Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

1. Δίνεται η δύναμη

$$\boldsymbol{F} = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2) = (2xy + z^3)\hat{\boldsymbol{x}} + x^2\hat{\boldsymbol{y}} + 3xz^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

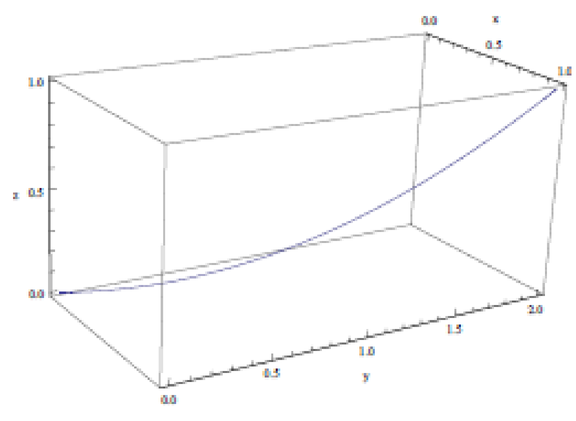
Να βρεθεί το έργο αυτής της δύναμης για την διαδρομή από $A(0,0,0)$ έως $B(1,2,1)$ που περιγράφεται παραμετρικά από

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = t^2$$

Το έργο δίνεται από τη σχέση

$$W = \int_{A(C)}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{A(C)}^{B} [F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz] =$$
$$= \int_{A}^{B} ((2xy + z^3)dx + x^2dy + 3xz^2dz)$$

όπου $d\boldsymbol{l} = (dx, dy, dz)$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που μας περιγράφουν την καμπύλη θα



Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

1. Δίνεται η δύναμη

$$\boldsymbol{F} = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2) = (2xy + z^3)\hat{\boldsymbol{x}} + x^2\hat{\boldsymbol{y}} + 3xz^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

Να βρεθεί το έργο αυτής της δύναμης για την διαδρομή από $A(0,0,0)$ έως $B(1,2,1)$ που περιγράφεται παραμετρικά από

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = t^2$$

έχουμε

$$dx = dt, \quad dy = 2dt, \quad dz = 2tdt$$

ενώ παρατηρούμε ότι τα σημεία μας A και B αντιστοιχούν στο $t=0$ και $t=1$. Αντικαθιστώντας τα x, y και z καθώς και dx, dy και dz με τα ίσα τους στη σχέση που δίνει το έργο, θα πάρουμε

$$W = \int_{t=0(C)}^{t=1} \left(2t2t + t^6)dt + t^2 2dt + 3tt^4 2tdt\right) = \int_{t=0(C)}^{t=1} \left(4t^2 + t^6 + 2t^2 + 6t^6\right) dt =$$

$$= \int_{t=0(C)}^{t=1} \left(6t^2 + 7t^6\right) dt = 2(1-0) + (1-0) = 3$$

2. Για την ίδια δύναμη, να βρεθεί το έργο ανάμεσα στα ίδια σημεία $A(0,0,0)$ και $B(1,2,1)$ αλλά στην διαδρομή που σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα $A(0,0,0) \to C(1,0,0) \to D(1,2,0) \to B(1,2,1)$.

Το συνολικό έργο είναι το άθροισμα των έργων σε κάθε μια από τις ευθύγραμμες διαδρομές

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_C^D \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_D^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

όπου η διαδρομή σε κάθε ολοκλήρωμα είναι αυτή που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα. Ας δούμε τη πρώτη διαδρομή. Αυτή περιγράφεται από τις

$$x : 0 \to 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \text{οπότε} \quad dy = 0, \quad dz = 0$$

και το στοιχειώδες έργο, για τη διαδρομή $A \to C$ γίνεται

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = F_1(x, y = 0, z = 0)\, dx + 0 + 0 = 0$$

2. Για την ίδια δύναμη, να βρεθεί το έργο ανάμεσα στα ίδια σημεία $A(0,0,0)$ και $B(1,2,1)$ αλλά στην διαδρομή που σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα $A(0,0,0) \rightarrow C(1,0,0) \rightarrow D(1,2,0) \rightarrow B(1,2,1)$.

Για τη δεύτερη διαδρομή έχουμε αντίστοιχα

$$x = 1, \quad y : 0 \rightarrow 2, \quad z = 0, \quad \text{οπότε} \quad dx = 0, \quad dz = 0$$

και το στοιχειώδες έργο, για τη διαδρομή $C \rightarrow D$ γίνεται

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 + F_2(x = 1, y, z = 0)\, dy + 0 = dy$$

Για τη τρίτη διαδρομή έχουμε

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z : 0 \rightarrow 1, \quad \text{οπότε} \quad dx = 0, \quad dy = 0$$

και το στοιχειώδες έργο, για τη διαδρομή $D \rightarrow B$ γίνεται

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 + 0 + F_3(x = 1, y = 2, z)\, dz = 3z^2\, dz = 3z^2\, dz$$

Οπότε, το συνολικό έργο γίνεται

$$W = 0 + \int_0^2 dy + \int_0^1 3z^2 dz = 2 + 1 = 3$$

3. Να δειχθεί ότι η δύναμη $\boldsymbol{F} = (ay, ax) = ay\hat{\boldsymbol{x}} + ax\hat{\boldsymbol{y}}$ είναι διατηρητική.

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι για ΚΑΘΕ διαδρομή μεταξύ δύο τυχαίων σημείων, το έργο είναι το ίδιο.
Παίρνουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ και την διαδρομή ανάμεσα στα δύο σημεία να περιγράφεται από την συνάρτηση $y = f(x)$. Το έργο είναι

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B (ay\,dx + ax\,dy) = \int_A^B (af(x)\,dx + ax\,df(x))$$

Ο δεύτερος όρος γίνεται

$$\int_A^B ax\,df(x) = axf(x)|_A^B - \int_A^B af(x)dx$$

Οπότε, το έργο γίνεται

$$W = axf(x)|_A^B = ax_2 f(x_2) - ax_1 f(x_1) = ax_2 y_2 - ax_1 y_1$$

μιας και η καμπύλη $f(x)$ περνά βέβαια από τα σημεία A και B και επομένως $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$. Επομένως το έργο, για τη συγκεκριμένη δύναμη, είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή και εξαρτάται μόνο από το αρχικό και το τελικό σημείο, δηλαδή η δύναμη είναι διατηρητική.

3. Δίνεται η δύναμη $\boldsymbol{F} = (2xyz, x^2 z, x^2 y + 3)$. Βρείτε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ως προς το σημείο (1,1,1).

ΛΥΣΗ

Ελέγχουμε αν η δύναμη είναι διατηρητική

$$\frac{dF_1}{dy} = 2xz = \frac{dF_2}{dx} \quad \checkmark$$
$$\frac{dF_1}{dz} = 2xy = \frac{dF_3}{dx} \quad \checkmark$$
$$\frac{dF_2}{dz} = x^2 = \frac{dF_3}{dy} \quad \checkmark$$

Προχωράμε στον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας από τον ορισμό

$$U_{/(1,1,1))}(x, y, z) = -\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Επιλέγω τη διαδρομή

$$(1,1,1) \to (x,1,1) \to (x,y,1) \to (x,y,z)$$

3. Δίνεται η δύναμη $\boldsymbol{F} = (2xyz, x^2z, x^2y+3)$. Βρείτε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ως προς το σημείο (1,1,1).

Σε κάθε υποδιαδρομή, έχουμε μεταβολή μόνο στο x, y και z αντίστοιχα. Επομένως

$$\begin{aligned} U_{/(1,1,1))}(x,y,z) &= -\int_{(1,1,1)}^{(x,1,1)} 2xyz\,dx - \int_{(x,1,1)}^{(x,y,1)} x^2z\,dy - \int_{(x,y,1)}^{(x,y,z)} (x^2y+3)dz = \\ &= -\left. x^2yz\right|_{(1,1,1)}^{(x,1,1)} - \left. x^2yz\right|_{(x,1,1)}^{(x,y,1)} - \left.(x^2yz+3z)\right|_{(x,y,1)}^{(x,y,z)} = \\ &= -(x^2-1)-(x^2y-x^2)-(x^2yz+3z-x^2y-3) = -x^2yz-3z+4 \end{aligned}$$

Έλεγχος

$$-\frac{dU}{dx} = 2xyz, \checkmark \qquad -\frac{dU}{dy} = x^2z, \checkmark \qquad -\frac{dU}{dz} = x^2y+3\checkmark$$

1. Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και είναι συνδεδεμένο στο αριστερό άκρο ένος οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k και φυσικού μήκους $99a$. Το δεξί άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στο σημείο $x_1 = 100a$. Το σώμα δέχεται και μια επιπλέον δύναμη $\boldsymbol{F}(x) = k(x-a)^2/a$ με a θετική σταθερά. (α) Ποιά είναι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ του σώματος στο διάστημα $(-\infty, 10a]$, αν $U(a) = 0$; (β) Να σχεδιασθεί πρόχειρα η $U(x)$ στο διάστημα $(-\infty, 10a]$ και να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του σώματος, καθώς και το είδος ισορροπίας στο καθένα. (γ) Αν το σώμα ξεκινήσει από τη θέση $x = 0$ με μηδενική αρχική ταχύτητα, υπολογίστε με πόση ταχύτητα θα περάσει από το σημείο του παραπάνω διαστήματος όπου η δυναμική του ενέργεια είναι πεπερασμένη και έχει τοπικό μέγιστο. (δ) Έστω ότι το σώμα αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα από την θέση $0,9a$. Δείξτε ότι η κίνηση που θα επακολουθήσει είναι κατά προσέγγιση αρμονική ταλάντωση και βρείτε την περίοδό της. **ΛΥΣΗ**

(β) Για να βρούμε σημεία ισορροπίας θα πρέπει να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $U(x)$

$$\frac{dU}{dx} = -F(x) = \frac{k}{a}(x-a)^2 - k(x-a) = 0 \Rightarrow (x-a)^2 - a(x-a) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0 \Rightarrow x = a \quad \text{και} \quad 2a$$

Για το είδος της ισορροπίας θα πρέπει να ελέγξουμε την δεύτερη παράγωγο της U ή την πρώτη παράγωγο της $-F$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{dF}{dx} = -\frac{2k}{a}(x-a) + k$$

και

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=a} = k > 0, \quad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=2a} = -k < 0$$

Επομένως στο σημείο $x = a$ έχουμε τοπικό ελάχιστο και στο $x = 2a$ έχουμε τοπικό μέγιστο της δυναμικής ενέργειας.

1. Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και είναι συνδεδεμένο στο αριστερό άκρο ένος οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k και φυσικού μήκους $99a$. Το δεξί άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στο σημείο $x_1 = 100a$. Το σώμα δέγεται και μια επιπλέον δύναμη $\boldsymbol{F}(x) = k(x-a)^2/a$ με a θετική σταθερά. (α) Ποιά είναι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ του σώματος στο διάστημα $(-\infty, 10a]$, αν $U(a) = 0$; (β) Να σχεδιασθεί πρόχειρα η $U(x)$ στο διάστημα $(-\infty, 10a]$ και να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του σώματος, καθώς και το είδος ισορροπίας στο καθένα. (γ) Αν το σώμα ξεκινήσει από τη θέση $x = 0$ με μηδενική αρχική ταχύτητα, υπολογίστε με πόση ταχύτητα θα περάσει από το σημείο του παραπάνω διαστήματος όπου η δυναμική του ενέργεια είναι πεπερασμένη και έχει τοπικό μέγιστο. (δ) Έστω ότι το σώμα αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα από την θέση $0,9a$. Δείξτε ότι η κίνηση που θα επακολουθήσει είναι κατά προσέγγιση αρμονική ταλάντωση και βρείτε την περίοδό της. **ΛΥΣΗ**