ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ-ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Δ.Ε.): ΧΩΡΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι: $\frac{dy}{dx} = H(x,y) \quad (1).$

Η μέγιστη παράγωγος που εμφανίζεται σε μία Δ.Ε προσδιορίζει την τάξη της.

Αν $H(x,y) = f(x)g(y)$ τότε η (1) καλείται Δ.Ε. *χωριζομένων μεταβλητών*.

Τότε από την (1) και τον ορισμό $dy \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)dx$ βρίσκουμε: $\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx \quad (2).$

Έστω $y(x) = Y(x)$. Τότε $\frac{Y'(x)}{g[Y(x)]} = f(x)$, ενώ $\int \frac{1}{g[Y(x)]}Y'(x)dx = \int \frac{1}{g(y)}dy.$

Επομένως, ολοκληρώνοντας βρίσκουμε από την (2): $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx \quad (3).$

Επομένως, αν γνωρίζουμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = G(y) + C_y \quad \text{και} \quad \int f(x)dx = F(x) + C_x$$

οι λύσεις της (1) προσδιορίζονται από την (αλγεβρική) σχέση $G(y) = F(x) + C.$

η οποία μπορεί να λυθεί για να βρεθεί η $y = G^{-1}[F(x) + C].$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: ΧΩΡΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

$\text{Παράδειγμα 1: Επιλύστε την διαφορική εξίσωση } \frac{dy}{dx} = y.$

$\text{ΛΥΣΗ: Είναι } \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln y = x + C \Rightarrow y = Ae^{x},$

$\text{όπου } C \text{ μία σταθερά ολοκλήρωσης και } A = e^{C}.$

$\text{Παράδειγμα 2: Επιλύστε την διαφορική εξίσωση } \frac{dy}{dx} = -yx.$

$\text{ΛΥΣΗ: Είναι } \frac{dy}{y} = -x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x dx \Rightarrow \ln y = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = Ae^{-\frac{x^2}{2}},$

$\text{Παράδειγμα 3: Βρείτε ποιο σχήμα ικανοποιεί την εξίσωση } x dx + y dy = 0.$

ΛΥΣΗ: Από την διαφορική εξίσωση βρίσκουμε με ολοκλήρωση

$$\int y dy = -\int x dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \quad (3),$$

$\text{όπου } C \text{ και } R = \sqrt{2C} \text{ είναι σταθερές. Η (3) είναι η εξίσωση κύκλου ακτίνας } R.$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: ΧΩΡΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Παράδειγμα 1: Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση $\left(1+e^{x}\right)yy'=e^{x}$ και βρείτε τη λύση που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(0)=\sqrt{2}$.

ΛΥΣΗ: Είναι $ydy=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}dx \Rightarrow \int ydy=\int \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}dx \overset{z=1+e^{x}}{\Rightarrow} \dfrac{y^{2}}{2}=\int \dfrac{1}{z}dz \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y^{2}}{2}=\ln\left(1+e^{x}\right)+C \overset{C=\ln A}{\Rightarrow} y^{2}=\ln\left[A^{2}\left(1+e^{x}\right)^{2}\right] \Rightarrow y=\pm\sqrt{\ln\left[A^{2}\left(1+e^{x}\right)^{2}\right]}$$

Αλλά $y(0)=\sqrt{2}$. Επομένως $1=\ln\left[\left(1+e^{0}\right)\right]+C \Rightarrow A=e/2$.

Παράδειγμα 2: Επιλύστε την εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^{2}y-y}{y+1}$ εάν $y(3)=1$.

ΛΥΣΗ: Είναι $\dfrac{(y+1)dy}{y}=\left(x^{2}-1\right)dx \Rightarrow \int\left(1+\dfrac{1}{y}\right)dy=\int\left(x^{2}-1\right)dx$

$$\Rightarrow y+\ln|y|=\frac{x^{3}}{3}-x+C.$$

Για $y(3)=1$ έχουμε $1+\ln 1=9-3+C \Rightarrow C=-5$.

1. Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σώματος με μάζα 100kg είναι $\boldsymbol{r} = 16t\hat{\boldsymbol{x}} + 25t^2\hat{\boldsymbol{y}} + 33\hat{\boldsymbol{z}}$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθούν α) η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος, β) η ορμή του και η δύναμη που ασκείται στο σώμα, γ) η στροφορμή του $\boldsymbol{L} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ και η ροπή της δύναμης $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, ως προς την αρχή των αξόνων.

Λύση

α) Η ταχύτητα

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 16\hat{\boldsymbol{x}} + 50t\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{σε } \mathrm{ms}^{-1}$$

και η επιτάχυνση

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 50\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{σε } \mathrm{ms}^{-2}$$

β) Η ορμή

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = 100\,(16\hat{\boldsymbol{x}} + 50t\hat{\boldsymbol{y}}) = 1600\hat{\boldsymbol{x}} + 5000t\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{σε } \mathrm{kg\,ms}^{-1}$$

η δύναμη

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = 100\,(50\hat{\boldsymbol{y}}) = 5000\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{σε } \mathrm{kg\,ms}^{-2}$$

γ) Η στροφορμή

$$\boldsymbol{L} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = 100 \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 16t & 25t^2 & 33 \\ 16 & 50t & 0 \end{vmatrix} = 100\left(-33 \cdot 50t\hat{\boldsymbol{x}} - (-33 \cdot 16)\hat{\boldsymbol{y}} + (16t \cdot 50t - 25t^2 \cdot 16)\hat{\boldsymbol{z}}\right)$$

$$= 100\left(-165t\hat{\boldsymbol{x}} + 528\hat{\boldsymbol{y}} + (800t - 400t^2)\hat{\boldsymbol{z}}\right) = -16500t\hat{\boldsymbol{x}} + 52800\hat{\boldsymbol{y}} + (80000t^{2} - 40000t^2)\hat{\boldsymbol{z}} \quad \text{σε } \mathrm{kg\,m^2s^{-1}}$$

και η ροπή

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 16t & 25t^2 & 33 \\ 0 & 5000 & 0 \end{vmatrix} = -33 \cdot 5000\hat{\boldsymbol{x}} + 16t \cdot 5000\hat{\boldsymbol{z}} = 165000\hat{\boldsymbol{x}} + 80000t\hat{\boldsymbol{z}} \quad \text{σε } \mathrm{kg\,m^2s^{-2}}$$

2. Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$, κινούνται με διανύσματα θέσης

$$\boldsymbol{r}_1 = (3t+2t^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (4+4t^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (5+2t)\hat{\boldsymbol{z}} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{r}_2 = (20-t-t^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (10+9t-2t^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (1+4t)\hat{\boldsymbol{z}}$$

αντίστοιχα (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). α) Δείξτε ότι τα σωματίδια θα συναντηθούν. β) Ποια δύναμη ασκείται σε κάθε σωματίδιο; γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι; δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση

α) Για να συναντηθούν τα σωματίδια θα πρέπει να υπάρχει χρονική στιγμή t_0 που θα ισχύει $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 \Rightarrow \begin{cases} 3t+2t^2 &= 20-t-t^2 \\ 4+4t^2 &= 10+9t-2t^2 \\ 5+2t &= 1+4t \end{cases}$$

Από την τρίτη εξίσωση έχομε $t_0 = 2$s. Εύκολα φαίνεται ότι αυτή η τιμή του t επαληθεύει και τις άλλες δυο εξισώσεις. Επομένως τα σωματίδια θα συναντηθούν και η θέση συνάντησης θα είναι

$$14\hat{\boldsymbol{x}} + 20\hat{\boldsymbol{y}} + 9\hat{\boldsymbol{z}}$$

β) Για την δύναμη βρίσκουμε πρώτα την ταχύτητα και την επιτάχυνση κάθε σωματιδίου

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} = (3+4t)\hat{\boldsymbol{x}} + 8t\hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{a}_1 = 4\hat{\boldsymbol{x}} + 8\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = (-1-2t)\hat{\boldsymbol{x}} + (9-4t)\hat{\boldsymbol{y}} + 4\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{a}_2 = -2\hat{\boldsymbol{x}} + -4\hat{\boldsymbol{y}}$$

και η δύναμη

$$\boldsymbol{F}_1 = m\boldsymbol{a}_1 = 4m\hat{\boldsymbol{x}} + 8m\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 2m\boldsymbol{a}_2 = -2\cdot 2m\hat{\boldsymbol{x}} + -4\cdot 2m\hat{\boldsymbol{y}} = -4m\hat{\boldsymbol{x}} - 8m\hat{\boldsymbol{y}}$$

2. Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$, κινούνται με διανύσματα θέσης

$$\boldsymbol{r}_1 = (3t+2t^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (4+4t^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (5+2t)\hat{\boldsymbol{z}} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{r}_2 = (20-t-t^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (10+9t-2t^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (1+4t)\hat{\boldsymbol{z}}$$

αντίστοιχα (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). α) Δείξτε ότι τα σωματίδια θα συναντηθούν. β) Ποια δύναμη ασκείται σε κάθε σωματίδιο; γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι; δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου.

γ) Παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$. Οπότε, η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται. Πράγματι, η συνολική ορμή είναι ίση με

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 &= m\boldsymbol{v}_1 + 2m\boldsymbol{v}_2 = m(3+4t)\hat{\boldsymbol{x}} + m8t\hat{\boldsymbol{y}} + 2m\hat{\boldsymbol{z}} + 2m(-1-2t)\hat{\boldsymbol{x}} + 2m(9-4t)\hat{\boldsymbol{y}} + 8m\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= m\hat{\boldsymbol{x}} + 18m\hat{\boldsymbol{y}} + 10m\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned}$$

σταθερή, ανεξάρτητη από το χρόνο, μιας και η συνολική δύναμη είναι μηδέν.
δ) Η συνολική μάζα του νέου σώματος θα είναι $3m$ με ορμή $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$. Οπότε, η ταχύτητά του θα είναι

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{3m}(m\hat{\boldsymbol{x}} + 18m\hat{\boldsymbol{y}} + 10m\hat{\boldsymbol{z}}) = \frac{1}{3}\hat{\boldsymbol{x}} + 6\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{10}{3}\hat{\boldsymbol{z}}$$

και η θέση του θα δίνεται από το ολοκλήρωμα, ως προς το χρόνο, της ταχύτητας

$$\boldsymbol{r}(t) = \int \left(\frac{1}{3}\hat{\boldsymbol{x}} + 6\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{10}{3}\hat{\boldsymbol{z}}\right) dt + \boldsymbol{r}_0 = \frac{1}{3}t\hat{\boldsymbol{x}} + 6t\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{10}{3}t\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{r}_0$$

Για $t = 2$ θα πρέπει $\boldsymbol{r} = 14\hat{\boldsymbol{x}} + 20\hat{\boldsymbol{y}} + 9\hat{\boldsymbol{z}}$, οπότε

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{40}{3}\hat{\boldsymbol{x}} - 8\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{17}{3}\hat{\boldsymbol{z}}$$

3. Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες του σώματος: $x = 3a\sin(\omega t)$, $y = 4a\sin(\omega t)$, $z = 5a\cos(\omega t)$, όπου t ο χρόνος και ω και a θετικές σταθερές. Αποδείξτε ότι η τροχιά είναι επίπεδη, δείχνοντας ότι σε τρεις διαφορετικές τυχαίες χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3, τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}$ είναι συνεπίπεδα. Συνθήκη: $\boldsymbol{r_1} \cdot \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{r_3} = 0$.

Λύση

Ας βρούμε πρώτα την παράσταση $\boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{r_3}$

$$\boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{r_3} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 3a\sin(\omega t_2) & 4a\sin(\omega t_2) & 5a\cos(\omega t_2) \\ 3a\sin(\omega t_3) & 4a\sin(\omega t_3) & 5a\cos(\omega t_3) \end{vmatrix} =$$

$$= a^2\left[20\left(\sin(\omega t_2)\cos(\omega t_3) - \cos(\omega t_2)\sin(\omega t_3)\right)\hat{\boldsymbol{x}} - 15\left(\sin(\omega t_2)\cos(\omega t_3) - \cos(\omega t_2)\sin(\omega t_3)\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right] =$$

$$= a^2\left[20\sin(\omega t_2 - \omega t_3)\hat{\boldsymbol{x}} - 15\sin(\omega t_2 - \omega t_3)\hat{\boldsymbol{y}}\right]$$

Και τώρα η παράσταση $\boldsymbol{r_1} \cdot \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{r_3}$

$$a\left[3\sin(\omega t_1)\hat{\boldsymbol{x}} + 4\sin(\omega t_1)\hat{\boldsymbol{y}} + 5\cos(\omega t_1)\hat{\boldsymbol{z}}\right] \cdot a^2\left[20\sin(\omega t_2 - \omega t_3)\hat{\boldsymbol{x}} - 15\sin(\omega t_2 - \omega t_3)\hat{\boldsymbol{y}}\right] =$$

$$= 60a^3\left[\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2 - \omega t_3) - \sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2 - \omega t_3)\right] = 0$$

1. Μοτοσικλετιστής εισέρχεται σε θημωνιά από σανό με ταχύτητα v_0. Η αντίσταση που συναντά από το σανό είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητάς του. Αν υποθέσουμε ότι μόλις μπει στο σανό η μηχανή του σβήνει βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου, ως συνάρτηση της θέσης και το χρόνο που θα κάνει για να βγει από το σανό, αν η θημωνιά έχει μήκος d (δεν θεωρούμε τριβή μεταξύ μοτοσυκλέτας και εδάφους).

Λύση

Θεωρούμε όλη την κίνηση στον (οριζόντιο) άξονα x. Στον κάθετο άξονα το βάρος της μοτοσυκλέτας και του ανθρώπου εξουδετερώνονται από την (κάθετη) αντίδραση του εδάφους (δεν έχουμε τριβή). Στον οριζόντιο x άξονα, η μόνη δύναμη είναι η αντίσταση από το σανό: $-kv^2$, και ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\,v^2$$

Επομένως, το διαφορικό της ταχύτητας θα γράφεται

$$dv = \left(\frac{dv}{dt}\right)\,dt = -\frac{k}{m}\,v^2\,dt \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\,dt$$

Και ολοκληρώνοντας

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = -\int_0^t \frac{k}{m}\,dt$$

όπου θεωρούμε ως $t = 0$ την στιγμή που η μοτοσυκλέτα εισέρχεται στο σανό. Εκτελώντας την ολοκλήρωση

$$-\frac{1}{v}\bigg|_{v_0}^{v} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{k}{m}t \Rightarrow$$

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0\dfrac{k}{m}t}$$

1. Μοτοσικλετιστής εισέρχεται σε θημωνιά από σανό με ταχύτητα v_0. Η αντίσταση που συναντά από το σανό είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητάς του. Αν υποθέσουμε ότι μόλις μπει στο σανό η μηχανή του σβήνει βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου, ως συνάρτηση της θέσης και το χρόνο που θα κάνει για να βγει από το σανό, αν η θημωνιά έχει μήκος d (δεν θεωρούμε τριβή μεταξύ μοτοσυκλέτας και εδάφους).

Για να βρούμε την ταχύτητα ως συνάρτηση της θέσης, γράφουμε την επιτάχυνση

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

Οπότε, ο νόμους του Νεύτωνα γράφεται

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx}v = -\frac{k}{m}v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m}v \Rightarrow dv = -\frac{k}{m}v\,dx \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\,dx$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int_0^x dx \Rightarrow \ln v|_{v_0}^{v} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{k}{m}x \Rightarrow v = v_0\,e^{-\frac{k}{m}x}$$

όπου θεωρήσαμε ότι η αρχή της θημωνιάς είναι στο $x = 0$. Από εδώ μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα εξόδου v_f

$$v_f = v_0\,e^{-\frac{k}{m}d}$$

1. Μοτοσικλετιστής εισέρχεται σε θημωνιά από σανό με ταχύτητα v_0. Η αντίσταση που συναντά από το σανό είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητάς του. Αν υποθέσουμε ότι μόλις μπει στο σανό η μηχανή του σβήνει βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου, ως συνάρτηση της θέσης και το χρόνο που θα κάνει για να βγει από το σανό, αν η θημωνιά έχει μήκος d (δεν θεωρούμε τριβή μεταξύ μοτοσυκλέτας και εδάφους).

Από την τελευταία σχέση και αυτήν που δίνει την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου μπορούμε να βρούμε το χρόνο εξόδου t_f

$$v_0\, e^{-\frac{k}{m}d} = \frac{v_0}{1 + v_0\frac{k}{m}t_f} \Rightarrow 1 + v_0\frac{k}{m}t_f = e^{\frac{k}{m}d} \Rightarrow t_f = \frac{m}{kv_0}\left(e^{\frac{k}{m}d} - 1\right)$$

2. Ένα μικρό σώμα μάζας m αρχίζει να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής μ μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από το σημείο εκκίνησης, $\mu = \lambda x$, όπου $\lambda > 0$. (α) Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει το σώμα έως ότου σταματήσει. (β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα και τη θέση που θα συμβεί αυτό.

Στην διεύθυνση την κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο, έχουμε ισορροπία δυνάμεων: της συνιστώσας του βάρους και της αντίδρασης του επιπέδου σ' αυτήν την διεύθυνση

$$B\cos\theta = A$$

Στην διεύθυνση την παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο θα έχουμε

$$m\frac{dv}{dt} = B\sin\theta - T = mg\sin\theta - \mu A = mg\sin\theta - \lambda x mg\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta - \lambda x g\cos\theta$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της ''αλυσίδας'' στην παράγωγο μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = g\sin\theta - \lambda x g\cos\theta \Rightarrow \frac{dv}{dx}v = g\sin\theta - \lambda x g\cos\theta$$

Πηγαίνοντας στα διαφορικά, παίρνουμε

$$v\,dv = (g\sin\theta - \lambda x g\cos\theta)\;dx$$

2. Ένα μικρό σώμα μάζας m αρχίζει να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής μ μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από το σημείο εκκίνησης, $\mu = \lambda x$, όπου $\lambda > 0$. (α) Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει το σώμα έως ότου σταματήσει. (β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα και τη θέση που θα συμβεί αυτό.

και ολοκληρώνοντας

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^x (g\sin\theta - \lambda x g\cos\theta)\,dx \Rightarrow$$
$$\frac{v^2}{2} = gx\sin\theta - \frac{1}{2}\lambda g x^2\cos\theta \Rightarrow$$
$$v^2 = 2gx\sin\theta - \lambda g x^2\cos\theta$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται για

$$x = 0 \quad \text{και} \quad x = 2\frac{\tan\theta}{\lambda}$$

Επομένως, η απόσταση που θα φτάσει το σώμα θα είναι $x = 2\tan\theta/\lambda$. Για να βρούμε την μέγιστη ταχύτητα και τη θέση που συμβαίνει αυτό, μηδενίζουμε την παράγωγο της ταχύτητας ως προς τη θέση

$$\frac{dv^2}{dx} = 0 \Rightarrow x = 2g\sin\theta - 2\lambda g x\cos\theta = 0 \Rightarrow x = \frac{\tan\theta}{\lambda}$$

και γί αυτήν τη θέση η ταχύτητα γίνεται

$$v^2 = \frac{g}{\lambda}\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

2. Ένα μικρό σώμα μάζας m αρχίζει να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής μ μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από το σημείο εκκίνησης, $\mu = \lambda x$, όπου $\lambda > 0$. (α) Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει το σώμα έως ότου σταματήσει. (β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα και τη θέση που θα συμβεί αυτό.

Τη θέση όπου το σώμα αποκτά την μέγιστη ταχύτητα θα μπορούσαμε να την προσδιορίσουμε επίσης από το γεγονός ότι η μέγιστη ταχύτητα επιτυγχάνεται όταν η τριβή γίνει ίση με την συνιστώσα του βάρους στο κεκλιμένο επίπεδο

$$mg\sin\theta = \lambda x mg\cos\theta \Rightarrow x = \frac{\tan\theta}{\lambda}$$

Στη αρχή της κίνησης έχουμε μια επιταχυνόμενη κίνηση γιατί συνιστώσα του βάρους στο κεκλιμένο επίπεδο είναι μεγαλύτερη της τριβής. Στην θέση που βρήκαμε γίνεται εξίσωση των δύο αυτών δυνάμεων και στη συνέχεια η τριβή μεγαλώνει και επιβραδύνει το σώμα έως να το σταματήσει.

3. Σώμα μάζας m προσκρούει, κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, σε ακλόνητο εμπόδιο με ταχύτητα $v_0\hat{\boldsymbol{i}}$ και ακινητοποιείται σταδιακά. Υποθέστε ότι η ασκούμενη δύναμη στο σώμα, κατά το στάδιο της ακινητοποίησης, είναι χρονικά εξαρτημένη και δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{F} = -Ate^{-(t/\tau)^2}\hat{\boldsymbol{i}}$. (α) Σχεδιάστε πρόχειρα το μέτρο της δύναμης ως συνάρτηση του χρόνου, και υπολογίστε την μέγιστη τιμή της και τη χρονική στιγμή κατά την οποία αυτή λαμβάνει χώρα. (β) Βρείτε την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου. (γ) Βρείτε τη σχέση που συνδέει τα μεγέθη v_0, A και τ.

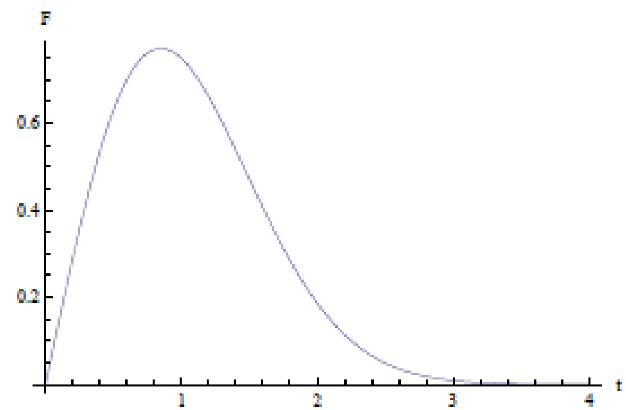
Λύση

Όλη η κίνηση γίνεται στον άξονα των x, οπότε γράφουμε μόνο μέτρα ταχύτητας και δύναμης.
Βρίσκουμε το μέγιστο της δύναμης

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dF}{dt} = Ate^{-(t/\tau)^2}\left(1 - 2\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{\tau}{\sqrt{2}}$$

και

$$F_{\mu\varepsilon\gamma} = F\left(t = \frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) = \frac{A\tau}{\sqrt{2e}}$$



3. Σώμα μάζας m προσκρούει, κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, σε ακλόνητο εμπόδιο με ταχύτητα $v_0\hat{\boldsymbol{i}}$ και ακινητοποιείται σταδιακά. Υποθέστε ότι η ασκούμενη δύναμη στο σώμα, κατά το στάδιο της ακινητοποίησης, είναι χρονικά εξαρτημένη και δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{F} = -Ate^{-(t/\tau)^2}\hat{\boldsymbol{i}}$. (α) Σχεδιάστε πρόχειρα το μέτρο της δύναμης ως συνάρτηση του χρόνου, και υπολογίστε την μέγιστη τιμή της και τη χρονική στιγμή κατά την οποία αυτή λαμβάνει χώρα. (β) Βρείτε την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου. (γ) Βρείτε τη σχέση που συνδέει τα μεγέθη v_0, A και τ.

Υπόδειξη: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

Από το νόμο του Νεύτωνα

$$m\frac{dv}{dt} = -Ate^{-(\frac{t}{\tau})^2} \Rightarrow dv = -\frac{A}{m}te^{-(\frac{t}{\tau})^2}\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = -\int_0^t \frac{A}{m}te^{-(\frac{t}{\tau})^2}\,dt \Rightarrow$$

$$v = v_0 - \frac{A\tau^2}{2m}\left(1 - e^{-(\frac{t}{\tau})^2}\right)$$

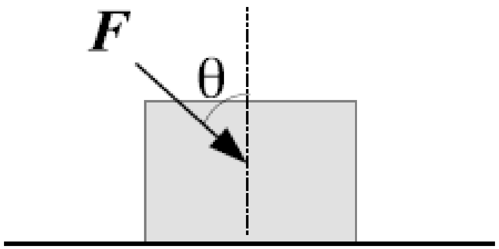
Θα πρέπει για $t \to \infty$ η ταχύτητα να μηδενίζεται. Άρα

$$v_0 = \frac{A\tau^2}{2m}$$

οπότε, η ταχύτητα, ως συνάρτηση του χρόνου γράφεται

$$v = \frac{A\tau^2}{2m}e^{-(\frac{t}{\tau})^2}$$

4. Σώμα μάζας M βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και ο συντελεστής μεταξύ των δύο επιφανειών είναι ίσος με μ. Εφαρμόζουμε στο σώμα μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ που σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη διεύθυνση (βλ. σχήμα). Να βρεθεί η μέγιστη γωνία θ που μπορούμε να εφαρμόσουμε τη δύναμη ώστε το σώμα να μην κινηθεί, ανεξάρτητα από το μέτρο της δύναμης αυτής.



Λύση

Στο σώμα ασκούνται το βάρος του, η δύναμη $\boldsymbol{F}$ και η αντίδραση του επιπέδου που αναλύεται στην κάθετη δύναμη $\boldsymbol{A}$ και την τριβή $\boldsymbol{T}$. Στην κάθετο διεύθυνση, η ισορροπία δυνάμεων δίνει

$$A = F\cos\theta + Mg$$

Στον οριζόντιο άξονα, αν θέλουμε το σώμα να μην κινείται θα πρέπει

$$F\sin\theta = T$$

Η τριβή είναι

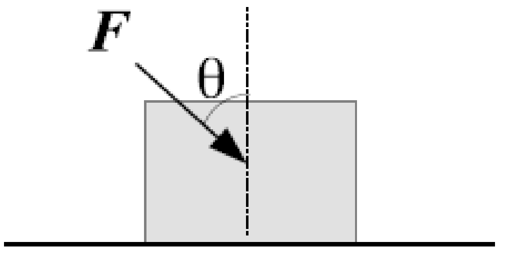
$$T \leq \mu A = \mu F\cos\theta + \mu Mg$$

Επομένως, θα πρέπει

$$F\sin\theta \leq \mu F\cos\theta + \mu Mg$$

$$\frac{F}{Mg}(\sin\theta - \mu\cos\theta) \leq \mu$$

4. Σώμα μάζας M βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και ο συντελεστής μεταξύ των δύο επιφανειών είναι ίσος με μ. Εφαρμόζουμε στο σώμα μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ που σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη διεύθυνση (βλ. σχήμα). Να βρεθεί η μέγιστη γωνία θ που μπορούμε να εφαρμόσουμε τη δύναμη ώστε το σώμα να μην κινηθεί, ανεξάρτητα από το μέτρο της δύναμης αυτής.

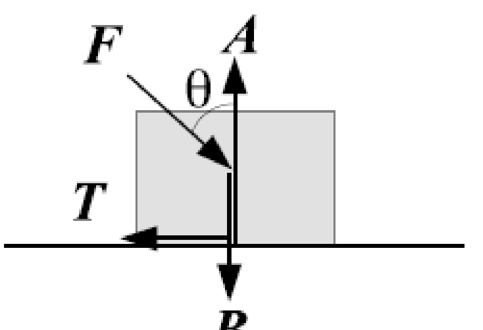


Αν θέλουμε η παραπάνω σχέση να ισχύει για κάθε τιμή της F, θα πρέπει η παράσταση μέσα στην παρένθεση να είναι αρνητική ή μηδέν

$$\sin\theta - \mu\cos\theta \leq 0 \Rightarrow \tan\theta - \mu \leq 0 \Rightarrow \tan\theta \leq \mu$$

ή, με άλλα λόγια, θα πρέπει η γωνία μας να είναι μικρότερη από την γωνία θ_0

$$\theta \leq \theta_0 \quad \text{όπου} \quad \tan\theta_0 = \mu$$



5. Μικρό σώμα μάζας M ολισθαίνει σε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R, χωρίς τριβές (βλ. σχήμα). Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί το επίπεδο στη σφαίρα και η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας ως συνάρτηση της γωνίας θ.

Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι το βάρος και η αντίδραση της επιφάνειας, που λόγω έλλειψης τριβής είναι κάθετη στην επιφάνεια. Αν $\boldsymbol{a}$ είναι η επιτάχυνση του σώματος, ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται, σε διανυσματική μορφή

$$\boldsymbol{F} + M\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{a}$$

Στην περίπτωσή μας συμφέρει να δουλέψουμε σε πολικές συντεταγμένες. Υπενθυμίζουμε τη μορφή της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες

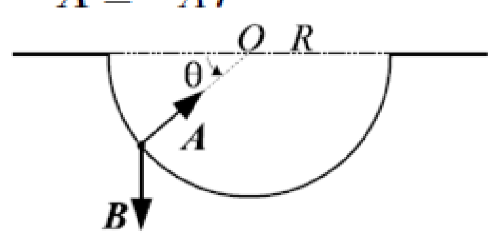
$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

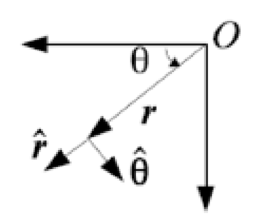
Στο συγκεκριμένο πρόβλημα το $\boldsymbol{r}$ είναι πάντοτε ίσο με R. Οπότε, η επιτάχυνση απλοποιείται

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 R\,\hat{\boldsymbol{r}} + R\frac{d\omega}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

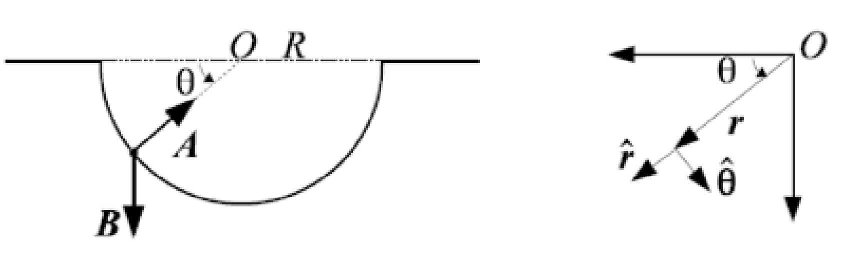
Η δύναμη $\boldsymbol{F}$ είναι (αντι)παράλληλη με το διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{r}}$, ενώ το βάρος αναλύεται σε συνιστώσα παράλληλη με το $\hat{\boldsymbol{r}}$ $(F\sin\theta)$ και σε συνιστώσα παράλληλη με το $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ $(F\cos\theta)$

$$\boldsymbol{F} = F\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + F\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \boldsymbol{A} = -A\,\hat{\boldsymbol{r}}$$





5. Μικρό σώμα μάζας M ολισθαίνει σε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R, χωρίς τριβές (βλ. σχήμα). Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί το επίπεδο στη σφαίρα και η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας ως συνάρτηση της γωνίας θ.



Οπότε, η διανυσματική σχέση του νόμου του Νεύτωνα γράφεται

$$-F + Mg\sin\theta = -M\omega^2 R, \qquad Mg\cos\theta = M\frac{d\omega}{dt}R$$

Η δεύτερη (διαφορική) ξαναγράφεται ως

$$g\cos\theta = R\,\frac{d\omega}{dt} = R\,\frac{d\omega}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = R\,\frac{d\omega}{d\theta}\,\omega \Rightarrow$$
$$g\cos\theta\,d\theta = \omega R\,d\omega \Rightarrow \int_0^\theta g\cos\theta\,d\theta = \int_0^\omega \omega R\,d\omega \Rightarrow$$
$$g\sin\theta = \frac{1}{2}R\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2g}{R}\,\sin\theta$$

Η πρώτη εξίσωση γίνεται

$$F = Mg\sin\theta + MR\omega^2 = Mg\sin\theta + MR\frac{2g}{R}\,\sin\theta = 3Mg\sin\theta$$