Ιδιότητες Παραγωγίσιμων Συναρτήσεων ορισμένων σε διαστήματα του $\mathbb{R}$

Θεώρημα (Ύπαρξης ακρότατων σημείων): Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε η f να λαμβάνει μέγιστη, ή, ελάχιστη τιμή στο x_0. Τότε, $f'(x_0)=0$.

Απόδ: Ας υποθέσουμε ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή στο x_0. Άρα, $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in I$. Αν $f'(x_0)>0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \lambda = \frac{1}{2} f'(x_0) > 0$

Άρα θα υπάρχει $\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$ και $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \lambda > 0$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Επιλέγουμε $x_1 \in (x_0, x_0+\delta)$. Τότε, $x_1 > x_0$ και συνεπώς $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} > \lambda > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0)$ με $x_1 \in I$. Άτοπο γιατί $f(x_1) \le f(x_0)$. Αν $f'(x_0)<0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \mu = \frac{1}{2} f'(x_0) < 0$

Άρα υπάρχει $\delta>0$ με $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$ και $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \mu < 0$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Επιλέγουμε $x_2 \in (x_0-\delta, x_0)$. Τότε $x_2 < x_0$ και $\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} < 0$. Άρα, $f(x_2) > f(x_0) \ge f(x_2)$ Άτοπο. Αναγκαστικά λοιπόν, $f'(x_0)=0$.

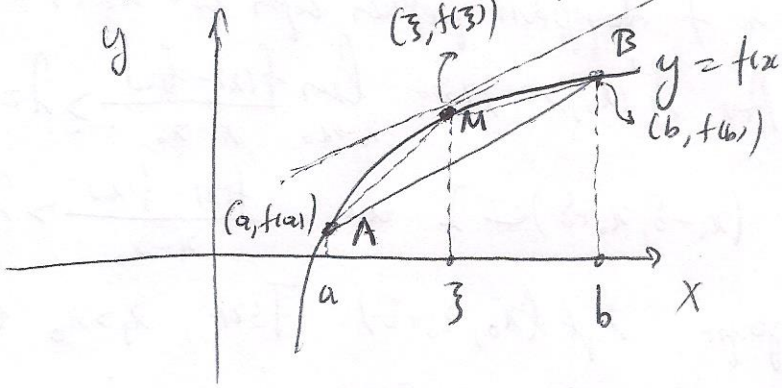
Θεώρημα (Rolle): Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$ και $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, με f παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a)=f(b)$ τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f'(\xi)=0$.

Απόδ: Από το Θεώρημα μεγίστου-ελαχίστου για την f, έχουμε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο $[a,b]$ με $f(\xi_1) \le f(x) \le f(\xi_2)$, $\forall x \in [a,b]$. Αν $\{\xi_1, \xi_2\} \in \{a,b\}$ τότε $f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(a)=f(b)$. Άρα, f σταθερή στο $[a,b]$. Συνεπώς $f'(x)=0$ $\forall x \in (a,b)$. Αν $\{\xi_1,\xi_2\} \not\subset \{a,b\}$, τότε υπάρχει $\xi \in \{\xi_1,\xi_2\}$ με $\xi \neq a$ και $\xi \neq b$. Τότε $\xi \in (a,b)$ και η f λαμβάνει ακρότατη τιμή στο (a,b), στο σημείο ξ. Από το Θεώρημα ύπαρξης ακρότατων σημείων $\Rightarrow f'(\xi)=0$

Θεώρημα Μέσης Τιμής: Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με f παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Απόδ.: Γεωμετρικά, το ΘΜΤ μας λέει το ακόλουθο:



υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε η εφαπτόμενη του γραφήματος της $y=f(x)$ στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ είναι παράλληλη με τη χορδή που έχει άκρα στα σημεία $(a,f(a))$ και $(b,f(b))$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης είναι $f'(\xi)$ και της χορδής $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε $x\in[a,b]$ και συμβολίσουμε με $\hat{AMB}=T$ το τρίγωνο με κορυφές στα σημεία $(x,f(x))$, $(a,f(a))$ και $(b,f(b))$ τότε το εμβαδό του T γίνεται μέγιστο, ή, ελάχιστο όταν $M=(x,f(x))=(\xi,f(\xi))$ με την εφαπτόμενη το γραφήματος της $y=f(x)$ στο M να είναι παράλληλη με τη χορδή από το $(a,f(a))$ στο $(b,f(b))$.

Το εμβαδό του T ισούται (κατ' απόλυτη τιμή) με

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & f(x) & 1\\ a & f(a) & 1\\ b & f(b) & 1\end{vmatrix}.$$

Άρα, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ με } F(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1\\ a & f(a) & 1\\ b & f(b) & 1\end{vmatrix},\ x\in[a,b]$$

Δηλαδή $F(x) =$ 3x3 ορίζουσα. Άρα, $F(x) = x\begin{vmatrix} f(a) & 1 \\ f(b) & 1 \end{vmatrix} - f(x)\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & f(a) \\ b & f(b) \end{vmatrix}$

$\Rightarrow F(x) = x(f(a)-f(b)) - f(x)(a-b) + af(b) - bf(a)$, $\forall x \in [a,b]$

Τότε F συνεχής στο $[a,b]$ και $F'(x) = f(a)-f(b)-(a-b)f'(x)$, $\forall x\in(a,b)$.

Επίσης, $F(a) = 0 = F(b)$. Άρα, από Θ. Rolle, υπάρχει $\xi\in(a,b)$ με $F'(\xi)=0 \Rightarrow f(a)-f(b)=(a-b)f'(\xi) \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ για κάποιο $\xi\in(a,b)$.

<u>Πόρισμα</u> (Γενικευμένο ΘΜΤ) Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς με f και g παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ με $g'(\xi)(f(b)-f(a)) = f'(\xi)(g(b)-g(a))$.

<u>Απόδ</u>: Η $F(x) = \begin{vmatrix} g(x) & f(x) & 1 \\ g(a) & f(a) & 1 \\ g(b) & f(b) & 1 \end{vmatrix}$, $x\in[a,b]$ είναι ίση με

$F(x) = g(x)(f(a)-f(b)) - f(x)(g(a)-g(b)) + g(a)f(b) - g(b)f(a)$, $x\in[a,b]$

και άρα F συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) με $F'(x) = g'(x)(f(a)-f(b)) - f'(x)(g(a)-g(b))$, $\forall x\in(a,b)$

Επιπλέον, $F(a)=F(b)=0$. Άρα από Rolle, υπάρχει $\xi\in(a,b)$ με $F'(\xi)=0$. $\Rightarrow g'(\xi)(f(a)-f(b)) = f'(\xi)(g(a)-g(b))$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $a<b$ στο $\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, f παραγωγίσιμη στο (a,b), και $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(a,b)$. Τότε f αύξουσα στο $[a,b]$. Αν $f'(x)>0$, $\forall x\in(a,b)$, τότε f γνησίως αύξουσα στο $[a,b]$.

<u>Απόδ</u>: Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στο $[x_1,x_2]$, όπου $a\leq x_1<x_2\leq b$. Βρίσκουμε $\xi\in(x_1,x_2)$ με $f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1)$. Το συμπέρασμα έπεται

Σημείωση: Αν f παραγωγίσιμη στο (a,b), $a<b$, και f αύξουσα, τότε $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in(a,b)$. Ενώ, αν η f είναι φθίνουσα, τότε $f'(x)\leq 0$, $\forall x\in(a,b)$.
Πράγματι, αν $x_0\in(a,b)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. Αν η f είναι αύξουσα στο (a,b) τότε $f(x)\geq f(x_0)$, $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)\subset(a,b)$ για $\delta>0$ αρκούντως μικρό. Άρα, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ $\Rightarrow f'(x_0)\geq 0$, $\forall x_0\in(a,b)$. Παρόμοια δείχνουμε $f'(x)\leq 0$, $\forall x\in(a,b)$ όταν f φθίνουσα.

Θεώρημα (Darboux). Έστω $I\subset\mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Έστω $a<b$ στο I με $f'(a)\neq f'(b)$. Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ βρίσκεται ανάμεσα στα $f'(a)$ και $f'(b)$, τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f'(\xi)=\lambda$. (Με άλλα λόγια το πεδίο τιμών της f' είναι διάστημα)

Απόδ: Υποθέτουμε ότι $f'(a)<f'(b)$. Αν $f'(a)<\lambda<f'(b)$, ορίζουμε $F: I\to\mathbb{R}$ με $F(x)=f(x)-\lambda x$, $\forall x\in I$. Η F είναι παραγωγίσιμη στο I με $F'(x)=f'(x)-\lambda$, $\forall x\in I$. Περιορίζουμε την F στο $[a,b]$ και παρατηρούμε ότι δεν λαμβάνει την ελάχιστη τιμή στη θέση $x=a$. Αυτό συμβαίνει γιατί $F'(a)=f'(a)-\lambda<0$.
Πράγματι, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)<0$. Άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$(a,a+\delta)\subset[a,b]$ και $\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$, $\forall x\in(a,a+\delta)$. Άρα,

$F(x)<F(a)$, $\forall x\in(a,a+\delta)\subset[a,b]$ και συνεπώς $F(a)>\min\limits_{[a,b]}F$

Παρόμοια, επειδή $F'(b) = f'(b) - \lambda > 0$, η F περιορισμένη στο $[a,b]$ δεν λαμβάνει ελάχιστη τιμή στη θέση $x=b$. Πράγματι, $\lim_{x\to b}\frac{F(x)-F(b)}{x-b} =$ $= F'(b) > 0$. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ με $(b-\delta, b) \subset [a,b]$ και

$$\frac{F(x)-F(b)}{x-b} > 0, \quad \forall x \in (b-\delta, b).$$

Έπεται ότι $F(x) < F(b)$ $\forall x \in (b-\delta, b)$. Άρα, $F(b) > \min_{[a,b]} F$. Συνοψίζοντας, η F περιορισμένη στο $[a,b]$, <u>δεν</u> λαμβάνει ελάχιστη τιμή στα άκρα a, b του $[a,b]$. Από το Θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής, αφού F συνεχής στο $[a,b] \subset I$, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ με $F(\xi) = \min_{[a,b]} F$. Επειδή $F(\xi) < F(a)$ και $F(\xi) < F(b)$ έχουμε ότι $\xi \neq a$ και $\xi \neq b$. Δηλαδή η F λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο διάστημα (a,b) στη θέση $\xi \in (a,b)$. Από το Θεώρημα ύπαρξης μέγιστης τιμής έχουμε ότι $F'(\xi) = 0$. Δηλαδή, $f'(\xi) = \lambda$, με $\xi \in (a,b)$.

Όταν $f'(a) > \lambda > f'(b)$, ορίζουμε $g : I \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -f(x), \forall x \in I$. Τότε g παραγωγίσιμη στο I και $g' = -f'$. Άρα, $g'(a) < -\lambda < g'(b)$. Από το 1ο μέρος της απόδειξης, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $g'(\xi) = -\lambda$. Άρα, $f'(\xi) = \lambda$.

<u>Σημείωση</u>: Η f' δεν είναι απαραίτητα συνεχής και συνεπώς δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης τιμής. Αν η f' ήταν συνεχής τότε το Θεώρημα Darboux θα ήταν συνέπεια του Θεωρ. ενδιάμεσων τιμών.

Θεώρημα (Αντιστροφής) Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) f γνησίως μονότονη και το πεδίο τιμών $J = f(I)$ της f είναι ένα ανοιχτό διάστημα.

(ii) $f^{-1}: J \longrightarrow I$ είναι παραγωγίσιμη και $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, όπου $x = f^{-1}(y)$, $\forall y \in J$.

Απόδειξη: (i) Η f είναι 1-1. Πράγματι, αν $x_1 \neq x_2$ στο I, τότε από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in I$ με $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$. Αφού $f'(\xi) \neq 0$, έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Η f είναι επίσης συνεχής στο I. Άρα από το Θεώρημα μονοτονίας των συνεχών συναρτήσεων, έχουμε ότι η f είναι γνήσια μονότονη και ότι το πεδίο τιμών της $J = f(I)$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα.

(ii) Έστω $y_0 \in J$. Τότε $y_0 = f(x_0)$ για κάποιο (μοναδικό) $x_0 \in I$. Θα δείξουμε ότι η f^{-1} έχει παράγωγο στο $y = y_0$ και $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Θεωρούμε $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στο J με $y_n \to y_0$ και $y_n \neq y_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Θέτουμε $x_n = f^{-1}(y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στο I.

Το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης για συνεχείς συναρτήσεις μας δίνει ότι η $f^{-1}: J \longrightarrow I$ είναι συνεχής

Άρα, αφού $y_n \to y_0$, έχουμε ότι $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$, άρα $x_n \to x_0$.

Επίσης, αφού $y_n \neq y_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε $f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0)$, δηλαδή $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $\dfrac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)}{y_n-y_0} = \dfrac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)} =$

$$= \frac{1}{\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{αφού} \quad \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to f'(x_0) \neq 0.$$

<u>Σημείωση</u>: Η υπόθεση $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, μας δίνει, μέσω του Θεωρ. Darboux ότι η f' διατηρεί πρόσημο στο I. Δηλαδή, είτε $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, είτε $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$. Συνεπώς η γνήσια μονοτονία της f προκύπτει από το Θεωρ. Darboux. (στην ουσία χρησιμοποιήσαμε εναλλακτικά το Θεώρημα μονοτονίας συνεχών συναρτήσεων)

<u>Εφαρμογές</u>: 1) Η εκθετική συνάρτηση $Exp: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ με $Exp(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη όπως ξέρουμε και $Exp^{-1} = \ln : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Αφού $(Exp)'(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, το θεώρημα αντιστροφής μας δίνει: ότι η $\ln$ είναι παραγωγίσιμη και $(\ln)'(y) = \dfrac{1}{Exp(x)}$, αν $y = Exp(x) = e^x$. Άρα, $(\ln)'(y) = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$, $\forall y > 0$.

Συνεπώς, $\dfrac{d}{dx}[\ln(x)] = \dfrac{1}{x}$, $\forall x > 0$.

2) Η συνάρτηση ημίτονο $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1,1)$ είναι γνησίως αύξουσα αφού $\dfrac{d}{dx}[\sin](x) = \cos(x) > 0$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επίσης, η sin είναι συνεχής. Άρα $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x)=1$, $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \sin(x)=-1$.

Συνεπώς το πεδίο τιμών $\sin\left[\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right]=(-1,1)$. Δηλαδή η συνάρτηση $\sin:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-1,1)$ είναι 1-1 και επί. Η αντίστροφή της $(\sin)^{-1}:(-1,1)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ λέγεται "συνάρτηση τόξο ημιτόνου" και συμβολίζεται με $Arcsin:(-1,1)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Αφού $(\sin)'(x)>0$, $\forall x\in(-\pi/2,\pi/2)$ το θεώρημα της αντίστροφής μας δίνει $\frac{d}{dx}\left[Arcsin(y)\right]=\frac{1}{\cos(x)}$, όπου $y=\sin(x)$.

Άρα, $\frac{d}{dx}\left[Arcsin(y)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $\forall y\in(-1,1)$

(Σημείωση: Αφού $\cos(x)>0$, $\forall x\in(-\pi/2,\pi/2) \Rightarrow \cos(x)=\sqrt{1-\sin^2(x)}$)

3) Η συνάρτηση $\cos:(0,\pi)\to(-1,1)$ είναι παραγωγίσιμη με $\cos'(x)=-\sin(x)<0$, $\forall x\in(0,\pi)$. Άρα η cos είναι γν. φθίνουσα (άρα 1-1) και $\lim_{x\to0}\cos(x)=1$, $\lim_{x\to\pi}\cos(x)=-1$. Άρα το πεδίο τιμών $\cos[(0,\pi)]$ είναι το $(-1,1)$. Συνεπώς $\cos:(0,\pi)\xrightarrow[\text{επί}]{1-1}(-1,1)$ και ορίζεται η αντίστροφη $Arccos:(-1,1)\to(0,\pi)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $(Arccos)'(y)=\frac{1}{-\sin(x)}$, όπου $y=\cos(x)$ με $y\in(-1,1)$ και $x\in(0,\pi)$. Άρα,

$$(Arccos)'(y)=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$, αφού $\sin(x)>0$, $\forall x\in(0,\pi)$

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις Arcsin και Arccos επεκτείνονται συνεχώς στο διάστημα $[-1,1]$ με $Arcsin(-1) = -\pi/2$, $Arcsin(1) = \pi/2$, $Arccos(1) = 0$, $Arccos(-1) = \pi$. Όμως δεν είναι παραγωγίσιμες στα σημεία ± 1.

4) Η συνάρτηση εφαπτομένη $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $(\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$, $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$ $\left(\cos(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Άρα, $\tan(x)$ γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $(-\pi/2, \pi/2)$. Επίσης,
$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan(x) = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty$ και $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$. Συνεπώς το πεδίο τιμών της $\tan(x)$ είναι το $\mathbb{R}$ από το πόρισμα του θεωρήματος συνέχειας αντίστροφης συνάρτησης. Συμπεραίνουμε ότι $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\tan^{-1}$ της $\tan$. Συμβολίζουμε με $Arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Το θεώρημα της αντίστροφης μας δίνει τώρα ότι η Arctan είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $(Arctan)'(y) = \frac{1}{\tan'(x)}$, όπου $y = \tan(x)$ με $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Άρα, $\forall y \in \mathbb{R}$, έχουμε $(Arctan)'(y) = \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)^{-1}$, με $y = \tan(x)$ και $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Συνεπώς, $(Arctan)'(y) = \cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$, αφού $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, και άρα $(Arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Σύνοψη: 1) Η συνάρτηση $Arcsin : (-1, 1) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γν. αύξουσα και επί. Είναι παραγωγίσιμη και $(Arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1,1)$

2) Η $\text{Arccos}:(-1,1)\longrightarrow(0,\pi)$ είναι γν. φθίνουσα και επί. Είναι παραγωγίσιμη με $(\text{Arccos})'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x\in(-1,1)$.

3) Η $\text{Arctan}:\mathbb{R}\longrightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι γν. αύξουσα και επί. Είναι παραγωγίσιμη με $(\text{Arctan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

4) $\sin\left[\text{Arcsin}(x)\right] = x$, $\forall x\in(-1,1)$ (ισχύει και για $x=\pm1$)

5) $\cos\left[\text{Arccos}(x)\right] = x$, $\forall x\in(-1,1)$ (ισχύει και για $x=\pm1$)

6) $\tan\left[\text{Arctan}(x)\right] = x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

7) $\text{Arcsin}\left[\sin(x)\right] = x$, $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

8) $\text{Arccos}\left[\cos(x)\right] = x$, $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

9) $\text{Arctan}\left[\tan(x)\right] = x$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{Arctan}(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

12) $\text{Arcsin}(x)+\text{Arccos}(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x\in[-1,1]$

(γιατί αν $f(x)=\text{Arcsin}(x)+\text{Arccos}(x)$, $\forall x\in[-1,1]$, τότε f συνεχής, ενώ f παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$, $\forall x\in(-1,1)$. Από ΘΜΤ, έχουμε f = σταθερή. Άρα, $f(x)=f(0)=\dfrac{\pi}{2}$, $\forall x\in[-1,1]$

Θεώρημα Taylor: Έστω I ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη. (Δηλαδή υπάρχουν οι παράγωγοι $f^{(k)}$ της f, για κάθε $k \leq n+1$). Έστω $a<b$ στο I. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε:

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-a)^{n+1}$$

Σημείωση: Αν $n=0$ το θεώρ. Taylor δίνει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$.
Δηλαδή, για $n=0$, λαμβάνουμε το ΘΜΤ.

Απόδειξη (Taylor) Ορίζουμε τη συνάρτηση $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k$ $\forall x \in I$. Τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο I, γιατί η f είναι $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη στο I, με $F'(x) = f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[f^{(k)}(x)(b-x)^k\right]' =$

$$= f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[f^{(k+1)}(x)(b-x)^k + f^{(k)}(x)(-1)k(b-x)^{k-1}\right] =$$

$$= f'(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}\right]}_{\text{Τηλεσκοπικό Άθροισμα}} =$$

$$= f'(x) + \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^{n}}{n!} - \frac{f'(x)}{0!}(b-x)^0 = \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}$$

Άρα, $F'(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)(b-x)^n$, $\forall x \in I$

Επίσης, θεωρούμε τη συνάρτηση $G: I \longrightarrow \mathbb{R}$ με $G(x) = (b-x)^{n+1}$ $\forall x \in I$.

Οι F, G ικανοποιούν τις υποθέσεις του γενικευμένου θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[a,b]$. Άρα, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi)[G(b)-G(a)] = G'(\xi)[F(b)-F(a)].$$

Όμως έχουμε ότι $F(b)-F(a) = f(b) - \left[f(a) + \sum_{k\geq 1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right]$

και $G(b)-G(a) = 0-(b-a)^{n+1} = -(b-a)^{n+1}$

Ενώ, ο προηγούμενος υπολογισμός για την $F'(x)$ δίνει

$$F'(\xi) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(b-\xi)^n$$

και $G'(\xi) = -(n+1)(b-\xi)^n$. Συνεπώς έχουμε:

$$-\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(b-\xi)^n (b-a)^{n+1} = -(n+1)(b-\xi)^n\left[f(b)-f(a)-\sum_{k\geq 1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right]$$

Αφού $a<\xi<b$, έχουμε ότι $b-\xi>0$ και άρα απλοποιώντας το $(b-\xi)^n$

παίρνουμε: $f(b)-f(a)-\sum_{k\geq 1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}$

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + \sum_{k\geq 1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

για κάποιο $\xi \in (a,b)$.

<u>Πόρισμα</u> (Τύπος Taylor). Έστω I ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ και $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη. Έστω $x_0 \in I$. Τότε, για κάθε $x \in I$ υπάρχει $\xi \in I$, μεταξύ των x_0 και x έτσι ώστε

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k\geq 1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Απόδειξη: Αν $x_0<x$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα Taylor.

Για την περίπτωση $x<x_0$ ορίζουμε $F: J \longrightarrow (a,b)$, όπου $a<x<x_0<b$, $a\in I$, $b\in I$, και $J=\left(\frac{x_0-b}{x_0-x}, \frac{x_0-a}{x_0-x}\right)$, με

$F(t)=f[x_0+t(x-x_0)]$, $\forall t\in J$.

Σημειώνεται ότι αφού I ανοιχτό διάστημα και $x<x_0$ ανήκουν στο I, υπάρχουν $a\in I$ και $b\in I$ με $a<x<x_0<b$. Άρα, $\frac{x_0-b}{x_0-x}<\frac{x_0-a}{x_0-x}$. Επίσης έχουμε ότι αν $\frac{x_0-b}{x_0-x}<t<\frac{x_0-a}{x_0-x}$ (δηλαδή, $t\in J$), τότε

$a<x_0+t(x-x_0)<b$. Συνεπώς, η F είναι καλά ορισμένη.

Επίσης, η F είναι $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη στο J γιατί η f είναι $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη στο I. Πράγματι, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι $\frac{dF}{dt}(t)=f'[x_0+t(x-x_0)]\cdot\frac{d}{dt}[x_0+t(x-x_0)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dF}{dt}(t)=f'[x_0+t(x-x_0)](x-x_0)$, $\forall t\in J$. Περαιτέρω, έχουμε

$\frac{d^2F}{dt^2}(t)=f''[x_0+t(x-x_0)](x-x_0)(x-x_0)=f''[x_0+t(x-x_0)](x-x_0)^2$, $\forall t\in J$,

Άρα, επαγωγικά, $\frac{d^kF}{dt^k}(t)=f^{(k)}[x_0+t(x-x_0)](x-x_0)^k$, $\forall k=1,\dots,n+1$,

$\forall t\in J$. Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα Taylor για την F και τα σημεία $0<1$ του J και βρίσκουμε $0<\theta<1$ ώστε

$$F(1)=F(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}.$$

$$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$ όπου

Θέσαμε $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$. Τότε, $x<\xi<x_0$ αφού $0<\theta<1$. και το πόρισμα αποδείχτηκε.

Παρατηρήσεις: 1) Στον τύπο Taylor γράψαμε

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

με ξ ανάμεσα στα x_0 και x. Η παράσταση

$$T_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

καλείται πολυώνυμο Taylor βαθμού n της $f(x)$ γύρω από το $x=x_0$.

Η παράσταση $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ καλείται υπόλοιπο Taylor της $f(x)$ γύρω από το $x=x_0$. Άρα, $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$.

2) Αν η $f(x)$ είναι κλάσης C^∞ στο ανοιχτό διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, (δηλαδή η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I), τότε υπάρχουν τα $T_n(x)$ και $R_n(x)$, $\forall x_0 \in I$ και $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν για κάποιο $x_0 \in I$ συμβαίνει να έχουμε $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, για κάποιο $x \in I$, τότε αφού $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε ότι:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left[T_n(x) + R_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Αν λοιπόν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

τότε έχουμε ότι $f(x)=f(x_0)+\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \ \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

Τότε λέμε ότι η $f(x)$ αναπτύσσεται κατά Taylor γύρω από το σημείο $x=x_0$ και ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ είναι το ανάπτυγμα Taylor της $f(x)$ στο διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

Όταν $x_0=0$, τότε λέμε ότι η $f(x)$ αναπτύσσεται κατά Maclaurin γύρω από το $x=0$ και ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ είναι το ανάπτυγμα Maclaurin της f στο διάστημα $(-\delta, \delta)$.

Οι δυναμοσειρές $\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ και $\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ μίας συνάρτησης f, σε κάποιο διάστημα I με $x_0\in I$, λέγονται δυναμοσειρές Taylor γύρω από $x=x_0$ (αντίστοιχα δυναμοσειρά Maclaurin) της f.