Σύντομες λύσεις, φυλ. #3

1) (α): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{7^{3n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-1}}{7^{-2}} \frac{3^{2n}}{7^{3n}} = \frac{49}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{7^3}\right)^n \overset{\text{Γ.Σ.}}{\underset{9<7^3}{=}} \frac{49}{3} \frac{9/7^3}{1-9/7^3} = \cdots$

(β): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n+1}}{(3x+5)^{2n-4}} = (3x+5)^4(2x+1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+5}\right)^{2n}$. Πρέπει $x \neq -5/3$ για να ορίζεται η σειρά

και $|2x-1|^2 < |3x+5|^2$ για να συγκλίνει σε πραγματικό. Ισοδύναμα, $(2x-1)^2-(3x+5)^2<0$

$\iff (2x-1-3x-5)(2x-1+3x+5)<0 \iff (-x-6)(5x+4)<0 \iff (x+6)(5x+4)>0 \iff$

$\iff x<-6$, ή, $x>-4/5$. Τότε, το άθροισμα της σειράς είναι ίσο με

$$(3x+5)^4(2x+1) \frac{(2x-1)^2/(3x+5)^2}{1-\frac{(2x-1)^2}{(3x+5)^2}} = \frac{(3x+5)^4(2x+1)(2x-1)^2}{(x+6)(5x+4)}$$

(γ): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1}\right) =$

$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2})$, θέτοντας $a_n = \frac{1}{2n-3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-4n-3} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2}) \overset{\text{2 Τηλεσκ.}}{=\!=\!=} \frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_{n+2})\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} + a_2 - \lim_{n\to\infty} a_{n+2}\right] = \frac{a_1+a_2}{4} = \frac{-1+1}{4} = 0, \text{ αφού } \frac{1}{2n-1} \to 0$$

(δ): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$. Θέτουμε $x=5$

(ε): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n-1)!} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n-1)!} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = \frac{1}{3} e^3$

(στ): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}(n!)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/4)^n}{n!} = 4(e^{1/4}-1)$

2) (α): ΚΟΣ με $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. (β): ΚΟΣ με $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. (γ): ΚΟΣ με $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2/3}}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}} = +\infty$

(δ): ΚΟΣ με $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}} < +\infty$. (ε): $a_n = \frac{\cos(1/n^2)}{\sqrt{2n+1}} > 0$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} > 0$, $\frac{a_n}{b_n} = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 1$

αφού $\frac{1}{n^2} \to 0$ και $\cos(0)=1$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = +\infty$ (από ΚΟΣ με $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$) $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, από ΚΟΣ

2)(ζ): $\left|\frac{\sin(n!)}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $\sum_{n\ge1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$, ως p-σειρά με $p=3>1$, έπεται ότι $\sum_{n\ge1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n!)}{n^3}\right|$ συγκλίνει σε πραγματικό, από το κριτήριο άμεσης σύγκρισης. Άρα η $\sum_{n\ge1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^3}$ συγκλίνει απόλυτα και συνεπώς συγκλίνει σε πραγματικό (Θεώρ. Cauchy).

(η): $a_n = \sin(1/n^3)$, $b_n = 1/n^3$, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin(1/n^3)}{1/n^3} \to 1$ γιατί $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. Αφού $\sum_{n\ge1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n\ge1}^{\infty} a_n<+\infty$, από ΚΟΣ.

(θ): $\sum_{n\ge1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)+5^n}{6^n} = \sum_{n\ge1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n^2)}{6^n} + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]$. Η $\sum_{n\ge1}^{\infty} (5/6)^n$ συγκλίνει σε πραγματικό ως γεωμ. σειρά με λόγο $5/6$, και $|5/6|<1$. Η $\sum_{n\ge1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{6^n}$ συγκλίνει απόλυτα από κριτ. άμεσης σύγκρισης: $\left|\frac{\sin(n^2)}{6^n}\right| \le 1/6^n$, $\sum_{n\ge1}^{\infty} (1/6)^n = \frac{1/6}{1-1/6} = 1/5$ (Γ.Σ.)

Άρα η ζητούμενη σειρά συγκλίνει σε πραγματικό, ως άθροισμα σειρών που συγκλίνουν σε πραγματικό.

(ι) $a_n = \frac{\ln(3n+2)}{n^{3/2}}$, $b_n=\frac{1}{n^{5/4}}$, $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\ln(3n+2)}{n^{1/4}}\to0$ γιατί $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+2)}{x^{1/4}}=0$

(DLH) Αφού $\sum_{n\ge1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}<+\infty$, ως p-σειρά με $p=5/4>1$, το ΚΟΣ δίνει $\sum_{n\ge1}^{\infty} a_n<+\infty$

(κ) $a_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(n^3+n^2+n) \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3^{n+2}}\left[(n+1)^3+(n+1)^2+n\right]\cdot\frac{3^{n+1}}{n^3+n^2+n} \to 1/3 <1 \Rightarrow \sum_{n\ge1} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό, από Κρ. Λόγου.

(λ). $a_n = (-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{4^{n^2}}$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^{-1} = \frac{4^{n^2+2n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)(2n+1)}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n+1)}{4^{n^2}} = \frac{4^{2n+1}}{2n+1}\to+\infty$

γιατί $\frac{2n+1}{4^{2n+1}}\to0$ (κρ. λόγου για ακολουθίες). Άρα $\sum_{n\ge1}|a_n|<+\infty$, από κρ. λόγου

(μ): $a_n = \frac{(n!)^4}{(2n-1)!\,(3n+1)!} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{[(n+1)!]^4}{[(2n+1)!][3n+4]!}\cdot\frac{(2n-1)!\,(3n+1)!}{(n!)^4} = (n+1)^4\cdot\frac{1}{(2n)(2n+1)(3n+2)(3n+3)(3n+4)}$

$\to 0<1 \Rightarrow \sum_{n\ge1}|a_n|<+\infty$, από κρ. λόγου

(ν): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^n}$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+3)!}{(n+2)^{n+1}}\,\frac{(n+1)^n}{(n+2)!} = \frac{n+3}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{n+3}{n+2}\,\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n} = \frac{n+3}{n+2}\,\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n} =$

$= \frac{n+3}{n+2}\,\frac{1+2/(n+1)}{(1+2/(n+1))^{n+1}} \to 1\cdot\frac{1}{e^2}<1$, αφού $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\to e^2$. Άρα από κρ. λόγου συγκλίνει σε πραγματικό (ξ): $a_n = \frac{(n!)^3}{2(n!)^3+1} \to \frac{1}{2}$ ως υπακολουθία της $\left(\frac{n}{2n^3+1}\right)_{n\geq 1}^{\infty}$. Αφού $\frac{1}{2} \neq 0$, το κριτήριο απόκλισης δίνει ότι $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό $\xRightarrow{a_n>0} \sum_{n\geq1}^{\infty} a_n = +\infty$

(ο): $a_n = \frac{n+2^n}{(n!)+4} < \frac{2^n+2^n}{n!} = 2\cdot\frac{2^n}{n!} = b_n, \forall n\in\mathbb{N}$. Επίσης, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^{n+1}} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$. Άρα, $\sum_{n\geq1}^{\infty} b_n < +\infty$, από κρ. λόγου $\Rightarrow \sum_{n\geq1}^{\infty} a_n < +\infty$, από ΚΑΣ.

(π): $a_n = n^2 e^{-n^3} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = (\sqrt[n]{n})^2 e^{-n^2} \to 1\cdot 0 = 0 < 1$ ($e^{-n^2}\to 0$). Από κρ. ρίζας $\Rightarrow \sum_{n\geq1}^{\infty} a_n < +\infty$

(ρ): $a_n = \frac{(2n-1)^n}{(n^2+1)^{2n}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{2n-1}{(n^2+1)^2} \to 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq1}^{\infty} a_n < +\infty$ (κρ. ρίζας)

(σ): $a_n = \frac{(n!)e^{n^2}}{[(2n)!]\,3^{n^2-1}} = 3\cdot\frac{n!}{(2n)!}\left(\frac{e}{3}\right)^{n^2} < 3\cdot\frac{n!}{(2n)!} = b_n, \forall n\in\mathbb{N}$. $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq1}^{\infty} b_n < +\infty$, από κρ. λόγου $\Rightarrow \sum_{n\geq1}^{\infty} a_n < +\infty$ από ΚΑΣ.

(τ): $a_n = (\sqrt[n]{n}-1)^{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = (\sqrt[n]{n}-1)^n \to 0$ γιατί $\sqrt[n]{n}-1 \to 0 \Rightarrow 0 \leq \sqrt[n]{n}-1 < \frac{1}{2}, \forall n\geq n_0$ $\Rightarrow (\sqrt[n]{n}-1)^n < \frac{1}{2^n}, \forall n\geq n_0 \Longrightarrow (\sqrt[n]{n}-1)^n \to 0$, από Sandwich, αφού $\frac{1}{2^n}\to 0$ $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq1}^{\infty} a_n < +\infty$ από κρ. ρίζας

(υ): $a_n = \frac{1}{2n+7} \to 0$ και $2n+7 < 2n+8 \Rightarrow \frac{1}{2n+7} > \frac{1}{2n+8} \Rightarrow a_{n+1} < a_n, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\geq1} \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό, από κρ. Leibnitz. $\boxed{(\varphi):}$ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} \to 0$, $\sqrt{n^2+4} < \sqrt{(n+1)^2+4} \Rightarrow a_n > a_{n+1} \Rightarrow a_n \downarrow 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό από Leibnitz.

(χ): $\sin(n\pi+\frac{\pi}{2}) = \sin(n\pi)\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(n\pi)\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + (-1)^n \Rightarrow \sum_{n\geq1}\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})\cdot\frac{1}{n} = \sum_{n\geq1}(-1)^n\frac{1}{n}$ συγκλίνει σε πραγματικό, από κρ. Leibnitz αφού $\frac{1}{n}\downarrow 0$

(ψ): Αν $x=0$ η σειρά συγκλίνει στο 0. Αν $x\neq 0$, εφαρμόζουμε κριτ. λόγου: $\left|\frac{x^{2n+2}}{[(n+1)^2+1]2^{n+1}}\,\frac{2^n(n^2+1)}{x^{2n}}\right| \to \frac{x^2}{2}$. Αν $x^2<2$, η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό. Αν $x^2>2$ η σειρά δεν συγκλίνει σε πραγματικό. Αφού $\frac{x^{2n}}{(n^2+1)2^n} \geq 0$, αν $x^2>2$, $\Rightarrow \sum_{n\geq1}\frac{x^{2n}}{(n^2+1)2^n} = +\infty$, αν $x^2>2$. Αν $x^2=2$, η σειρά γίνεται $\sum_{n\geq1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} < \sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2} < +\infty$ (p-σειρά με p=2). Άρα συγκλίνει από ΚΑΣ.

$\boxed{3}$

(ω): Κρ. λόγου με $x\neq 0$ (Αν $x=0$, η σειρά μηδενίζεται). $\left|\frac{x^{n^2+2n+1}}{3^{n+1}}\,\frac{3^n}{x^{n^2}}\right| = \frac{|x|^{2n+1}}{3} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } |x|<1 \\ 1/3, & \text{αν } |x|=1 \\ +\infty, & \text{αν } |x|>1 \end{cases}$

Η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό $\Leftrightarrow |x|\leq 1$. Αν $x>1$, η σειρά απειρίζεται. Αν $x<-1$, η σειρά αποκλίνει (2ο κριτήριο απόκλισης)

Σύντομες Λύσεις, Φυλ. #4, 5, 6

1) (a): Για $x=-2$ η σειρά μηδενίζεται. Κρ. λόγου για $x\neq -2$: $\frac{|x+2|^{n+1}}{3n+4}\,\frac{3n+1}{|x+2|^{n}} \to |x+2|$.

Άρα, το εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης είναι: $|x+2|<1 \iff -1<x+2<1 \iff -3<x<-1$

Αν $x=-3$, η σειρά γίνεται: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ συγκλίνει σε αριθμό, από Leibnitz (ελέγξτε τις υποθέσεις)

Αν $x=-1$, η σειρά γίνεται: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3n+1} = +\infty$, από ΚΟΣ με αρμονική $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=+\infty$. Άρα, διάστημα σύγκλισης: $[-3,-1)$, ακτίνα $R=1$

(b) Για $x\neq 1/2$, κρ. λόγου: $\frac{|2x-1|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\,\frac{\sqrt{n}}{|2x-1|^{n}} \to |2x-1|$. Πρέπει $|2x-1|<1$ για να συγκλίνει σε πραγμ.

Αν $2x-1=1$, η σειρά είναι η $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}=+\infty$ (p-σειρά, $p=1/2<1$). Αν $2x-1=-1$, η σειρά είναι η $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ συγκλ. σε πραγματικό (Leibnitz). Άρα Δ.Σ $=[0,1)$, $R=1/2$.

(c): Για $x\neq -4/3$, κρ. λόγου: $\frac{|3x+4|^{n+1}}{5^{n+1}(2n+5)}\,\frac{5^n(2n+3)}{|3x+4|^n} = \frac{|3x+4|(2n+3)}{5(2n+5)} \to \frac{|3x+4|}{5}$. Αν $|3x+4|<5$

η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό. Αν $3x+4=5$, η σειρά γίνεται $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n+3}=+\infty$, από ΚΟΣ

με αρμ. σειρά $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=+\infty$. Αν $3x+4=-5$, η σειρά γίνεται $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{2n+3}$ συγκλίνει σε πραγματικό

από Leibnitz. Άρα, Δ.Σ $=[-3,\frac{1}{3})$, $R=5/3$.

(d): Για $x\neq -1$, κρ. λόγου: $\frac{n+1}{2^{n+1}}\,\frac{|x+1|^{n+1}}{|x+1|^{n}}\,\frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}\,|x+1| \to \frac{|x+1|}{2}$. Η σειρά συγκλίνει σε πραγμ.

όταν $|x+1|<2$. Αν $x+1=2$, η σειρά $\sum_{n\geq 1} n=+\infty$, Αν $x+1=-2$, η σειρά $\sum_{n\geq 1}(-1)^n n$ αποκλίνει.

Άρα Δ.Σ. $=(-3,1)$, $R=2$

(e): Για $x\neq 0$, κρ. λόγου: $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2+n+1}\,\frac{n^2+n}{|x|^n} \to |x|$. Αν $|x|<1$, η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό. Αν

$x=1$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+n} < \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < +\infty$ (p-σειρά, $p=2>1$) + ΚΑΣ. Αν $x=-1$, $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+n}$ συγκλίνει σε

πραγμ. από Leibnitz $\Rightarrow$ Δ.Σ $=[-1,1]$, $R=1$.

(f): Για $x\neq 0$, κρ. λόγου: $\frac{|x|^{2n+2}}{5^{n+1}\sqrt{n+1}}\,\frac{5^n\sqrt{n}}{|x|^{2n}} \to \frac{|x|^2}{5}$. Αν $|x|^2<5$, η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό.

Αν $x^2=5$, η σειρά είναι η $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}=+\infty$ (p-σειρά, $p=1/2<1$) $\Rightarrow$ Δ.Σ $=(-\sqrt{5},\sqrt{5})$, $R=\sqrt{5}$.

(g): Για $x\neq 1/4$, κρ. λόγου: $\frac{|4x-1|^{3n+3}}{(n+1)\,2^{n+1}}\,\frac{n\,2^n}{|4x-1|^{3n}} \to \frac{|4x-1|^3}{2}$. Αν $|4x-1|^3<2$, η σειρά

συγκλίνει σε πραγματικό.

Αν $(4x-1)^3=2$, η σειρά γίνεται $\sum_{n\geq1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}=+\infty$ (αρμονική). Αν $(4x-1)^3=-2$ η σειρά γίνεται $\sum_{n\geq1}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ συγκλίνει σε πραγμ. (Leibniz). Άρα,

Δ.Σ. $=\left[(1-\sqrt[3]{2})\cdot\frac{1}{4},\ (1+\sqrt[3]{2})\cdot\frac{1}{4}\right)$, $R=\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$

(h): Για $x\neq-\frac{12}{7}$, κρ. λόγου: $\frac{|7x+12|^{n^2+2n+1}}{5^{n+1}+6^{n+1}}\,\frac{5^n+6^n}{|7x+12|^{n^2}}=\frac{|7x+12|^{2n+1}\,6^n\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n+1\right]}{6^{n+1}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}+1\right]}=$

$=|7x+12|^{2n+1}\cdot\frac{1}{6}\,\frac{1+(5/6)^n}{1+(5/6)^{n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $(5/6)^n\to0$ (κρ. λόγου για ακολουθίες, αφού $0<5/6<1$), ~~αν $|7x+12|<1$,~~ έχουμε ότι $\frac{1+(5/6)^n}{1+(5/6)^{n+1}}\,\frac{1}{6}\to 1/6$.

Αν $|7x+12|<1\Rightarrow|7x+12|^{2n+1}\to0$ (κρ. λόγου ακολουθιών). Άρα, η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό όταν $|7x+12|<1$. Αν $|7x+12|>1\Rightarrow|7x+12|^{2n+1}\to+\infty>1\Rightarrow$ η σειρά δεν συγκλίνει σε πραγματικό. Αν $|7x+12|=1$, ο λόγος συγκλίνει στο $1/6<1$ $\Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό. Άρα, Δ.Σ. $=\{x\in\mathbb{R}:|7x+12|\leq1\}=\left[-\frac{13}{7},-\frac{11}{7}\right]$, $R=\frac{1}{7}$

(i): Για $x\neq0$, κρ. λόγου $\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\,\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)(2n+1)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\,\frac{3\cdot6\cdots3n}{3\cdot6\cdots(3n)(3n+3)}\right|=|x|\,\frac{2n+1}{3n+3}\to\frac{2|x|}{3}$.

Αν $|x|<3/2\Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό. Αν $x=3/2$, η σειρά γίνεται

$$\sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{3\cdot6\cdots(3n)}\,\frac{3^n}{2^n}=\sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{3\cdot(3\cdot2)(3\cdot3)\cdots(3n)}\,\frac{3^n}{2^n}=\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdots(2n-1)}{3^n(1\cdot2\cdots n)\,2^n}\,3^n=$$

$$=\sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{(n!)\,2^n}\ \cancel{=\sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^n\frac{[1\cdot3\cdots(2n-1)][2\cdot4\cdots2n]}{[2\cdot4\cdots2n](n!)\,2^n}=\sum_{n\geq1}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n(n!)(n!)2^n}}$$

$$\cancel{=\sum_{n\geq1}(-1)^n\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}}.\ \text{~~Θέτουμε~~}\ \cancel{b_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}}.\ \text{~~Τότε,~~}\ \cancel{\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}[(n+1)!]^2}\,\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}=}$$

$$\cancel{\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}=\frac{2n+1}{2n+2}}$$

$$=\sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{(n!)\,2^n}=\sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{(1\cdot2\cdots n)\underbrace{(2\cdots2)}_{n\text{-φορές}}}=$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{(1\cdot 2)(2\cdot 2)(3\cdot 2)\cdots(n\cdot 2)} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n)}.$$

Θέτουμε $b_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+2)} \dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}$

$\Rightarrow \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα, $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty} \downarrow$. Δείχνουμε ότι $b_n \to 0$.

Έχουμε ότι $\ln(b_n) = \ln[1\cdot 3\cdots(2n-1)] - \ln[2\cdot 4\cdots(2n)] =$

$= [\ln(1)+\ln(3)+\cdots+\ln(2n-1)] - [\ln(2)+\ln(4)+\cdots+\ln(2n)] =$

$= [\ln(1)-\ln(2)] + [\ln(3)-\ln(4)] + \cdots + [\ln(2n-1)-\ln(2n)] =$

$= \sum_{k\geq 1}^{n} [\ln(2k-1)-\ln(2k)] = \sum_{k\geq 1}^{n} \ln\left(\frac{2k-1}{2k}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς,

$-\ln(b_n) = \sum_{k\geq 1}^{n} \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)$ και $-\ln(b_n) > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, αφού $0<b_n<1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Επίσης, $b_n > b_{n+1} \Rightarrow \ln(b_n) > \ln(b_{n+1}) \Rightarrow -\ln(b_n) < -\ln(b_{n+1})$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα $(-\ln(b_n))_{n\geq 1}^{\infty}$ γν. αύξουσα ακολουθία πραγματικών. Άρα, έχουμε ότι

$$-\lim_{n\to\infty} \ln(b_n) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) \quad (\text{θετικός πραγματικός, ή, } +\infty)$$

Όμως, $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ (DLH) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)}{\frac{2n}{2n-1}-1} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)}{\frac{1}{2n-1}} = 1$

Αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = +\infty$ (ΚΟΣ με αρμονική $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$), συμπεραίνουμε από ΚΟΣ

ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) = +\infty \Rightarrow -\ln(b_n) \to +\infty \Rightarrow \ln(b_n) \to -\infty \Rightarrow b_n \to 0$

Αφού $b_n \downarrow 0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n b_n$ συγκλίνει σε πραγματικό από Leibnitz

Άρα, η δυναμοσειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} x^n$ συγκλίνει σε πραγματικό για

$x=3/2$. Όταν $x=-3/2$, η δυναμοσειρά ισούται με τη σειρά

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}\left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}\,\frac{3^n}{2^n} \ \underline{\text{όπως παραπάνω}}$$

$= \sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n$, όπου $b_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, άρα, $n\left[1-\frac{b_{n+1}}{b_n}\right] = n\left[1-\frac{2n+1}{2n+2}\right] =$

$= n\frac{1}{2n+2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$. Συμπεραίνουμε από το κριτήριο Raabe-Duhamel

ότι η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n = +\infty$. Άρα, για $x=-3/2$ η σειρά αποκλίνει.

Συνεπώς, $\Delta\Sigma = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $R = 3/2$

2) (i) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1 \Rightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^{n-1}$, $|x|<1 \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^{n-1}$,

$|x|<1 \Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^n$, $\forall x\in(-1,1)$. Για $x=5/7 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} n\frac{5^n}{7^n} = \frac{5/7}{(1-5/7)^2} =$

$= \frac{5/7}{4/49} = \frac{35}{4}$

(ii) $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^{n-1}$, $|x|<1 \Rightarrow \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$, $|x|<1$ (Θεώρημα

παραγώγισης δυναμοσειρών, όπως παραπάνω). Άρα, $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$, $|x|<1$

$\Rightarrow \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n x^n$, $|x|<1$, $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \sum_{n=2}^{\infty} n x^n =$

$= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^n - x = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} - x$, $|x|<1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{4^n} = \frac{1/8}{27/64} + \frac{1/4}{9/16} - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n} = \frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{20}{27}$

3) (i): $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} x = x + x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης, άρα είναι παραγωγίσιμη (και συνεπώς συνεχής) στο $\mathbb{R}$. Άρα, $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n+1)!} = 0$. Άρα,

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

(ii) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} =$

$= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots\right) = 1$, αφού η τελευταία δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης και συνεπώς είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(iii) $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n\right] = \frac{-1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n =$

$= \frac{-1}{x^2} x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}, \forall x \neq 0$

Αυτή η δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης, άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\left[-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \dots\right] = +\frac{1}{2}$.

(iv) $\frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x - x^2/2}{x^3} = \frac{\sum_{n=3}^{\infty} x^n/n!}{x^3} = \frac{x^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-3}}{n!}}{x^3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-3}}{n!} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{3!} + \frac{x}{4!} + \frac{x^2}{5!} + \dots\right] = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$, από τη συνέχεια της δυναμοσειράς στο $\mathbb{R}$

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-4}}{(2n+1)!}(-1)^n = \frac{1}{5!}$, αφού η δυναμοσειρά είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Φ.1. #5

1) Έστω $(x_n)_{n\geq 1}$ με $x_n \in I$ και $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ώστε $x_n \to x_0$. Αφού $f: I\setminus\{x_0\} \to J\setminus\{y_0\} \Rightarrow f(x_n) \neq y_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 \Rightarrow f(x_n) \to y_0$.
Αφού, $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = \lambda \Rightarrow g(f(x_n)) \to \lambda$ γιατί $f(x_n) \to y_0$ και $f(x_n) \neq y_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Άρα, $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to x_0 \Rightarrow (g\circ f)(x_n) \to \lambda$. Άρα, $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \lambda$.

Π.χ., $g(y) = \dfrac{\sin y}{y}$, $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0,+\infty)$. Τότε, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

και $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} (g\circ f)(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$

(βέβαια, $f(x) = \sqrt{x} \neq 0$ αν $x > 0$)

2) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-e^x+1}{xe^x - x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^x}{e^x+xe^x-1} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{\sin x + x\cos x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left[(x+1)^a - x^a\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{(x+1)^a}{x^a} - 1\right] x^a = \lim_{x\to +\infty} \frac{(1+1/x)^a - 1}{(1/x)^a} \underset{1/x = t}{\overset{t\to 0^+}{=}} \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+t)^a - 1}{t^a} \underset{(a>0)}{\overset{0/0}{=}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{a(1+t)^{a-1}}{a t^{a-1}} = \lim_{t\to 0^+} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{a-1} = \lim_{x\to +\infty} (1+x)^{a-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a>1 \\ 1, & \text{αν } a=1 \\ 0, & \text{αν } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} [\cos(x)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln[\cos(x)]\cdot 1/x^2}.$$ Τώρα, $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln[\cos x]}{x^2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(-\sin x)\frac{1}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} [\cos(x)]^{1/x^2} = e^{-1/2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left[\frac{\sin x}{x}\right]\cdot\frac{1}{1-\cos x}}$$, Έχουμε ότι $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left[\frac{\sin x}{x}\right]}{1-\cos x} \overset{0/0}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{(\cos x)x - \sin x}{x^2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sin x + 2x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\frac{\sin x}{x} + 2\cos x} = -1/3.$$ Άρα

το αρχικό όριο ίσο με $e^{-1/3}$

6

$$\lim_{x\to+\infty}(1+ax)^{1/x} \overset{a>0}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}}. \text{ Το } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+ax)}{x} \overset{\infty}{\underset{\infty}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{a}{1+ax}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(1+ax)^{1/x}=1.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln[\cos(2x)]}{\ln[\cos(3x)]} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos(2x)}\cdot(-2)\sin(2x)}{\frac{1}{\cos(3x)}(-3)\cdot\sin(3x)} = \lim_{x\to0}\frac{2}{3}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \overset{0}{\underset{0}{=}} \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{2\cos(2x)}{3\cos(3x)}=\frac{4}{9}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{e^{2x}-1} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{2e^{2x}}=\frac{1}{2} \quad \square \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1-x-x^2/2}{x^2} \overset{\infty}{\underset{\infty}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1-x}{2x} \overset{\infty}{\underset{\infty}{=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{2}=+\infty \quad \square \quad \lim_{x\to-\infty}x\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)}{1/x} \overset{0}{\underset{0}{=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x+2}{x-2}\,\frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2}}{-1/x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{(x-2)(x+2)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^2}{x^2-4}=-4.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{Arctan}(x)}{\operatorname{Arcsin}(x)-x} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)(1-\sqrt{1-x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2})}{(1+x^2)(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2})}{(1+x^2)[1-(1-x^2)]}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2})}{(1+x^2)\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2})}{1+x^2}=2.$$

$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin(x)}\cdot x\sin(1/x)=1\cdot0=0$, αφού $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$, ενώ

$|x\sin(1/x)|\le|x|\to0$, αν $x\to0$, και Θ. Sandwich.

$\lim_{x\to0}\sin(1/x)$ δεν υπάρχει αφού $\frac{1}{n\pi}\to0$ και $\sin(n\pi)=0\to0$, ενώ

$\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\to0$ και $\sin(2n\pi+\pi/2)=\sin(\pi/2)=1\to1\neq0$. Αν το $\lim_{x\to0}\sin(1/x)$

υπήρχε, θα ήταν $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(y_n)$ για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n)_{n\ge1}^{\infty}$ και

$(y_n)_{n\ge1}^{\infty}$ με $x_n\to0$, $y_n\to0$.

$\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$ δεν υπάρχει αφού $\frac{1}{n\pi} \to 0$ και $\cos(n\pi) = (-1)^n$ δεν συγκλίνει

$\lim_{x\to +\infty} x\sin(x)$ δεν υπάρχει αφού $n\pi \to +\infty$ και $n\pi \sin(n\pi) = 0 \to 0$, ενώ $2n\pi + \pi/2 \to +\infty$ και $\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \pi/2 \to +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x\sin x}{e^x + 1} = 0$, αφού $\left|\frac{x\sin x}{e^x+1}\right| \leq \frac{|x|}{e^x+1} \leq \frac{|x|}{e^x}$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Άρα, από Sandwich το όριο είναι 0

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin(x) + \cos(x)}{1+\cos(x)}$ δεν υπάρχει αφού $2n\pi \to +\infty$ και $\frac{2n\pi\sin(2n\pi) + \cos(2n\pi)}{1+\cos(2n\pi)} =$

$= \frac{0+1}{1+1} = 1/2 \to 1/2$, ενώ $2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty$ και $\frac{\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(2n\pi+\pi/2)} =$

$= \frac{(2n\pi + \pi/2)\cdot 1 + 0}{1+0} = 2n\pi + \pi/2 \to +\infty$

Λύσεις Φυλλάδιο #6

1) (α): $xe^{x^2} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(β): $\frac{x^2}{x-1} = -x^2 \frac{1}{1-x} = (-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)x^n$, $|x|<1$.

(γ): $x^2 - \cos(x^3) = x^2 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!} = x^2 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!} = -1 + x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(δ): $-x+7 \,|\, 6x+2$; $x + \frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6}$; $22/3$ $\Rightarrow \frac{7-x}{6x+2} = -\frac{1}{6} + \frac{22}{3}\frac{1}{6x+2} = -\frac{1}{6} + \frac{22}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{3x+1} = \frac{-1}{6} + \frac{11}{3}\frac{1}{1-(-3x)} =$

$= -\frac{1}{6} + \frac{11}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-3x)^n$, αν $|-3x|<1$. Άρα, $\frac{7-x}{6x+2} = -\frac{1}{6} + \frac{11}{3}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n x^n\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7-x}{6x+2} = \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n x^n$, $|x| < 1/3$.

(ε): $\dfrac{3x^2+5}{2x^3+4} = \dfrac{1}{4}(3x^2+5)\cdot\dfrac{1}{1+x^3/2} = \dfrac{3x^2+5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x^3}{2}\right)^n$, αν $|x|^3<2$

$\Rightarrow \dfrac{3x^2+5}{2x^3+4} = \dfrac{3x^2+5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n x^{3n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{5}{4}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n x^{3n}$, $|x|<2^{1/3}$

(Παρατήρηση: $3n+2 \neq 3k$, $\forall n,k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, άρα οι σειρές δεν μαζεύονται σε μία.)

(στ):

$$\begin{array}{l|l} x^2+3 & 7x+6 \\ \hline -x^2-\frac{6x}{7} & \frac{1}{7}x-\frac{6}{49} \\ \hline -\frac{6x}{7}+3 & \\ \hline \frac{6x}{7}+\frac{36}{49} & \\ \hline 3+\frac{36}{49}=\frac{183}{49} & \end{array}$$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+3}{7x+6} = -\dfrac{6}{49}+\dfrac{1}{7}x+\dfrac{183}{49}\cdot\dfrac{1}{7x+6} =$

$= -\dfrac{6}{49}+\dfrac{1}{7}x+\dfrac{183}{294}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{7x}{6}} = -\dfrac{6}{49}+\dfrac{1}{7}x+\dfrac{183}{294}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{7x}{6}\right)^n$,

αν $\left|\dfrac{7x}{6}\right|<1 \Rightarrow \dfrac{x^2+3}{7x+6} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{12}x+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{183}{294}\left(-\dfrac{7}{6}\right)^n x^n$, $|x|<\dfrac{6}{7}$.

(ζ): $\dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x^2}{4}\right)^n = \dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^n}x^{2n}$, $|x^2/4|<1 \Leftrightarrow |x|<2$.

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{x^2+4}\right)' = \dfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^n}(2n)x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2n}{4^{n+1}}x^{2n-1}$, $|x|<2$ (Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών) $\Rightarrow -\dfrac{2x}{(x^2+4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2n}{4^{n+1}}x^{2n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}(2n)x^{2n-2}$

$\Rightarrow -\dfrac{2x}{(x^2+4)^2} = x\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}}2(n+1)x^{2n}$, $|x|<2$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{(x^2+4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}}(n+1)x^{2n} \Rightarrow \dfrac{1}{(x^2+4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^{n+2}}(n+1)x^{2n}$, $|x|<2$

(η) Αν $f(x)=\ln(3x^2+4)$, τότε $f'(x) = \dfrac{6x}{3x^2+4} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x}{1+\frac{3x^2}{4}} = \dfrac{3x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{3x^2}{4}\right)^n$,

όταν $\left|-\dfrac{3x^2}{4}\right|<1 \Leftrightarrow |x|^2<\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow |x|<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Άρα,

$f'(x) = \dfrac{3x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n x^{2n+1}$, $|x|<2/\sqrt{3}$

$\xrightarrow{\text{ΘΟΔ}} f(x) = c+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}$, $|x|<2/\sqrt{3}$

Για $x=0 \Rightarrow c = f(0) = \ln(4)$.

Όταν $|x| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, η σειρά γίνεται $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \frac{1}{2n+2} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln(2)$ και $\lim_{x \to \pm 2/\sqrt{3}} f(x) = \ln(8)$

Άρα από το Θεώρημα Abel $\Rightarrow f(x) = \ln(3x^2+4) = \ln(4) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$,

με $|x| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2) (i) $f(x) = \operatorname{Arctan}(2x+3) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(2x+3)^2+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left[-(2x+3)^2\right]^n =$

$= 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x+3)^{2n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 4^n \left(x+\frac{3}{2}\right)^{2n}$, $|2x+3|^2 < 1$

$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \cdot 4^n \left(x+\frac{3}{2}\right)^{2n}$, $|2x+3| < 1 \Leftrightarrow |x+\frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$

$\overset{\text{ΘΟΛ}}{\Rightarrow} f(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n 4^n \frac{1}{2n+1} \left(x+\frac{3}{2}\right)^{2n+1}$, $|x+\frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$.

$C = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{Arctan}(2x+3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n 4^n}{2n+1} \left(x+\frac{3}{2}\right)^{2n+1}$, $|x+\frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$

Όταν $|x+\frac{3}{2}| = \frac{1}{2}$, η σειρά γίνεται $\pm\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n 4^n}{2n+1} \frac{1}{4^n} = \pm\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ η οποία

συγκλίνει από το κριτήριο Leibnitz. Αφού $\operatorname{Arctan}(2x+3)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, το

Θ. Abel $\Rightarrow \operatorname{Arctan}(2x+3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n 4^n}{2n+1} \left(x+\frac{3}{2}\right)^{2n+1}$, $|x+\frac{3}{2}| \leq \frac{1}{2}$.

(ii) $\cos(2x+1) = \cos(2x-2+3) = \cos(2x-2)\cos(3) - \sin(2x-2)\sin(3) =$

$= \cos(3)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-2)^{2n}}{(2n)!} - \sin(3)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$

$= \cos(3)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{(2n)!} (x-1)^{2n} - \sin(3)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} (x-1)^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

10