, \cos\phi$, και από την (4) παίρνουμε

$$x_0 = \frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad (7).$$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ

$$x = x_0 \sin(\omega t + \phi) \ (3), \ \tan\phi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \ (6), \ x_0 = a_0 \Big/ \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega/\tau\right)^2} \ (7).$$



Το μέγιστο του πλάτους προκύπτει για

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx \omega_0 \text{ για } Q = \omega_0 \tau >> 1.$$

Αν $\omega << \omega_0$ τότε από την (6) $\phi \approx 0$

(ταλάντωση σε φάση με την εξωτερική $\vec{\mathrm{F}}$).

Για $\omega = \omega_0$ (συντονισμός) είναι $x_0 = \dfrac{a_0 \tau}{\omega_0}$.

και $\cos\phi \approx 0, \sin\phi \approx 1$, δηλαδή $\varphi \approx -\pi/2$.

Αν $\omega >> \omega_0$ τότε $x_0 \approx \dfrac{a_0}{\omega^2} = \dfrac{F_0}{M\omega^2}$ και $\phi \approx -\pi$.