Το δυώνυμο του Newton

Θα αποδείξουμε επαγωγικά το δυωνυμικό τύπο του Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών a, b και κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο τύπο, γνωστό και ως τρίγωνο του Pascal.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

για κάθε επιλογή φυσικών αριθμών $1 \leq k \leq n$. Αυτός ο τύπος αποδεικνύεται απευθείας ως εξής:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{[k!][(n-k)!]} + \frac{n!}{[(k-1)!][(n-k+1)!]} = \\
&= \frac{(n!)(n-k+1)}{[k!][(n-k)!](n-k+1)} + \frac{(n!)k}{k[(k-1)!][(n-k+1)!]} \\
&= \frac{(n!)(n-k+1)}{[k!][(n-k+1)!]} + \frac{(n!)k}{[k!][(n-k+1)!]} \\
&= \frac{(n!)(n-k+1)+(n!)k}{[k!][(n-k+1)!]} = \frac{(n!)(n-k+1+k)}{[k!][(n-k+1)!]} \\
&= \frac{(n!)(n+1)}{[k!][(n-k+1)!]} = \frac{(n+1)!}{[k!][(n+1-k)!]} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Για την απόδειξη του δυωνυμικού τύπου Newton εφαρμόζουμε την επαγωγική μέθοδο. Για $n = 1$ ο τύπος γίνεται

$$a+b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} b + \binom{1}{1} a = b + a$$

ο οποίος προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{(επαγωγική υπόθεση).}$$

Θα δείξουμε ότι

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Πράγματι,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

από την επαγωγική υπόθεση

Αρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\ &= S_1 + S_2\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} \ \ (\text{θέτοντας } l = k+1)\\ &= \sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}a^l b^{n-l+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n}a^{n+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}S_2 &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\ &= \binom{n}{0}b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = S_1 + S_2 &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \text{ (από τρίγωνο Pascal)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-n-1} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

Αρα από την αρχή της επαγωγής ο δυωνυμικός τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.