Ιδιότητες Συνεχών Συναρτήσεων ορισμένων σε διαστήματα του $\mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα</u> (Bolzano). Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$ και $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι $f(a)f(b)<0$. Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=0$.

<u>Απόδ</u>: Μπορούμε να θέσουμε $a_0=a$, $b_0=b$ και $I_0=[a_0,b_0]$. Ας υποθέσουμε ότι $f(\xi)\neq 0$, $\forall \xi\in(a,b)$. Τότε $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$. Άρα, είτε $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, είτε $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)<0$. Στην 1η περίπτωση θέτουμε $I_1=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ ενώ στη δεύτερη θέτουμε $I_1=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $I_1=[a_1,b_1]\subset I_0$, και άρα $a_0<a_1<b_1<b_0$, και $f(a_1)f(b_1)<0$.

Αφού $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$, θα έχουμε ότι είτε $f(a_1)f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0$, είτε ότι $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)f(b_1)<0$. Θέτουμε $I_2=[a_2,b_2]$ εκείνο από τα υπο-διαστήματα $\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$ και $\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_2\right]$ για το οποίο $f(a_2)f(b_2)<0$. Παρατηρούμε ότι $I_2\subset I_1$, άρα $a_0<a_1<a_2<b_2<b_1<b_0$ και ότι

$$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(b_0-a_0)=\frac{1}{2^2}(b-a),\quad b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά: $\forall n\in\mathbb{N}$, κατασκευάζουμε διάστημα $I_n=[a_n,b_n]$ ώστε $I_{n+1}\subset I_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(a_n)f(b_n)<0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Έπεται τώρα ότι $a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή, $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}\uparrow$ και $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}\downarrow$. Επιπλέον, $a_n\leq b$ και $b_n\geq a$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή οι $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι μονότονες και φραγμένες ακολουθίες στο $[a,b]$.

Από το Αξίωμα Πληρότητας έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}a_n$ και $\lim_{n\to\infty}b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί!

Επίσης, $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \to 0$. Άρα, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi \in [a,b]$ αφού $a_n, b_n \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, $f(a_n)f(b_n) < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Όμως, $a_n \to \xi$ και $b_n \to \xi$ και f συνεχής στο $[a,b]$. Συνεπώς έχουμε ότι $f(a_n) \to f(\xi)$ και $f(b_n) \to \xi$. Άρα, $f(a_n)f(b_n) \to [f(\xi)]^2$ και $f(a_n)f(b_n) < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $[f(\xi)]^2 \leq 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$. ΑΤΟΠΟ.
Πρέπει λοιπόν $f(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in (a,b)$.

<u>Θεώρημα</u> (Ενδιάμεσης Τιμής). Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω $a < b$ στοιχεία του I. Αν $f(a) \neq f(b)$, τότε το διάστημα με άκρα τα $f(a)$ και $f(b)$ είναι υποσύνολο του πεδίου τιμών της f. Με άλλα λόγια, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ανάμεσα στους $f(a)$ και $f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f(\xi) = \lambda$.

<u>Απόδ</u>: Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, ανάμεσα στους $f(a)$ και $f(b)$. Ορίζουμε την $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \lambda$, $\forall x \in [a,b]$. Τότε g συνεχής και $g(a)g(b) < 0$ (αφού λ ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(b)$). Από το Θεώρ. Bolzano βρίσκουμε $\xi \in (a,b)$ με $g(\xi) = 0$. Τότε, $f(\xi) = \lambda$

<u>Πόρισμα</u>: $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε το πεδίο τιμών της f, το $f(I)$, είναι διάστημα.

<u>Απόδ</u>: Ένα υποσύνολο $J \subset \mathbb{R}$ είναι διάστημα $\iff \forall \lambda_1, \lambda_2$ στοιχεία του J, έχουμε ότι $(\lambda_1, \lambda_2) \subset J$. Το πόρισμα τώρα έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Θεώρημα (Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής) Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε το πεδίο τιμών της f είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\gamma,\delta]$ του $\mathbb{R}$. Κατά συνέπεια $\gamma\leq f(x)\leq\delta$ $\forall x\in[a,b]$ και υπάρχουν x_1, x_2 στοιχεία του $[a,b]$ με $\gamma=f(x_1)$ και $\delta=f(x_2)$. Άρα, $\gamma=\min f$ και $\delta=\max f$, όπου

$$\min f=\min\left\{f(x): x\in[a,b]\right\} \quad \text{και} \quad \max f=\max\left\{f(x): x\in[a,b]\right\}.$$

Απόδ: Θέτουμε $J=f([a,b])$, το πεδίο τιμών της f. Από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε ότι το J είναι ένα υπο-διάστημα του $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι J φραγμένο. Σε αντίθετη περίπτωση, υπάρχει $(y_n)_{n\geq1}$ ακολουθία στοιχείων του J με $y_n\to+\infty$ ή, $y_n\to-\infty$. Όμως, $y_n\in J \Rightarrow y_n=f(x_n)$ με $x_n\in[a,b]$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, αφού $(x_n)_{n\geq1}$ φραγμένη, βρίσκουμε $\xi\in[a,b]$ και υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq1}$ της $(x_n)_{n\geq1}$ με $x_{k_n}\to\xi$. Επίσης, η f είναι συνεχής. Άρα, $f(x_{k_n})\to f(\xi) \Rightarrow y_{k_n}\to f(\xi)\in\mathbb{R}$, άτοπο γιατί $y_{k_n}\to\pm\infty$, ως υπακολουθία της $(y_n)_{n\geq1}$.

Έπεται λοιπόν ότι J φραγμένο διάστημα. Έστω $\gamma\leq\delta$ τα άκρα του J. (η f θα μπορούσε να ήταν σταθερή). Θα δείξουμε τώρα ότι $\gamma\in J$ και $\delta\in J$. Πράγματι, υπάρχει ακολουθία $(z_n)_{n\geq1}$ στοιχείων του J με $z_n\to\gamma$ (αφού γ άκρο του J). Άρα υπάρχει και $(w_n)_{n\geq1}$ ακολουθία στοιχείων του $[a,b]$ με $f(w_n)=z_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Εφαρμόζοντας πάλι το Θ. Bolzano-Weierstrass βρίσκουμε $\eta \in [a,b]$ και υπακολουθία $(u_{k_n})_{n\geq 1}$ της $(u_n)_{n\geq 1}$ με $u_{k_n} \to \eta \Longrightarrow f(u_{k_n}) \to f(\eta)$ αφού f συνεχής. Άρα, $z_{k_n} \to f(\eta)$ και $z_{k_n} \to \gamma$ αφού $z_n \to \gamma$.

Συνεπώς, $\gamma = f(\eta) \in J$. Παρόμοια, δείχνουμε ότι $\delta \in J$.

Άρα, $J = [\gamma, \delta]$ και $\gamma = \min f$, $\delta = \max f$.

<u>Θεώρημα</u> (Μονοτονίας). Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1. Τότε η f είναι γνησίως μονότονη και το πεδίο τιμών της $f(I)$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα.

<u>Απόδ:</u> Έστω $a<b$ στο I. Αφού f 1-1 έχουμε ότι $f(a) \neq f(b)$. Άρα, είτε $f(a)<f(b)$, είτε $f(a)>f(b)$. Θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα όταν $f(a)<f(b)$, και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα όταν $f(a)>f(b)$. Στην ουσία μόνο η πρώτη περίπτωση ($f(a)<f(b)$) χρειάζεται απόδειξη διότι αν $f(a)>f(b)$ μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = -f(x)$, $x \in I$. Τότε $g(a)<g(b)$, g συνεχής και 1-1 στο I. Άρα, g γν. αύξουσα $\Rightarrow$ f γν. φθίνουσα.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f(a)<f(b)$ και δείχνουμε ότι f γν. αύξουσα. Καταρχήν δείχνουμε ότι $f(a)<f(\gamma)<f(b)$ όταν $a<\gamma<b$. Αν είχαμε $f(\gamma)<f(a)$ για κάποιο $\gamma \in (a,b)$, τότε $f(\gamma)<f(a)<f(b)$. Το Θεώρ. Ενδιάμεσης τιμής μας δίνει $\xi_1 \in (\gamma, b)$ με $f(\xi_1) = f(a)$ και $\xi_1 > \gamma > a$. Άτοπο, γιατί f 1-1. Άρα, $f(\gamma) > f(a)$, $\forall \gamma \in (a,b)$

Ανάλογα έχουμε ότι $f(\gamma) < f(b), \forall \gamma \in (a,b)$. γιατί αν $f(\gamma) > f(b)$, για κάποιο $\gamma \in (a,b)$, τότε $f(\gamma) > f(b) > f(a)$ και άρα, από το Θεώρ. Ενδιάμεσων τιμών, θα υπάρχει $\xi_2 \in (a,\gamma)$ με $f(\xi_2) = f(b)$. Άτοπο, γιατί $\xi_2 < b$ και f 1-1. Δείξαμε λοιπόν ότι $f(a) < f(\gamma) < f(b), \forall \gamma \in (a,b)$

Έπεται ότι η f είναι γν. αύξουσα στο $[a,b]$ γιατί αν $a \le x_1 < x_2 \le b$ τότε $f(x_1) < f(b)$ και $x_2 \in (x_1, b)$. Παίρνοντας "a" $= x_1$ έχουμε ότι $f(x_1) < f(x_2) < f(b)$. Άρα, $f \uparrow$ στο $[a,b]$.

Έστω τώρα $\gamma \in I$, $\gamma < a$. Αν $f(\gamma) > f(a)$ τότε είτε $f(\gamma) > f(b)$, είτε $f(\gamma) < f(b)$. Στην 1η περίπτωση, $f(\gamma) > f(b) > f(a) \Rightarrow f(b) = f(\xi_3)$ για κάποιο $\xi_3 \in (\gamma, a)$, από το Θεώρ. Ενδιάμεσων τιμών. Άτοπο, γιατί $\xi_3 < a < b$. Αν $f(\gamma) < f(b)$, τότε $f(a) < f(\gamma) < f(b) \Rightarrow f(\gamma) = f(\xi_4)$ για κάποιο $\xi_4 \in (a,b)$, πάλι από το Θεώρ. Ενδιάμ. τιμών. Άτοπο γιατί $\xi_4 > \gamma$ και f 1-1. Άρα πρέπει $f(\gamma) < f(a), \forall \gamma < a$ με $\gamma \in I$.

Έστω τώρα $x_1 < x_2 \le a$ με x_1, x_2 στο I. Τότε, $f(x_1) < f(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow f \uparrow$ στο $[x_1, a] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Έστω $x_1 < x_2 \le b$ με $x_1, x_2 \in I$. Αν $x_1 \ge a$, τότε $f \uparrow$ στο $[a,b] \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Αν $x_1 < a$, τότε $f(x_1) < f(a)$ και $a < x_2 \le b$ $\Rightarrow f(a) < f(x_2) \le f(b) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα, $f \uparrow$ στο $I \cap (-\infty, b]$

Έστω $\delta \in I$, $\delta > b$. Τότε, $f(\delta) > f(b)$. Αν είχαμε $f(\delta) < f(b)$ τότε είτε $f(\delta) < f(a)$ είτε $f(\delta) > f(a)$. Αν $f(\delta) < f(a) < f(b) \Rightarrow$ $\exists\, \xi_5 \in (b,\delta)$ με $f(\xi_5) = f(a)$, από θεωρ. ενδ. τιμής. Άτοπο γιατί $\xi_5 > a$ και f 1-1. Αν $f(\delta) > f(a)$, τότε $f(a) < f(\delta) < f(b)$ $\Rightarrow \exists\, \xi_6 \in (a,b)$ με $f(\xi_6) = f(\delta)$, από θεωρ. ενδ. τιμή. Άτοπο και πάλι αφού f 1-1 και $\xi_6 < b < \delta$. Άρα $f(\delta) > f(b)$, αν $\delta > b$

Α $x_1 < x_2$ στο I με $b \le x_1$, τότε $f(b) < f(x_2)$ και $f \uparrow$ στο $[b, x_2]$.
Αφού $x_1 \in [b, x_2] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow$ στο $[b, +\infty) \cap I$.

Άρα, $f \uparrow$ στο $(-\infty, b] \cap I$ και $f \uparrow$ στο $[b, +\infty) \cap I$. Έπεται ότι $f \uparrow$ στο I αφού $b \in I$. Άρα f γνησίως μονότονη.

Τέλος, δείχνουμε ότι το πεδίο τιμών $f(I)$ της f είναι ανοιχτό διάστημα. Έστω $y_0 \in f(I)$. Θα βρούμε ένα ανοιχτό υποδιάστημα του $f(I)$ που περιέχει το y_0 στο εσωτερικό του. Έστω $x_0 \in I$ με $f(x_0) = y_0$. Αφού I ανοιχτό διάστημα $\Rightarrow \exists\, x_1 < x_2$ στο I με $x_1 < x_0 < x_2$ $\xRightarrow[\text{μονότονη}]{f \text{ γνήσια}}$ $f(x_0)$ βρίσκεται γνήσια μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$ που ανήκουν στο $J = f(I)$. $\Rightarrow$ $y_0 = f(x_0)$ δεν είναι άκρο του $f(I)$, $\forall y_0 \in f(I)$ $\Rightarrow$ $f(I)$ ανοιχτό διάστημα. (Το $f(I)$ είναι διάστημα λόγω του πορίσματος του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής)

<u>Θεώρημα</u> (Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης). Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα. Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1. Αν $J = f(I)$ είναι το πεδίο τιμών της f τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) J είναι ανοιχτό διάστημα.

(2) $f^{-1}: J \to I$, η αντίστροφη της f είναι συνεχής.

<u>Απόδ</u>: Το (1) προκύπτει από το θεώρημα μονοτονίας. Αφού f 1-1, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: J \to I$ της f. Θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής. Έστω $y_0 \in J$ και $(y_n)_{n \ge 1}^{\infty}$ ακολουθία στοιχείων του J με $y_n \to y_0$.
Πρέπει να δείξουμε ότι $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$

Αν αυτό δεν συνέβαινε, θα υπήρχε $\epsilon_0>0$ και υπακολουθία $(y_{k_n})_{n\geq 1}$ της $(y_n)_{n\geq 1}$ ώστε, είτε $f^{-1}(y_{k_n}) \leq f^{-1}(y_0)-\epsilon_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, είτε $f^{-1}(y_{k_n})\geq f^{-1}(y_0)+\epsilon_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Επίσης, θεωρώντας το $\epsilon_0>0$ αρκετά μικρό, μπορούμε να έχουμε ότι $f^{-1}(y_0)\pm\epsilon_0$ ανήκουν στο I. Από το θεώρημα μονοτονίας γνωρίζουμε ότι η f είναι γνήσια μονότονη. Έστω ότι η f είναι γνήσια αύξουσα. Αν $f^{-1}(y_{k_n}) \leq f^{-1}(y_0)-\epsilon_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $f(f^{-1}(y_{k_n}))\leq f[f^{-1}(y_0)-\epsilon_0]$ $\forall n\in\mathbb{N}$, άρα $y_{k_n}\leq f[f^{-1}(y_0)-\epsilon_0]<f[f^{-1}(y_0)]=y_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Για $n\to\infty$ παίρνουμε $y_0\leq f[f^{-1}(y_0)-\epsilon_0]<y_0$, άτοπο. Αν $f^{-1}(y_{k_n})\geq f^{-1}(y_0)+\epsilon_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $y_{k_n}\geq f[f^{-1}(y_0)+\epsilon_0]>f[f^{-1}(y_0)]=y_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα, με $n\to\infty$ έχουμε $y_0\geq f[f^{-1}(y_0)+\epsilon_0]>y_0$, άτοπο. Παρόμοια αποδεικνύουμε το άτοπο αν η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα, $f^{-1}(y_n)\to f^{-1}(y_0)$ και συνεπώς η f^{-1} συνεχής.

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $-\infty\leq a<b\leq+\infty$ και $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής και 1-1. Τότε υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ και ανήκουν στο $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Επιπλέον, το πεδίο τιμών της f είναι το ανοιχτό διάστημα με άκρα τα $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

<u>Απόδ</u>: Από το θεωρ. μονοτονίας έχουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι <u>γνήσια αύξουσα</u>. (Αν η f ήταν γν. φθίνουσα, τότε η $-f$ θα ήταν γν. αύξουσα και θα εργαζόμασταν με την $-f$).

Δείχνουμε πρώτα ότι $\lim_{x\to b} f(x)$ υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$. Υπάρχει μία γνησίως αύξουσα ακολουθία $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ στοιχείων του (a,b) με $b_n\to b$. Τότε η ακολουθία $(f(b_n))_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα υπάρχει το $\lambda=\lim_{n\to\infty} f(b_n)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Έστω $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία στο (a,b) με $x_n\to b$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n)\to\lambda$. Κατ' αρχήν θα βρούμε μία υπακολουθία της $(f(x_n))_{n\geq 1}^{\infty}$ που συγκλίνει στο λ. Πράγματι, αφού $x_n\to b$ και $b_n\to b$ μπορούμε να βρούμε υπακολουθίες $(x_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(b_{m_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $b_{m_{n-1}}<x_{k_n}<b_{m_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Έπεται ότι $f(b_{m_{n-1}})<f(x_{k_n})<f(b_{m_n})$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Από Sandwich λαμβάνουμε ότι $f(x_{k_n})\to\lambda$. Συμπεραίνουμε ότι <u>κάθε</u> υπακολουθία της $(f(x_n))_{n\geq 1}^{\infty}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο λ. Αναγκαία, θα έχουμε ότι $f(x_n)\to\lambda$. Ανάλογα έχουμε ότι $\lim_{x\to a} f(x)=\mu\in\overline{\mathbb{R}}$ (εδώ, $\mu\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$). Αν $x\in I=(a,b)$, τότε υπάρχουν ακολουθίες $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ στο (a,b) με $a_n<x<b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και $a_n\searrow a$, $b_n\nearrow b$. Άρα, $f(a_n)<f(x)<f(b_n)$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)<f(a_1)<f(x)<f(b_1)< \lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lambda \Rightarrow$ $\mu<f(x)<\lambda$, $\forall x\in(a,b) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(I)\subset(\mu,\lambda)$. Αντίστροφα, αν $y\in(\mu,\lambda)\Rightarrow \mu<y<\lambda \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)<y<\lim_{x\to b} f(x) \Rightarrow \exists\, n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $f(a_{n_0})<y<f(b_{n_0})$.

Άρα, $y\in f(I)$ από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.