Το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Μέσω του γενικευμένου ολοκληρώματος μπορούμε να ολοκληρώσουμε συναρτήσεις πάνω σε διαστήματα που δεν είναι απαραίτητα κλειστά και φραγμένα, όπως στο ολοκλήρωμα Riemann. Επίσης η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε δεν είναι απαραίτητα φραγμένη. Όταν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι της μορφής $[a,b)$ με $a\in\mathbb{R}$ και $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, ή της μορφής $(a,b]$ με $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ και $b\in\mathbb{R}$, τότε έχουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα 1ου είδους. Όταν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι της μορφής (a,b), με $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ και $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, τότε έχουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα 2ου είδους.

Ορισμός 1: Έστω $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ και $b\in\mathbb{R}$ με $a<b$. Έστω $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) σε κάθε υποδιάστημα $[\gamma,b]$ με $a<\gamma<b$. Λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ συγκλίνει όταν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\gamma\to a^+}\int_\gamma^b f$ και είναι πραγματικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε ότι $\int_a^b f=\lim\limits_{\gamma\to a^+}\int_\gamma^b f$. Στην περίπτωση κατά την οποία $\lim\limits_{\gamma\to a^+}\int_\gamma^b f=\pm\infty$, γράφουμε $\int_a^b f=\pm\infty$. Όταν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\gamma\to a^+}\int_\gamma^b f$ στο $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, τότε λέμε ότι το $\int_a^b f$ αποκλίνει.

Σημείωση: Αν $a<b$ είναι πραγματικοί και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη κατά Riemann, τότε γνωρίζουμε ότι $\int_a^b f=\lim\limits_{\gamma\to a^+}\int_\gamma^b f$. Άρα σε αυτή την περίπτωση υπάρχει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ της f και ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann της f.

Ορισμός 2: Έστω $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ με $a<b$ και $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[a,\gamma]$ με $\gamma<b$. Λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ της f συγκλίνει όταν υπάρχει το $\lim\limits_{\gamma\to b^-}\int_a^\gamma f$ και είναι πεπερασμένος αριθμός. Γράφουμε τότε ότι

$$\int_a^b f = \lim_{\gamma\to b^-}\int_a^\gamma f.$$

Όταν το $\lim\limits_{\gamma\to b^-}\int_a^\gamma f = \pm\infty$, τότε γράφουμε ότι $\int_a^b f = \pm\infty$. Όταν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\gamma\to b^-}\int_a^\gamma f$ στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε λέμε ότι το $\int_a^b f$ αποκλίνει.

Σημείωση: 1) Πάλι, αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη ($a<b$ στο $\mathbb{R}$) τότε $\int_a^b f = \lim\limits_{\gamma\to b^-}\int_a^\gamma f$. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ της f ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f$ της f.

2) Οι ορισμοί 1, 2 ορίζουν το γενικευμένο ολοκλήρωμα 1ου είδους μιας συνάρτησης f ορισμένης σ' ένα ημιανοιχτό υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ (φραγμένο ή μη φραγμένο). Βασική προϋπόθεση για τον ορισμό είναι η f να είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υπ-διάστημα του πεδίου ορισμού της f. Αν I είναι το πεδίο ορισμού της f θα πρέπει η f να είναι σχεδόν παντού συνεχής στο I και επιπλέον η f να είναι φραγμένη σε κάθε υποδιάστημα $[\gamma,\delta]\subset I$ με $\gamma<\delta$ στο $\mathbb{R}$. Η f μπορεί να μην είναι φραγμένη στο I.

3) Αν το I είναι φραγμένο, ημιάνοιχτο διάστημα του $\mathbb{R}$ και f συνάρτηση, $f: I \to \mathbb{R}$ <u>φραγμένη</u> και <u>σχεδόν παντού συνεχής</u> στο I, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_I f$ της f ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f$ της f, όπου $a<b$ είναι τα άκρα του I. Ακόμα κι αν η f δεν ορίζεται στα άκρα a, b του I, μπορούμε να την ορίσουμε αυθαίρετα, και η επέκταση αυτή θα είναι Riemann ολοκληρώσιμη, λόγω του θεωρήματος Lebesgue.

<u>Ορισμός 3</u>: Έστω $a<b$ με $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ και $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα $[\gamma, \delta]$ με $a<\gamma<\delta<b$. Λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα ($2^{ου}$ είδους) της f στο (a,b), $\int_a^b f$, συγκλίνει όταν υπάρχει κάποιο $\gamma_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε τα <u>γενικευμένα ολοκληρώματα</u> ($1^{ου}$ είδους) $\int_a^{\gamma_0} f$ και $\int_{\gamma_0}^b f$ της f <u>συγκλίνουν</u>. Γράφουμε τότε $\int_a^b f = \int_a^{\gamma_0} f + \int_{\gamma_0}^b f$. Αν $\int_a^{\gamma_0} f = \int_{\gamma_0}^b f = +\infty$ τότε γράφουμε $\int_a^b f = +\infty$. Αν $\int_a^{\gamma_0} f = \int_{\gamma_0}^b f = -\infty$, τότε $\int_a^b f = -\infty$. Αν $\int_a^{\gamma_0} f$ συγκλίνει και $\int_{\gamma_0}^b f = \pm\infty$, τότε $\int_a^b f = \pm\infty$. Αν $\int_a^{\gamma_0} f = \pm\infty$ και $\int_{\gamma_0}^b f$ συγκλίνει, τότε $\int_a^b f = \pm\infty$. Όταν ένα τουλάχιστον από

τα $\int_a^{\gamma_0} f$, $\int_{\gamma_0}^b f$ αποκλίνει, τότε και το $\int_a^b f$ αποκλίνει.

Αν $\int_a^{\gamma_0} f = +\infty$ και $\int_{\gamma_0}^b f = -\infty$, ή, αν $\int_a^{\gamma_0} f = -\infty$ και $\int_{\gamma_0}^b f = +\infty$ τότε το $\int_a^b f$ αποκλίνει.

<u>Σημείωση</u>: Ο ορισμός για το γενικευμένο ολοκλήρωμα 2ου είδους $\int_a^b f$ της f είναι ανεξάρτητος του ενδιάμεσου σημείου $\gamma_0 \in (a,b)$. Μπορεί να δειχτεί ότι η συμπεριφορά των γενικευμένων ολοκληρωμάτων 1ου είδους $\int_a^{\gamma_0} f$ και $\int_a^{\gamma_1} f$ είναι ισοδύναμη για κάθε γ_0, γ_1 στο (a,b) αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα με άκρα γ_0, γ_1. Ανάλογα, ισοδύναμη συμπεριφορά παρουσιάζουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{\gamma_0}^b f$ και $\int_{\gamma_1}^b f$. για $\gamma_0, \gamma_1 \in (a,b)$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν I είναι υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ (ανοιχτό, κλειστό, ημιάνοιχτο, φραγμένο ή μη φραγμένο) και $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ σχεδόν παντού συνεχής και φραγμένη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I (δηλαδή, $\forall a<b \in \mathbb{R}$, $a,b \in I$, η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$), τότε ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_I f$ της f στο I.

Όταν το I είναι ημιάνοιχτό, έχουμε γενικευμένο ολοκλήρωμα 1ου είδους
Όταν το I είναι ανοιχτό, έχουμε γενικευμένο ολοκλήρωμα 2ου είδους
Όταν το I είναι κλειστό και φραγμένο, έχουμε το γνωστό ολοκλήρωμα Riemann (ορισμένο ολοκλήρωμα).

Συμπέρασμα: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_I f$ της f σε κάποιο υποδιάστημα I του $\mathbb{R}$ αποτελεί μία γνήσια επέκταση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) Όταν το I είναι μη φραγμένο διάστημα.
2) Όταν η f είναι μη φραγμένη στο I.

Πρέπει βέβαια η f να είναι σχεδόν παντού συνεχής στο I και φραγμένη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.

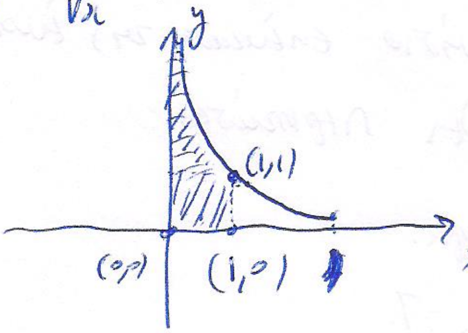
Συμβολισμός: Αν I υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ με άκρα $a<b$ στο $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ και $f: I\to\mathbb{R}$ συνάρτηση, τότε γράφουμε $\int_I f=\int_a^b f$ για το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο I, ακόμα και αν η f δεν ορίζεται στα άκρα a, b του I. Π.χ., γράφουμε $\int_2^3 f$ για μία f ορισμένη στο $(2,3)$, ή, στο $[2,3)$, ή στο $(2,3]$, ή στο $[2,3]$.

Παραδείγματα: 1) Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ συγκλίνει αφού η $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ είναι ορισμένη στο $(0,1]$ και ολοκληρώσιμη στο $[x,1]$, $\forall x\in(0,1]$, με

$$\int_x^1 f(t)\,dt=\int_x^1\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}\Big]_{t=x}^{t=1}=2-2\sqrt{x}.$$

Άρα, $\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{dt}{\sqrt{t}}=\lim_{x\to 0^+}(2-2\sqrt{x})=2$.

Συνεπώς, το γενικευμένο ολοκλήρωμα ($1^{ου}$ είδους) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ συγκλίνει και μάλιστα $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2$. Παρατηρούμε ότι η $\frac{1}{\sqrt{x}}$ είναι μη φραγμένη στο $(0,1]$ αφού $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$. Το $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ παριστάνει το εμβαδό του μη φραγμένου επίπεδου χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, τις ευθείες $x=0$, $x=1$ και $y=0$.

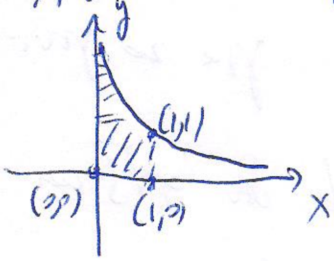


$x=0$ είναι κάθετη ασύμπτωτη του γραφήματος της $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

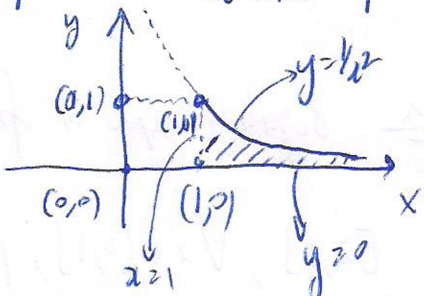
2) $\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$ αφού $\int_x^1 \frac{dt}{t} = \ln(t)\Big]_{t=x}^{t=1} = -\ln(x)$, $\forall x \in (0,1]$. Άρα,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[-\ln(x)\right] = +\infty.$$

Εδώ, το αντίστοιχο εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $y=0$, $x=0$, $x=1$, $y=1/x$ είναι άπειρο.

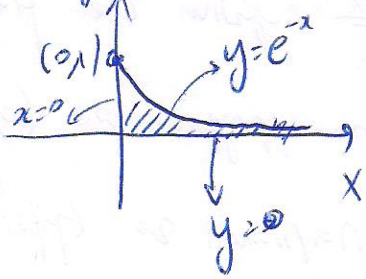


3) $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_{t=1}^{t=x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$$



Το εμβαδό του χωρίου (μη φραγμένου) ανάμεσα στις $x=1$, $y=0$, $y=1/x^2$ είναι ίσο με 1

4) $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right) = 1$$



Το εμβαδό του (μη φραγμένου) γεωμετρικού χωρίου ισούται με 1

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\,dx$ αποκλίνει αφού $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \sin(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-\cos(t)\right]_{t=0}^{t=x} =$

$= \displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-\cos(x))$ δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$ αφού γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\cos(x)$ στο $\overline{\mathbb{R}}$.

6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi$ (γενικευμένο ολοκλήρωμα 2ου είδους).

Πράγματι, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty}\text{Arctan}(t)\Big]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x\to+\infty}\text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.

και $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0\frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty}\left[\text{Arctan}(t)\right]_{t=x}^{t=0} = \lim_{x\to-\infty}(0-\text{Arctan}(x)) =$

$= -\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\text{Arctan}(x) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

7) $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-3x}\cos(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_2^x e^{-3t}\cos t\,dt$. Υπολογίζουμε πρώτα το

$$\int e^{-3t}\cos(t)\,dt = e^{-3t}\sin(t) - \int(-3)e^{-3t}\sin(t)\,dt = e^{-3t}\sin(t) + 3\int e^{-3t}\sin(t)\,dt =$$

$$= e^{-3t}\sin(t) + 3\left[-e^{-3t}\cos(t) - \int(-3)e^{-3t}(-1)\cos(t)\,dt\right] = e^{-3t}\sin(t) - 3e^{-3t}\cos(t) - 9\int e^{-3t}\cos(t)\,dt$$

$\Rightarrow 10\displaystyle\int e^{-3t}\cos(t)\,dt = e^{-3t}\sin(t) - 3e^{-3t}\cos(t) + c$, $t\in\mathbb{R}$. Άρα,

$$\int e^{-3t}\cos(t)\,dt = \frac{e^{-3t}\left[\sin(t) - 3\cos(t)\right]}{10} + c,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Έπεται τώρα ότι $\int_2^x e^{-3t}\cos(t)dt = \left[\frac{e^{-3t}}{10}\left[\sin(t)-3\cos(t)\right]\right]_{t=2}^{t=x} =$

$$= \frac{e^{-3x}}{10}\left[\sin(x)-3\cos(x)\right] - \frac{e^{-6}}{10}\left[\sin(2)-3\cos(2)\right], \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Αφού η συνάρτηση $\sin(x)-3\cos(x)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ γιατί $|\sin(x)-3\cos x|\leq 4$ $\forall x\in\mathbb{R}$, και $\lim_{x\to+\infty} e^{-3x}=0$, έπεται τελικά ότι

$$\int_2^{+\infty} e^{-3x}\cos(x)dx = -\frac{e^{-6}}{10}\left[\sin(2)-3\cos(2)\right].$$

Εργαζόμενοι όπως στα παραδείγματα 1, 2, 3 μπορούμε να δείξουμε την

<u>Πρόταση</u>: Αν $p>0$ τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα (για $a>0$):

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} \text{ συγκλίνει} \iff p<1.$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ συγκλίνει} \iff p>1$$

Εφόσον γνωρίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{x^p}$, $\forall p>0$, μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς τις τιμές των $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ και $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$, $\forall a>0$.

<u>Αλγεβρικές Ιδιότητες Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων</u>

Έστω $I\subset\mathbb{R}$ διάστημα και $f: I\to\mathbb{R}$, $g: I\to\mathbb{R}$ σχεδόν παντού συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες είναι φραγμένες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1) Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα (1ου, ή, 2ου είδους) $\int_I |f|$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και το $\int_I f$ και $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

2) Αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_I f$ και $\int_I g$ συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και το $\int_I (\lambda f+\mu g)$ και $\int_I(\lambda f+\mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

3) Αν $f \geq 0$ στο I, τότε είτε $\int_I f = a \in \mathbb{R}$ με $a \geq 0$, ή, $\int_I f = +\infty$

4) Αν $f \leq 0$ στο I, τότε είτε $\int_I f = a \in \mathbb{R}$, με $a \leq 0$, ή, $\int_I f = -\infty$

Σημείωση (i) Μπορεί το $\int_I f$ να συγκλίνει και $\int_I f^2 = +\infty$. Π.χ., αν $I=(0,1]$ και $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, τότε $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$, ενώ, $\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$.

(ii) Αν $\int_I f = \pm\infty$ και $\int_I g = \pm\infty$, τότε για τον υπολογισμό του $\int_I (f+g)$ ισχύουν οι γνωστοί κανόνες για τις απροσδιόριστες μορφές με τα $\pm\infty$. Π.χ., αν $\int_I f = \int_I g = +\infty$, τότε και $\int_I (f+g) = +\infty$, ενώ για τον υπολογισμό του $\int_I (f-g)$ πρέπει να ανατρέξουμε στον ορισμό λόγω της απροσδιοριστίας $\infty - \infty$.

Σχέση σειρών και γενικευμένων ολοκληρωμάτων

Ολοκληρωτικό Κριτήριο: Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f:(a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση.

Υποθέτουμε ότι:
(i) $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq a$.
(ii) f συνεχής
(iii) f φθίνουσα.

Τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει στο πραγματικό.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Γενικά, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \neq \sum_{n\geq 1}^{\infty} f(n)$!

<u>Εφαρμογή</u>: p-σειρές: Η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, με $p>0$, συγκλίνει στο πραγματικό $\Longleftrightarrow$ $p>1$.

Πράγματι, η $f(x)=\frac{1}{x^p}$, $x\geq 1$, $(p>0)$, είναι συνεχής, θετική και γν. φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ (αφού $f'(x)=-p x^{-1-p}<0$). Επίσης γνωρίζουμε ότι για $p>0$, το $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $p>1$. Άρα από το ολοκληρωτικό κριτήριο έχουμε ότι και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $p>1$

<u>Άσκηση</u>: Η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$ συγκλίνει στο πραγματικό. Πράγματι, αν $f(x)=\frac{\ln(x)}{x^{3/2}}$, $x\geq 1$, έχουμε ότι $\ln(x)\geq 0$ (αφού $x\geq 1$), άρα $f(x)\geq 0$ $\forall x\geq 1$. Επίσης, $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x^{3/2}-\frac{3}{2}x^{1/2}\ln(x)}{x^3}=\frac{x^{1/2}}{x^3}\left(1-\frac{3}{2}\ln(x)\right)$

Άρα, $f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow \ln(x)\geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x\geq e^{2/3}$. Δηλαδή η f είναι φθίνουσα στο $[e^{2/3},+\infty)$, συνεχής και μη αρνητική. Υπολογίζουμε το $\int_{e^{2/3}}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{3/2}}\,dx$

Αφού $\int \frac{\ln(x)}{x^{3/2}}\,dx = \int \ln(x)\cdot\left(-2x^{-1/2}\right)'dx = -\frac{2\ln(x)}{\sqrt{x}} + 2\int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $\forall x>0$,

έπεται ότι $\int_{e^{2/3}}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left[\frac{-2\ln(t)}{\sqrt{t}}\right]_{t=e^{2/3}}^{t=x} + 2\int_{e^{2/3}}^{x}\frac{dt}{t^{3/2}}\right] \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \int_{e^{2/3}}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{3/2}}\,dx = \frac{2\ln(e^{2/3})}{\sqrt{e^{2/3}}} - 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + 2\int_{e^{2/3}}^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}} =$$

$$= \frac{2\cdot 2/3}{e^{1/3}} - 0 + 2\int_{e^{2/3}}^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}.$$ Αφού $p = 3/2 > 1$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{e^{2/3}}^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ συγκλίνει. Άρα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$, σε πραγματικό αριθμό, από το ολοκληρωτικό κριτήριο.

Σημείωση: $\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f g'$

Κριτήρια Σύγκρισης

Πολλές φορές δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το $\int_a^b f$ αλλά θέλουμε να ξέρουμε αν συγκλίνει, ή, αν απειρίζεται, ή, αν αποκλίνει. Γι' αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε κριτήρια σύγκρισης, ανάλογα με τα αντίστοιχα των σειρών, στα οποία συγκρίνουμε το $\int_a^b f$ με κάποιο άλλο γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b g$ του οποίου η συμπεριφορά είναι γνωστή.

Κριτήριο Άμεσης Σύγκρισης: Έστω $a<b$ με $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ και $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $g:[a,b)\to\mathbb{R}$ μη αρνητικές συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα: (i) Αν $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[a,b)$ και $\int_a^b g$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και το $\int_a^b f$.

(ii) Αν $\int_a^b f = +\infty$ και $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[a,b)$, τότε και $\int_a^b g = +\infty$.

Γενικότερα ισχύει το ακόλουθο: Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: I \to \mathbb{R}$, $g: I \to \mathbb{R}$ μη αρνητικές συναρτήσεις με $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $\int_I g$ συγκλίνει, τότε και $\int_I f$ συγκλίνει.

(ii) Αν $\int_I f = +\infty$, τότε και $\int_I g = +\infty$.

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Το $\int_5^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ συγκλίνει γιατί $\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, $\forall x \geq 5$ και $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει αφού $p=2>1$. Άρα από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι $\int_5^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2}dx$ συγκλίνει, και άρα το $\int_5^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ συγκλίνει.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2+1}dx$ συγκλίνει αφού $0 \leq \frac{e^{-3x}}{x^2+1} < e^{-3x}$, $\forall x \geq 0$

και $\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-3t}dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}\right]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) = \frac{1}{3}$

Άρα, από το κριτήριο σύγκρισης είναι το $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2+1}dx$ συγκλίνει.

3) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}dx = -\infty$, γιατί όταν $0<x<1/e \Rightarrow \frac{1}{x} > e \Rightarrow \ln(1/x) > 1$. Άρα $-\frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, 1/e]$. Αφού $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x} = +\infty$ (γιατί $p=1$), το κριτήριο σύγκρισης δίνει $\int_0^{1/e} -\frac{\ln(x)}{x}dx = +\infty \Rightarrow \int_0^{1/e} \frac{\ln(x)}{x}dx = -\infty$.

Επίσης, $\int_{1/e}^{1} \frac{\ln(x)}{x}dx \in \mathbb{R}$, ως ορισμένο ολοκλήρωμα αφού η $\frac{\ln(x)}{x}$ είναι συνεχής στο $[1/e, 1]$. Άρα, $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_0^{1/e} \frac{\ln(x)}{x}dx + \int_{1/e}^1 \frac{\ln(x)}{x}dx = -\infty$.

Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης: Έστω $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ με $a<b$ και $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $g:[a,b)\to\mathbb{R}$ μη αρνητικές συναρτήσεις, με $g(x)>0$ $\forall x\in[a,b)$. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}=[0,+\infty]$

Υποθέτουμε ακόμη ότι οι f, g είναι σχεδόν παντού συνεχείς στο $[a,b)$ και φραγμένες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a,b)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $0<\lambda<+\infty$, τότε $\int_a^b f$ συγκλίνει $\iff \int_a^b g$ συγκλίνει

(ii) Αν $\lambda=0$ και $\int_a^b g$ συγκλίνει, τότε και $\int_a^b f$ συγκλίνει.

(iii) Αν $\lambda=+\infty$ και $\int_a^b g=+\infty$, τότε και $\int_a^b f=+\infty$

Ανάλογο κριτήριο ισχύει και για συναρτήσεις ορισμένες σε διαστήματα της μορφής $(a,b]$ με $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ και $b\in\mathbb{R}$. Εδώ μας ενδιαφέρει το $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Παραδείγματα: 1) $\int_1^{+\infty}(e^{1/x}-1)dx=+\infty$, αφού αν $f(x)=e^{1/x}-1$ και $g(x)=\frac{1}{x}$, $x\geq 1$, έχουμε $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$, $\forall x\geq 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1, \text{ ενώ, } \int_1^{+\infty}g(x)=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=+\infty$$

$(p=1)$

2) $\int_0^1 \frac{[illegible]}{x}dx$ συγκλίνει αφού $f(x)=\frac{\sin x}{x}>0$, $\forall x\in(0,1]$, και

$g(x)=1>0$, $\forall x\in(0,1]$. Έχουμε ότι $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

Αφού $\int_0^1 g(x)dx=1$, το ΚΟΣ δίνει ότι $\int_0^1 f$ συγκλίνει.

3) $\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ συγκλίνει: Το ολοκλήρωμα είναι $2^{ου}$ είδους. Γράφουμε

$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=\int_0^1\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ και εξετάζουμε τη σύγκλιση των δύο επιμέρους γενικευμένων ολοκληρωμάτων ($1^{ου}$ είδους)

Για το $\int_0^1 e^{-t}/\sqrt{t}\,dt$, θέτουμε $f(t)=e^{-t}/\sqrt{t}$, $g(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$, $\forall t\in(0,1]$

Έτσι, $f(t)>0$, $g(t)>0$, $\forall t\in(0,1]$ ενώ $\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to0^+}e^{-t}=1$

Αφού $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}=2$, συγκλίνει $\overset{ΚΟΣ}{\Longrightarrow}$ $\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ συγκλίνει.

Για το $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$, θέτουμε $f(t)=\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, $g(t)=\frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}}$, $\forall t\geq1$

Τότε, $f(t)>0$ και $g(t)>0$, $\forall t\geq1$, ενώ, $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\frac{t^{3/2}}{e^{-t/2}}=$

$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{t/2}}\overset{DLH}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}e^{t/2}}=0$. Επίσης, $\int_1^{+\infty}g(t)dt=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}}dt$

συγκλίνει από ΚΣ αφού $0\leq\frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}}<\frac{1}{t^{3/2}}$, $\forall t>0$ και $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$

συγκλίνει ($p=3/2$). Άρα, $\int_1^{+\infty}g$ συγκλίνει και $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=0$, και $0<f$, $0<g$.

Από ΚΟΣ $\Rightarrow$ $\int_1^{+\infty}f=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ συγκλίνει. Άρα συγκλίνει και το $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=$

$=\int_0^1 e^{-t}/\sqrt{t}\,dt+\int_1^{+\infty}e^{-t}/\sqrt{t}\,dt$.

Άσκηση: Το $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει.

Πράγματι, $\int_1^{x} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^{x} \frac{1}{\sqrt{t}} (\sin(t))'\,dt = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\Big]_{t=1}^{t=x} - \int_1^{x} \sin(t)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) t^{-3/2}\,dt$

$\Rightarrow \int_1^{x} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} - \sin(1) + \frac{1}{2}\int_1^{x} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\,dt$

Αφού $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$, έχουμε ότι $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx = -\sin(1) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,dx$

Το γενικευμένο $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,dx$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης

αφού $\left|\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$, $\forall x \geq 1$, και $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ συγκλίνει

$(p = 3/2 > 1)$. Άρα, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^{3/2}}\,dx$ συγκλίνει $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,dx$

συγκλίνει.

18