ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω I ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ώστε είτε $x_0 \in I$, είτε x_0 άκρο του I (μπορεί $x_0 = \pm\infty$). Θυμίζουμε ότι $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Έστω $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Έστω $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

Λέμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$, όταν $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda$, $\boxed{\text{για κάθε}}$ ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ στοιχείων του I τέτοια ώστε

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 \quad \text{και} \quad x_n \neq x_0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>Σημείωση</u>: Αν x_0 είναι άκρο του I, τότε η συνθήκη $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ικανοποιείται από κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ στοιχείων του I.

<u>Παραδείγματα</u>: 1) Αν $p > 0$, $p \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x \to 0} x^p = 0$. Πράγματι, η $f(x) = x^p$ ορίζεται στο $(0, +\infty) = I$. Αν $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to 0$, τότε γνωρίζουμε από τις ιδιότητες των ακολουθιών ότι $x_n^p \to 0$.

2) Αν $p > 0$, $p \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$. Γιατί αν $x_n \to +\infty$, τότε $\dfrac{1}{x_n} \to 0 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{x_n}\right)^p \to 0$.

3) Αν $a > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ αφού ξέρουμε ότι $x_n \to +\infty$ $\Rightarrow a^{x_n} \to +\infty$ όταν $a > 1$

4) $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ γιατί αν $x_n \to 0$, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\ln(x_n) \to -\infty$ όπως έχουμε δείξει στο φυλλάδιο του λογαρίθμου.

5) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+4}{x+1} = \frac{16}{3}$ γιατί όταν $x_n \to 2$ έχουμε ότι

$$\frac{3x_n^2+4}{x_n+1} \to \frac{3\cdot 2^2+4}{2+1} = \frac{16}{3}.$$

6) $\lim_{x\to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x με $\deg(P)=k$, $\deg(Q)=l$, a = μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $P(x)$ (δηλ. a = συντελεστής του x^k), b = μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $Q(x)$

έχουμε $\lim_{x\to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{αν } k=l \\ 0, & \text{αν } k<l \\ (ab)(+\infty), & \text{αν } k>l. \end{cases}$

7) Αν $P(x)$, $Q(x)$ όπως παραπάνω, τότε

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{αν } k=l \\ 0, & \text{αν } k<l \\ (ab)(-1)^{k-l}(+\infty), & \text{αν } k>l \end{cases}$$

Ορισμός: Έστω $I \subset \mathbb{R}$, διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in I$. Η f είναι συνεχής στο x_0 όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Όταν δηλαδή $f(x_n) \to f(x_0)$ για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ στοιχείων του I με $x_n \to x_0$.
Η f είναι συνεχής στο I όταν f συνεχής στο x_0, $\forall x_0 \in I$.

Παραδείγματα: 1) Τα πολυώνυμα είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

2) Η $f(x) = a^x$, $(a>0)$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3) Η $f(x) = x^p$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

4) Η $f(x) = \ln(x)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων: Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: I \to \mathbb{R}$, $g: I \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε

1) Η $\lambda f + \mu g$ είναι συνεχής στο I, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$.

2) Η $f \cdot g$ είναι συνεχής στο I.

3) Αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, τότε η f/g είναι συνεχής στο I

4) Η $|f(x)|$ είναι συνεχής στο I.

5) Αν $p \in \mathbb{R}$ και $f(x_0) > p$, για κάποιο $x_0 \in I$ με x_0 εσωτερικό σημείο του I, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) > p, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I.$$

Κανόνας Αλυσίδας για συνεχείς συναρτήσεις: Έστω I, J διαστήματα στο $\mathbb{R}$ και $f: I \longrightarrow J$ συνεχής, $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η σύνθεση $g \circ f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Απόδ: Έστω $x_0 \in I$ και $(x_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία στο I με $x_n \to x_0$. Αφού f συνεχής στο I, έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$ και $f(x_n) \in J$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_0) \in J$. Όμως και η g είναι συνεχής στο J. Άρα, $g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) \Rightarrow (g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$. Άρα, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in I$, τυχόν $\Rightarrow g \circ f$ συνεχής στο I.

Παράδειγμα: Η $f(x) = e^{x^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $h(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, αφού $f = g \circ h$.

Παράγωγος Συνάρτησης

Ορισμός: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in I$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 όταν το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι πραγματικός.

Τότε ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 τον αριθμό

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ορισμός: $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Η f είναι παραγωγίσιμη στο I όταν υπάρχει η $f'(x)$ $\forall x \in I$. Έτσι ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος συνάρτηση f' της f, με πεδίο ορισμού το I.

Σημείωση: Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο I και η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη στο I, τότε η $(f')' \equiv f''$ καλείται δεύτερη παράγωγος της f στο I. Επαγωγικά ορίζονται παράγωγοι κάθε τάξης της f.

Συμβολισμοί: 1) Γράφουμε $f^{(n)}(x)$ για την παράγωγο τάξης $n \in \mathbb{N}$ της f. Συμφωνούμε να γράφουμε $f^{(0)}(x) = f(x)$

2) Γράφουμε $\dfrac{d^n f}{dx^n}(x) \equiv f^{(n)}(x)$, $\forall x \in I$, ή, $\dfrac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}$

3) Αν $y = f(x)$, $x \in I$, γράφουμε $\dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}$.

Ιδιότητες: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Τότε,

1) $\lambda f + \mu g$ είναι παραγωγίσιμη και $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2) $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη και $(fg)' = f'g + fg'$.

3) Αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, τότε $(f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

4) f συνεχής στο I.

Κανόνας Αλυσίδας για την παράγωγο: I, J ανοιχτά διαστήματα του $\mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow J$ και $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες. Τότε η σύνθεση $g \circ f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$, $\forall x_0 \in I$.

Απόδ: Έστω $x_0 \in I$ και $(x_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ ακολουθία στοιχείων του I με $x_n \longrightarrow x_0$ και $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} \longrightarrow g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Αν $f(x_{k_n}) = f(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, για κάποια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n \geq 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n \geq 1}^{\infty}$, τότε $\dfrac{f(x_{k_n}) - f(x_0)}{x_{k_n} - x_0} \longrightarrow f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

και $$\frac{g(f(x_{k_n})) - g(f(x_0))}{x_{k_n} - x_0} = 0 \longrightarrow g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Αν $f(x_{k_n}) \neq f(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, για κάποια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n \geq 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n \geq 1}^{\infty}$

τότε $$\frac{g(f(x_{k_n})) - g(f(x_0))}{x_{k_n} - x_0} = \frac{g(f(x_{k_n})) - g(f(x_0))}{f(x_{k_n}) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_{k_n}) - f(x_0)}{x_{k_n} - x_0} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$ αφού $f(x_{k_n}) \longrightarrow f(x_0)$

λόγω της συνέχειας της f. Άρα, αναγκαία, έχουμε ότι

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} \longrightarrow g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

<u>Κανόνας Leibniz</u>: $I \subset \mathbb{R}$ αν. διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ n-φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Τότε
$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x), \quad \forall x \in I.$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή όπως στο διώνυμο Newton

Με τους βασικούς κανόνες παραγώγισης μπορούμε να δείξουμε ότι τα πολυώνυμα είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμα στο $\mathbb{R}$.
Πράγματι, αν $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, όπου $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, όταν
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \text{ τότε } f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$ και $Q(x)$ πολυώνυμα, είναι παραγωγίσιμη στο υποσύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Το A είναι ίσο με μία πεπερασμένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων. Έτσι, $R'(x)$ είναι ρητή συνάρτηση ορισμένη στο A. Έπεται ότι η $R(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο A.

Για τις παραγώγους των συναρτήσεων e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, χρησιμοποιούμε ένα θεώρημα που μας επιτρέπει να παραγωγίζουμε δυναμοσειρές, αφού
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
και
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Θεώρημα (Παραγώγιση Δυναμοσειράς). Έστω $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ δυναμοσειρά κέντρου $x_0\in\mathbb{R}$, με θετική ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος (x_0-R,x_0+R) και $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$, $\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$

Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ είναι ίση με R.

Απόδ: Αφού $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n}{n a_n (x-x_0)^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0|$, έπεται ότι οι δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης. Για την παράγωγο της f διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περ. 1: $x_0=0$. Τότε, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, όταν $|x|<R$. Έστω $c\in\mathbb{R}$ με $|c|<R$. Θα δείξουμε ότι η $f'(c)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}$.

Πρώτα επιλέγουμε $t\in\mathbb{R}$ με $|c|<t<R$. Γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|t^{n-1}<+\infty$ αφού η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης R.

Έστω $(x_k)_{k\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία στο $(-R,R)$ με $x_k\to c$ και $x_k\neq c$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι $\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f(c)}{x_k-c}=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}$.

Έστω $\epsilon>0$. Βρίσκουμε $p\in\mathbb{N}$ με $\sum_{n=p+1}^{\infty} n|a_n|t^{n-1}<\epsilon$ $(*)$

Αφού $x_k \to c$ και $|c|<t$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|x_k|<t$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

Θέτουμε $g(x)=\sum\limits_{n\geq 0}^{p} a_n x^n$. Γνωρίζουμε ότι $g'(x)=\sum\limits_{n\geq 1}^{p} n a_n x^{n-1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα $$\frac{g(x_k)-g(c)}{x_k-c} - \sum_{n\geq 1}^{p} n a_n c^{n-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Longrightarrow$$

$$\exists k_1\in\mathbb{N} : \left|\frac{g(x_k)-g(c)}{x_k-c} - \sum_{n\geq 1}^{p} n a_n c^{n-1}\right| < \epsilon, \quad \forall k\geq k_1 \quad (**)$$

Έχουμε ότι: $$\left|\frac{f(x_k)-f(c)}{x_k-c} - \sum_{n\geq 1}^{\infty} n a_n c^{n-1}\right| = \left|\frac{f(x_k)-g(x_k)+g(c)-f(c)-g(c)+g(x_k)}{x_k-c} - \sum_{n\geq 1}^{\infty} n a_n c^{n-1}\right|$$

$$\underset{\text{Ανισ.}}{\overset{\text{Τριγ.}}{\leq}} \left|\frac{g(x_k)-g(c)}{x_k-c} - \sum_{n\geq 1}^{p} n a_n c^{n-1}\right| + \left|\frac{f(x_k)-f(c)-g(x_k)+g(c)}{x_k-c} - \sum_{n\geq p+1}^{\infty} n a_n c^{n-1}\right|$$

$$\underset{\text{Τριγ. Ανισ.}}{\overset{(**)}{<}} \epsilon + \left|\frac{f(x_k)-g(x_k)-(f(c)-g(c))}{x_k-c}\right| + \sum_{n\geq p+1}^{\infty} n|a_n| c^{n-1}$$

$$\overset{(*)}{<} \left|\frac{f(x_k)-g(x_k)-(f(c)-g(c))}{x_k-c}\right| + 2\epsilon, \quad \forall k\geq k_1$$

Δηλαδή, $$\left|\frac{f(x_k)-f(c)}{x_k-c} - \sum_{n\geq 1}^{\infty} n a_n c^{n-1}\right| < \left|\frac{f(x_k)-g(x_k)-(f(c)-g(c))}{x_k-c}\right| + 2\epsilon, \quad \forall k\geq k_1$$

$(***)$

Επίσης, $\left|\dfrac{f(x_k)-g(x_k)-(f(c)-g(c))}{x_k-c}\right| = \left|\dfrac{1}{x_k-c}\left[\sum_{n=p+1}^{\infty}a_n x_k^n - \sum_{n=p+1}^{\infty}a_n c^n\right]\right| =$

$$= \frac{1}{|x_k-c|}\left|\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n(x_k^n-c^n)\right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty}|a_n|\left|\frac{x_k^n-c^n}{x_k-c}\right|$$

Όμως, $|x_k^n-c^n| = |x_k-c|\,|x_k^{n-1}+x_k^{n-2}c+\dots+x_k c^{n-2}+c^{n-1}|$

$$\Rightarrow \left|\frac{x_k^n-c^n}{x_k-c}\right| \leq |x_k|^{n-1}+|x_k|^{n-2}|c|+\dots+|x_k||c|^{n-2}+|c|^{n-1}$$
$$\leq t^{n-1}+t^{n-2}t+\dots+t\,t^{n-2}+t^{n-1} = n t^{n-1}$$

$\forall k \geq k_1$, αφού $|x_k|<t$, $\forall k\geq k_1$, και $|c|<t$.

Συνεπώς, $\left|\dfrac{f(x_k)-g(x_k)-(f(c)-g(c))}{x_k-c}\right| \leq \sum_{n=p+1}|a_n|\cdot n t^{n-1} < \epsilon$, λόγω (*)

Έτσι, τώρα, η (***) δίνει:

$$\left|\frac{f(x_k)-f(c)}{x_k-c} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}\right| < \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon, \quad \forall k\geq k_1$$

Αφού $\epsilon>0$, τυχόν, έχουμε $\dfrac{f(x_k)-f(c)}{x_k-c} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}$

$\Rightarrow f'(c) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}$ αφού $x_k \xrightarrow{k\to\infty} c$ τυχούσα.

<u>Πρ.2</u>: Αν $x_0\in\mathbb{R}$, ορίζουμε $h:(-R,R)\to(x_0-R,x_0+R)$, $h(x)=x+x_0$, $\forall x\in(-R,R)$. Επίσης, θέτουμε $g(x)=f(h(x))$, $\forall x\in(-R,R)$. Τότε

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+x_0-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x\in(-R,R).$$

Από την Πρ. 1, έχουμε ότι $g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $\forall x\in(-R,R)$

Αφού $g=f\circ h$, ο Κ.Α. δίνει ότι $g'(x)=f'(h(x))h'(x)=f'(x+x_0)$ $\forall x\in(-R,R)$. Άρα, αν $x\in(x_0-R,x_0+R)$, τότε $x=x-x_0+x_0=h(x-x_0)$

$$\Rightarrow f'(x)=f'(x-x_0+x_0)=g'(x-x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}.$$

<u>Θεώρημα Abel</u>: Έστω $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ δυναμοσειρά κέντρο $x_0\in\mathbb{R}$ με ακτίνα σύγκλισης $0<R<+\infty$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Τότε, $\lim_{x\to(x_0+R)^-} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

Ανάλογα, αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ συγκλίνει σε πραγματικό, τότε $\lim_{x\to(x_0-R)^+} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$.

<u>Απόδειξη</u>: Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο άθροισης του Abel:

Αν $a_1,\dots,a_n,a_{n+1}$ και $b_1,\dots,b_n,b_{n+1}$ είναι πραγματικοί, τότε:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=(a_1+\dots+a_n)b_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)(b_k-b_{k+1})$$

Η απόδειξη αυτού του τύπου γίνεται επαγωγικά: Αν $n=1$, τότε

$a_1b_2 + a_1(b_1-b_2) = a_1b_1$. Δηλαδή ισχύει ο τύπος όταν $n=1$.

Ας υποθέσουμε ότι ο τύπος ισχύει για κάποιο $n\in\mathbb{N}$.

Αν $a_1,\dots,a_n,a_{n+1},a_{n+2}$ και $b_1,\dots,b_n,b_{n+1},b_{n+2}$ είναι αριθμοί, τότε

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_kb_k = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k + a_{n+1}b_{n+1} \overset{\text{Επαγ.}}{\underset{\text{υπ.}}{=}} (a_1+\dots+a_n)b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)(b_k-b_{k+1}) + a_{n+1}b_{n+1}$$

$$= (a_1+\dots+a_n+a_{n+1})b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)(b_k-b_{k+1}) + (a_1+\dots+a_n+a_{n+1})(b_{n+1}-b_{n+2}) -$$

$$- (a_1+\dots+a_n+a_{n+1})(b_{n+1}-b_{n+2}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)(b_k-b_{k+1}) + (a_1+\dots+a_n+a_{n+1})b_{n+1} - (a_1+\dots+a_n+a_{n+1})b_{n+1} +$$

$$+ (a_1+\dots+a_n+a_{n+1})b_{n+2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)(b_k-b_{k+1}) + (a_1+\dots+a_n+a_{n+1})b_{n+2}$$

άρα αποδείχτηκε για το $n+1$ και συνεπώς, από την αρχή της επαγωγής, ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε επιλογή $a_1,\dots,a_n,a_{n+1}, b_1,\dots,b_n,b_{n+1}$ πραγματικών.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού του Θεωρ. Abel, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0=0$ και $R=1$. Πράγματι η $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n a_n \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} R^n a_n y^n$ (δηλ. $y=\frac{x-x_0}{R}$)

έχει κέντρο 0 και ακτίνα σύγκλισης 1 αφού $|y|<1 \iff |x-x_0|<R$.

και $\sum_{n=0}^{\infty} R^n a_n$ συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό. Α γνωρίζουμε ότι

$\lim_{y\to 1^-} g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, τότε $\lim_{x\to (x_0+R)^-} f(x) = \lim_{y\to 1^-} g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την απόδειξη για $x_0=0$ και $R=1$.

Έστω $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $(-1,1)$ τ.ω. $\boxed{0<x_k \xrightarrow{k\to\infty} 1}$. Θα δείξουμε

ότι $f(x_k)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_k^n \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Έστω $\epsilon>0$.

Αφού $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, θα υπάρχει $p\in\mathbb{N}$ ώστε:

$$\left|\sum_{n=p+1}^{m} a_n\right| < \epsilon, \quad \forall\, m>p.$$

Τώρα έχουμε για $m>p$,

$$\left|\sum_{n=p+1}^{m} a_n(1-x_k^n)\right| \underset{\text{Abel}}{\overset{\text{Άθροιση}}{=}} \left|\left(\sum_{n=p+1}^{m} a_n\right)(1-x_k^{m+1}) + \sum_{n=p+1}^{m}\left(\sum_{i=p+1}^{n} a_i\right)(x_k^{n+1}-x_k^{n})\right|$$

$$\underset{\text{Ανισ}}{\overset{\text{Τριγ}}{\leq}} \left|\sum_{n=p+1}^{m} a_n\right|(1-x_k^{m+1}) + \sum_{n=p+1}^{m}\left|\sum_{i=p+1}^{n} a_i\right|(x_k^{n}-x_k^{n+1}),$$

γιατί $x_k^n > x_k^{n+1}$ αφού $0<x_k<1$

$$< \epsilon(1-x_k^{m+1}) + \epsilon\sum_{n=p+1}^{m}(x_k^{n}-x_k^{n+1}) = \epsilon(1-x_k^{m+1}) + \epsilon(x_k^{p+1}-x_k^{m+1})$$

$$< \epsilon+\epsilon = 2\epsilon.$$

Συνεπώς δείξαμε ότι:

$$\left|\sum_{n=p+1}^{m} a_n(1-x_k^n)\right| < 2\epsilon, \quad \forall\, m>p,\ \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

Παίρνοντας $m\to+\infty$ έχουμε:

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n(1-x_k^n)\right| \leq 2\epsilon.$$

Αφού $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, έχουμε ότι $\sum\limits_{n=0}^{p} a_n x_k^n \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum\limits_{n=0}^{p} a_n$

Άρα, θα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left|\sum_{n=0}^{p} a_n x_k^n - \sum_{n=0}^{p} a_n\right| < \epsilon, \quad \forall k \geq k_0$$

Τελικά, $$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_k^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \underset{\text{Αν.}}{\overset{\text{Τριγ.}}{\leq}} \left|\sum_{n=0}^{p} a_n x_n^k - \sum_{n=0}^{p} a_n\right| + \left|\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n x_n^k - \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n\right|$$

$$< \epsilon + \left|\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n (1 - x_n^k)\right| < \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon, \quad \forall k \geq k_0$$

Αφού $\epsilon > 0$ τυχόν, έχουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_k^n \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Δηλαδή, $f(x_k) \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, όταν $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, $x_k \in (-1,1), \forall k \in \mathbb{N}$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Εφαρμογή: Αν $\ln(x+1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $\forall x \in (-1,1)$, τότε

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln(2)$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x+1) = \ln(2)$ και

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, σύμφωνα με

το κριτήριο Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές.

<u>Άσκηση</u>: $(\sin(x))' = \cos(x)$ και $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>: $e^x = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Άρα $(e^x)' = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

σύμφωνα με το θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών. Άρα έχουμε

$$(e^x)' = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ανάλογα έχουμε $(\sin(x))' = \left[\sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]' = \sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \cdot (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} =$

$$= \sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

<u>Άσκηση</u>: $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>: $(\cos(x))' = \left[\sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]' = \left[1 + \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]' = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n}{(2n)!} x^{2n-1} =$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} \overset{n=k+1}{=\!=\!=} \sum_{k\geq 0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = -\sum_{k\geq 0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\Rightarrow (\cos(x))' = -\sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

<u>Άσκηση</u>: Βρείτε το $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} x^n$, όταν $|x|<1$. Άρα,

$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^{n-1}$, $\forall x \in (-1,1)$. Άρα, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^{n-1}$, $\forall x \in (-1,1)$

$\Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^n$, $\forall x \in (-1,1)$. Για $x = 1/2 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{1/4} = 2$