Αναπτύγματα Taylor - Maclaurin

Ορισμός: Η συνάρτηση $f(x)$ αναπτύσσεται κατά Taylor γύρω από το $x_0 \in \mathbb{R}$ όταν υπάρχουν $\delta > 0$ και μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, κέντρου x_0, έτσι ώστε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Όταν $x_0 = 0$, λέμε ότι η $f(x)$ αναπτύσσεται κατά Maclaurin.

Παρατήρηση: Όταν η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, αναπτύσσεται κατά Taylor γύρω από το x_0, τότε αναγκαία $\delta \leq R$, όπου $R > 0$, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

Παραδείγματα: 1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \neq 1$, αναπτύσσεται κατά Maclaurin ως εξής

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in (-1,1). \quad (\text{Γεωμετρική σειρά})$$

2) $f(x) = e^x$, αναπτύσσεται κατά Maclaurin: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3) $f(x) = \sin(x)$ και $g(x) = \cos(x)$, αναπτύσσονται κατά Maclaurin:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{και} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Παρατήρηση: Τα αναπτύγματα Maclaurin 1-3 είναι πολύ βασικά γιατί μέσω αυτών και τα θεωρήματος παραγώγισης δυναμοσειρών και μετάθεσης αντικαταστάσεων, μπορούμε να βρίσκουμε αναπτύγματα Taylor άλλων συναρτήσεων.

Παρατηρήσεις: 1) Ανάπτυγμα Taylor της $f(x)=e^x$ γύρω από το $x_0=-1$:

Αφού $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι $e^{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^x=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!},\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e\,n!}(x+1)^n,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

2) Ανάπτυγμα Taylor της $f(x)=\sin(x)$ γύρω από το $x_0=1$:

Έχουμε ότι $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα

$$\sin(x-1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Όμως, ~~$\sin(x+1)=\sin(x)\cos(1)+\cos(x)\sin(1)$~~

$$\sin(x)=\sin(x-1+1)=\sin(x-1)\cos(1)+\cos(x-1)\sin(1),\ \forall x\in\mathbb{R},$$

και αφού $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, έχουμε επίσης ότι $\cos(x-1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα, $$\sin(x)=\cos(1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sin(1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή, $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$, $\forall x\in\mathbb{R}$, με

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n\sin(1)}{(2n)!}\quad\text{και}\quad a_{2n+1}=\frac{(-1)^n\cdot\cos(1)}{(2n+1)!},\ \forall n=0,1,2,\dots$$

3) Ανάπτυγμα Maclaurin της $f(x)=\frac{1}{x+1}$: Αφού $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $|x|<1$,

έχουμε ότι $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot(-1)^n$, $\forall x\in(-1,1)$.

4) Maclaurin της $f(x)=\frac{1}{3x+7}=\frac{1}{7\left[1+\frac{3x}{7}\right]}=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{3x}{7}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{7^{n+1}}x^n$

με $\left|\frac{3x}{7}\right|<1$, δηλαδή, όταν $|x|<\frac{7}{3}$, ή, $-\frac{7}{3}<x<\frac{7}{3}$

5) Maclaurin της $f(x) = \dfrac{3x}{x-2} = \dfrac{3x}{2\left(\frac{x}{2}-1\right)} = \dfrac{-3x}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = -\dfrac{3x}{2}\sum_{n\geq 0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$, όταν $|x/2|<1$. Άρα, $f(x) = -\dfrac{3x}{2}\sum_{n\geq 0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^n = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\dfrac{-3x}{2^{n+1}}x^n = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\dfrac{-3}{2^{n+1}}x^{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n\geq 1}\dfrac{-3}{2^n}x^n$, όταν $|x|<2$.

6) Maclaurin της $f(x) = e^{x^3-1} = e^{x^3}e^{-1} = \dfrac{1}{e}e^{x^3}$. Αφού $e^x = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι $e^{x^3} = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\dfrac{(x^3)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\dfrac{x^{3n}}{n!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{e\,n!}x^{3n}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

7) Maclaurin της $f(x) = \dfrac{3x^2-2}{4x-3}$. Πρώτα διαιρούμε τα πολυώνυμα γιατί ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από του παρονομαστή.

$$\begin{array}{l|l} 3x^2-2 & 4x-3 \\ \hline -3x^2+\frac{9x}{4} & \frac{3}{4}x+\frac{9}{16} \\ \hline \frac{9x}{4}-2 & \\ -\frac{9x}{4}+\frac{27}{16} & \\ \hline \frac{27}{16}-2=-\frac{5}{16} & \end{array}$$

Άρα, $3x^2-2 = (4x-3)\left(\dfrac{3x}{4}+\dfrac{9}{16}\right)-\dfrac{5}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{3x}{4}+\dfrac{9}{16}-\dfrac{5}{16}\,\dfrac{1}{4x-3}$

και $\dfrac{1}{4x-3} = -\dfrac{1}{3-4x} = -\dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{1-\frac{4x}{3}} =$

$= -\dfrac{1}{3}\sum_{n\geq 0}^{\infty}\left(\dfrac{4x}{3}\right)^n$, όταν $\left|\dfrac{4x}{3}\right|<1$.

Άρα, $f(x) = \dfrac{3x}{4}+\dfrac{9}{16}-\dfrac{5}{16}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\sum_{n\geq 0}^{\infty}\dfrac{4^n}{3^n}x^n$, με $|x|<3/4$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{3x}{4}+\dfrac{9}{16}+\dfrac{5}{48}\left[1+\dfrac{4}{3}x+\sum_{n\geq 2}^{\infty}\dfrac{4^n}{3^n}x^n\right] = \dfrac{9}{16}+\dfrac{5}{48}+\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{48}\right)x +$

$+\dfrac{5}{48}\sum_{n\geq 2}\dfrac{4^n}{3^n}x^n$, αν $|x|<\dfrac{3}{4}$. Άρα, $f(x) = \dfrac{2}{3}+\dfrac{8x}{9}+\sum_{n\geq 2}^{\infty}\dfrac{5}{48}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n x^n$,

όταν $-\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{3}{4}$.

8) Μελέτη της $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$: Το σχήμα της παράστασης και η παραγώγιση μας παραπέμπει στην περίπτωση της $\frac{1}{x^2+1}$.

Πράγματι, $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\forall x\in(-1,1)$. Άρα $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

$\forall x\in(-1,1)$. Από το Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειράς έχουμε ότι:

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(2n)\,x^{2n-1}, \quad \text{αν } |x|<1$$

$$\Rightarrow -\frac{2x}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n)x^{2n-1}, \quad \text{αν } |x|<1.$$

Όταν $x\neq 0$, $|x|<1$, έχουμε ότι $\frac{-2}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n)x^{2n-2}$, $0<|x|<1$

Παρατηρούμε ότι ο σταθερός όρος της δυναμοσειράς (που αντιστοιχεί για $n=1$) είναι ο $(-1)\cdot 2=-2=\frac{-2}{(1+0^2)^2}$. Άρα, η ισότητα παραπάνω ισχύει και για $x=0$. Συνεπώς, $\frac{-2}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n)x^{2n-2}$, αν $|x|<1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\,x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n}, \quad \forall x\in(-1,1)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Σε αρκετά παραδείγματα έχουμε $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ για κάποιο $\delta>0$, ενώ η $f(x)$ ορίζεται σε σύνολο μεγαλύτερο του $(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Δεν είναι λοιπόν απαραίτητο για μία συνάρτηση να ισούται με μία δυναμοσειρά σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Όταν μία συνάρτηση $f(x)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ γύρω από το $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, στο οποίο η f ισούται με την $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, και υπάρχει σχέση ανάμεσα στους συντελεστές $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ της σειράς Taylor και των παραγώγων $f^{(n)}(x_0)$ της f στο κέντρο $x=x_0$.

<u>Πρόταση</u>: Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, τότε

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = a_n \quad , \quad \forall n=0,1,2,\dots$$

<u>Απόδ</u>: Από το Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειράς γνωρίζουμε ότι η f παραγωγίσιμη στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Επίσης,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad |x-x_0|<\delta.$$

Για $x=x_0 \Rightarrow f(x_0) = a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}$

Έχουμε ότι $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$, $|x-x_0|<\delta$.

$\Rightarrow f'(x_0) = a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}$

Η f' είναι δυναμοσειρά κέντρου x_0 με ακτίνα σύγκλισης $\geq \delta > 0$

Άρα, $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$, $|x-x_0|<\delta$.

$\Rightarrow f''(x) = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$, $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f''(x_0) = 2a_2$

Επαγωγικά βρίσκουμε ότι, για $k\in\mathbb{N}$, έχουμε

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,a_n(x-x_0)^{n-k}, \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta).$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x_0) = k(k-1)\cdots(k-k+1)\,a_k = k(k-1)\cdots 2\cdot 1\, a_k = (k!)\,a_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

<u>Εφαρμογή</u>: Αν $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)!} 2^n x^{2n-1}$, βρείτε τις παραγώγους

$f^{(100)}(0)$ και $f^{(101)}(0)$.

Έχουμε $\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$ = συντελεστής του x^{100} στη δυναμοσειρά.

Όμως, η δυναμοσειρά έχει μη μηδενικούς προσθετέους της μορφής $a_n x^n$ μόνο όταν n = περιττός. Άρα, $f^{(100)}(0)=0$. Επίσης,

$\frac{f^{(101)}(0)}{(101)!}$ = συντελεστής του x^{101} στη δυναμοσειρά. Βρίσκουμε $n\in\mathbb{N}$

ώστε $2n-1=101 \Rightarrow n=51$. Άρα, $\frac{f^{(101)}(0)}{(101)!} = \frac{(-1)^{51}}{(51+3)!}2^{51} = \frac{2^{51}}{54!}$

$$\Rightarrow f^{(101)}(0) = 2^{51}\frac{(101)!}{(54)!}$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $x_0\in\mathbb{R}$, $\delta>0$ και $f:(x_0-\delta, x_0+\delta)\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Τότε ονομάζουμε σειρά Taylor της f στο $x=x_0$ τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Όταν $x_0=0$, τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ λέγεται σειρά Maclaurin της $f(x)$

<u>Παρατήρηση</u>: 1) Δεν είναι γενικά σωστό ότι $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, ακόμα κι αν η ακτίνα σύγκλισης της σειράς Taylor είναι μεγαλύτερη, ή ίση της $\delta>0$. Π.χ. για τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

έχουμε ότι $f^{(n)}(0)=0$, $\forall n=0,1,2\ldots$

Άρα η σειρά Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Προφανώς, $f(x)\neq 0$, $\forall x\neq 0$.

2) Από την πρόταση έχουμε ότι αν $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

τότε αναγκαία $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

Με άλλα λόγια, κάθε δυναμοσειρά με κέντρο x_0 και θετικής ακτίνας σύγκλισης, είναι η σειρά Taylor του εαυτού της γύρω από το x_0.

Ο τύπος Taylor μας δίνει μία ικανή συνθήκη για να αναπτύσσεται κατά Taylor, μία συνάρτηση $f(x)$, γύρω από κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$

Θεώρημα 1: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $C>0$ τέτοιο ώστε:

$$|f^{(n)}(x)| \le C^n, \quad \forall n=0,1,2,\dots, \quad \forall x \in I.$$

Τότε,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in I, \forall x_0 \in I.$$

Δηλαδή η f αναπτύσσεται κατά Taylor γύρω από κάθε $x_0 \in I$

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in I$ και $x \in I$. Τότε, αν $n \in \mathbb{N}$, ο τύπος Taylor δίνει κάποιο $\xi \in I$, με ξ ανάμεσα στα x, x_0, ώστε

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Έπεται ότι
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \le \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \le \frac{C^n}{(n+1)!}|x-x_0|^n, \quad \forall x \in I, \forall x_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}$$

Αν $x, x_0 \in I$ είναι σταθερά, το κριτήριο λόγου μας δίνει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{C^n}{(n+1)!}|x-x_0|^n = 0$. Άρα, $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x, x_0 \text{ στο } I.$$

Παράδειγμα: Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=e^x\sin(x)$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin σε όλο το $\mathbb{R}$. Δηλαδή, $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \forall x\in\mathbb{R}$.

Πράγματι, $f'(x)=e^x\sin(x)+e^x\cos(x)=e^x[\sin(x)+\cos(x)]$.

$$f''(x)=e^x[\sin(x)+\cos(x)]+e^x[\cos(x)-\sin(x)]=2e^x\cos(x).$$

$$f'''(x)=2[e^x\cos(x)-e^x\sin(x)]=2e^x[\cos(x)-\sin(x)]$$

$$f^{(4)}(x)=2[e^x\cos(x)-e^x\sin(x)-e^x\sin(x)-e^x\cos(x)]=-4e^x\sin(x)=-4f(x)$$

Άρα, $f^{(4)}=-4f$. Συνεπώς, $f^{(5)}=-4f^{(1)}, f^{(6)}=-4f^{(2)}, f^{(7)}=-4f^{(3)}$ και $f^{(8)}=-4f^{(4)}=16f$. Συμπεραίνουμε (με εύκολη επαγωγή) ότι

$$f^{(4n)}=(-1)^n4^nf, \quad f^{(4n-1)}=(-1)^{n-1}4^{n-1}f^{(3)}, \quad f^{(4n-2)}=(-1)^{n-1}4^{n-1}f^{(2)}$$

και $f^{(4n-3)}=(-1)^{n-1}4^{n-1}f^{(1)}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι $|f'(x)|\leq 2e^x$, $|f''(x)|\leq 2e^x$, $|f^{(3)}(x)|\leq 4e^x$, και $|f^{(4)}(x)|\leq 4e^x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς έχουμε ότι:

$$|f^{(4n)}(x)|\leq 4^ne^x, \quad |f^{(4n-1)}(x)|\leq 4^ne^x, \quad |f^{(4n-2)}(x)|\leq 2\cdot 4^{n-1}e^x<4^ne^x$$

και $|f^{(4n-3)}(x)|\leq 4^{n-1}|f'(x)|\leq 2\cdot 4^{n-1}e^x<4^ne^x, \quad \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}$

Έστω $R>0$ τυχαίο. Θεωρούμε το διάστημα $I=(-R,R)$. Τότε αφού κάθε $m\in\mathbb{N}$ γράφεται σαν $m=4n-k$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ και $k=0,1,2,3$, θα έχουμε ότι $|f^{(m)}(x)|\leq e^x4^n\leq e^x4^m\leq 4^me^R$ $\forall x\in(-R,R)$. Από το Θεώρημα έχουμε ότι $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \forall x\in(-R,R)$ $\forall R>0$. Άρα, $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Για να βρούμε τη σειρά Maclaurin της f υπολογίζουμε τις παραγώγους $f^{(n)}(0)$, $\forall n=0,1,2,\dots$. Έχουμε $f(0)=0$ και $f^{(4n)}(0)=0$, $f^{(4n-1)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 4^{n-1}$, $f^{(4n-2)}(0)=(-1)^{n-1}2\cdot 4^{n-1}$ (αφού $f''(0)=f^{(3)}(0)=2$) και $f^{(4n-3)}(0)=(-1)^{n-1}4^{n-1}$, αφού $f'(0)=1$.

Άρα, $$e^x\sin(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{4^{n-1}}{(4n-3)!}x^{4n-3}+(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 4^{n-1}}{(4n-2)!}x^{4n-2}+(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 4^{n-1}}{(4n-1)!}x^{4n-1}\right]$$

$\forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα 2</u>: Έστω $I\subset\mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Έστω $x_0\in I$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $C>0$ ώστε $|f^{(n)}(x)|\le C^n(n!)$, $\forall n=0,1,2,\dots$, $\forall x\in I$. Τότε ισχύει ότι
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \forall x\in I \text{ με } |x-x_0|<\frac{1}{C}.$$

Δηλαδή η f αναπτύσσεται κατά Taylor στο x_0 στο διάστημα $I\cap\left(x_0-\frac{1}{C}, x_0+\frac{1}{C}\right)$, $\forall x_0\in I$.

<u>Απόδειξη</u>: Από τον τύπο του Taylor, αν $x\in I$, έχουμε ότι $\forall n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $\xi\in I$ ανάμεσα στα x_0 και x ώστε $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $|f^{(n+1)}(\xi)|\le C^{n+1}[(n+1)!]|x-x_0|^{n+1}$. Άρα,
$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|\le C^{n+1}|x-x_0|^{n+1}=[C|x-x_0|]^{n+1},\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in I.$$

Όταν όμως $0\le C|x-x_0|<1$, έχουμε ότι $[C|x-x_0|]^{n+1}\to 0$, από τα βασικά όρια.

Άρα, $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \forall x\in I \text{ με } |x-x_0|<\frac{1}{C}.$$

Παράδειγμα: Θα βρούμε το ανάπτυγμα Maclaurin της $f(x)=\ln(x+1)$, $(x>-1)$.

Έχουμε ότι $f(0)=0$, $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $f'''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$,

$f^{(4)}(x)=-\dfrac{2\cdot 3}{(x+1)^4}$, $f^{(5)}(x)=\dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{(x+1)^5}$, $\forall x>-1$.

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x>-1$.

Για $n=1$, η ισότητα ισχύει αφού $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $\forall x>-1$.

Έστω ότι για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$, $\forall x>-1$.

Τότε, $f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n-1}[(n-1)!](-1)\cdot\dfrac{n(x+1)^{n-1}}{(x+1)^{2n}}=(-1)^n[(n-1)!\,n]\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}$, $\forall x>-1$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$, $\forall x>-1$. Έπεται από την αρχή της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x>-1$.

Έστω $0<a<1$ και $x\in\mathbb{R}$, $|x|<a$. Τότε $x>-a \Rightarrow x+1>1-a$.

Άρα, $|f^{(n)}(x)|\leq\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}<\dfrac{(n-1)!}{(1-a)^n}<\left(\dfrac{1}{1-a}\right)^n n!$, $\forall x\in I=(-a,a)$

Συμπεραίνουμε από το Θεώρημα 2 ότι $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, $\forall x\in I$ με $|x|<1-a$. Δηλαδή, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ όταν $|x|<a$ και $|x|<1-a$.

Επομένως, $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$, όταν $|x|<\dfrac{1}{2}$ (παίρνουμε $a=\dfrac{1}{2}$)

Παρατηρούμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$ $\left[\left|\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{n}{(-1)^n x^n}\right|=|x|\dfrac{n}{n+1}\to|x|\right.$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$ συγκλίνει σε πραγματικό όταν $|x|<1$, ενώ δεν συγκλίνει σε πραγματικό όταν $|x|>1$, σύμφωνα με το κριτήριο λόγου].

Θα δείξουμε ότι $\ln(x+1) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $\forall x \in (-1, 1]$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $|x|<1$.

Αφού η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $g(x)$ είναι $R = 1$, το θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών μας δίνει ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $g'(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$. Άρα, $g'(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$ (γεωμ. σειρά) $\forall x \in (-1,1)$. Άρα, $g'(x) = (\ln(x+1))'$, $\forall x \in (-1,1)$ και το ΘΜΤ μας δίνει ότι $g(x) - \ln(x+1) =$ σταθερά, $\forall x \in (-1,1)$. Όμως $g(x) = \ln(x+1)$ $\forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Άρα $g(x) - \ln(x+1) = 0$, $\forall x \in (-1,1)$, δηλαδή

$$\ln(x+1) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

Τέλος ισχύει η ισότητα και για $x=1$. Πράγματι, $\lim_{x \to 1^-} \ln(x+1) = \ln(2)$ και η σειρά $\sum_{n \geq 1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό από το κριτήριο Leibnitz. Το Θεώρημα Abel τώρα μας δίνει ότι

$$\ln(x+1) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in (-1,1].$$ Ειδικότερα,

$$\ln(2) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Θεώρημα (Ολοκλήρωση δυναμοσειράς). Έστω η δυναμοσειρά $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ κέντρου $x_0\in\mathbb{R}$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Τότε η δυναμοσειρά

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}$$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R>0$

και $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$.

Ισοδύναμα γράφουμε ότι

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-x_0)^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}, \text{ αν } |x-x_0|<R.$$

Απόδειξη: Αν $x\neq x_0$ σταθερό και $c_n=\frac{a_n}{(n+1)}(x-x_0)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\frac{n}{(n+1)}|x-x_0|. \text{ Άρα, } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0|<1$$

$\Longleftrightarrow |x-x_0|<R$. Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της $F(x)$ είναι $R>0$.

Το θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών τώρα δίνει ότι

$$F'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)}(n+1)(x-x_0)^n=f(x), \quad \forall x\in(x_0-R,x_0+R)$$

Εφαρμογή: Θα βρούμε τα αναπτύγματα Maclaurin του $\ln(x+1)$ και $\operatorname{Arctan}(x)$: Για το $\ln(x+1)$ έχουμε ότι

$$(\ln(x+1))'=\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad \forall x\in(-1,1),$$ από το ανάπτυγμα

Maclaurin της $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $|x|<1$.

Από το Θεώρημα ολοκλήρωσης δυναμοσειρών λαμβάνουμε ότι η δυναμοσειρά $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$ και $F'(x)=\frac{1}{x+1}$, $\forall x\in(-1,1)$. Άρα, $\left[F(x)-\ln(x+1)\right]'=0$, $\forall x\in(-1,1)$

$\Rightarrow F(x)-\ln(x+1)=$ σταθερή $=F(0)-\ln(1)=0-0=0$, $\forall x\in(-1,1)$

$$\Rightarrow \ln(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad \forall x\in(-1,1)$$

Για την $f(x)=\text{Arctan}(x)$, έχουμε $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad \forall x\in(-1,1).$$

Το Θεώρημα ολοκλήρωσης δυναμοσειρών μας δίνει ότι η δυναμοσειρά $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ συγκλίνει σε πραγματικό, $\forall x\in(-1,1)$. Επίσης και $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}=(\text{Arctan}(x))'$, $\forall x\in(-1,1)$.

$F(0)=0=\text{Arctan}(0)$. Από το ΘΜΤ συμπεραίνουμε ότι $F(x)=\text{Arctan}(x)$, $\forall x\in(-1,1)$. Άρα, $\text{Arctan}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $\forall x\in(-1,1)$. Από το Θ. Abel επίσης έχουμε ότι $\frac{\pi}{4}=\text{Arctan}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, αφού η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει σε πραγματικό από το κριτήριο Leibnitz. Άρα, $\text{Arctan}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$, $\forall x\in[-1,1]$ (ισχύει το Abel και για $x=-1$), και $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$