Ιδιότητες της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης

Είδαμε ότι για κάθε $a>0$ υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ με $e^x = a$.
Αυτό σημαίνει ότι η εκθετική συνάρτηση $Exp : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ με $Exp(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί. Δηλαδή το πεδίο τιμών της Exp ισούται με το διάστημα $(0,+\infty)$. Επίσης γνωρίζουμε ότι η Exp είναι γνησίως αύξουσα αφού $e>1$. Η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης Exp είναι η λογαριθμική συνάρτηση $\ln : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $\ln(x)$ να ισούται με τη μοναδική λύση της εξίσωσης $e^y = x$, $\forall x>0$. Έπεται ότι και η $\ln$ είναι γν. αύξουσα και επί και $e^{\ln(x)} = x$, $\forall x>0$, επί $\ln(e^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ανάλογα ορίζεται, για $a>0$, η εκθετική συνάρτηση με βάση a,

$$Exp_a : \mathbb{R} \to (0,+\infty) \text{ με } Exp_a(x) = a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η Exp_a είναι γν. αύξουσα, αν $a>1$, και γν. φθίνουσα, αν $0<a<1$.
Επίσης, η Exp_a είναι επί, αφού $\forall\, b>0$, η εξίσωση $a^x = b$ έχει λύση: $a^x = e^{x\ln(a)} = b \Leftrightarrow x\ln(a) = \ln(b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Η αντίστροφη της Exp_a είναι η $\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

Άρα, $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$, $\forall x>0$, $\forall a>0$.

και $a^{\log_a(x)} = x$, $\forall x>0$, $\forall a>0$.

Όρια ακολουθιών που ορίζονται μέσω του λογαρίθμου

Ας θυμηθούμε πρώτα τις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων:

(i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\forall x, y > 0$, $\forall a > 0$.

(ii) $\log_a(b^x) = x \log_a(b)$, $\forall x > 0$, $\forall a > 0$, $\forall b > 0$.

Οι (i) και (ii) προκύπτουν από τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων.
Επίσης ας θυμηθούμε ότι στη μελέτη της εκθετικής συνάρτησης δείξαμε ότι αν $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ακολουθία πραγματικών και $x \in \mathbb{R}$ με $x_n \to x$, τότε $a^{x_n} \to a^x$, $\forall a > 0$.
Επίσης, αν $x_n \to 0$, τότε $\dfrac{e^{x_n} - 1}{x_n} \to 1$.

Πρόταση 1: 1) Αν $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $x_n \to x \in \mathbb{R}$ με $x > 0$, τότε $\ln(x_n) \to \ln(x)$

2) Αν $x_n \to +\infty$, τότε $\ln(x_n) \to +\infty$

3) Αν $x_n \to 0$, τότε $\ln(x_n) \to -\infty$.

Απόδ: 1) (Ex absurdo). Έστω ότι $\ln(x_n) \not\to \ln(x)$. Τότε υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε $\ln(x_n) \notin (\ln(x) - \epsilon_0, \ln(x) + \epsilon_0)$, για άπειρα $n \in \mathbb{N}$.
Έπεται τώρα ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n\geq 1}$ ώστε:

Είτε $\ln(x_{k_n}) \leq \ln(x) - \epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Είτε $\ln(x_{k_n}) \geq \ln(x) + \epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Στην πρώτη περίπτωση, όταν $\ln(x_{k_n}) < \ln(x) - \epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, γράφουμε $\epsilon_0 = \ln(e^{\epsilon_0})$ και συνεπώς έχουμε ότι

$$\ln(x_{k_n}) < \ln(x) - \ln(e^{\epsilon_0}) = \ln\left(\frac{x}{e^{\epsilon_0}}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αφού η $\ln$ είναι γν. αύξουσα, παίρνουμε ότι

$x_{k_n} < \frac{x}{e^{\epsilon_0}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} \leq \frac{x}{e^{\epsilon_0}} < x$, γιατί

$\epsilon_0 > 0 \Rightarrow e^{\epsilon_0} > 1$. Δηλαδή, $x < x$, άτοπο.

Παρόμοια, καταλήγουμε σε άτοπο όταν $\ln(x_{k_n}) > \ln(x) + \epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς, $\ln(x_n) \to \ln(x)$ όταν $x_n \to x > 0$.

2) Έστω $\epsilon > 0$ τυχόν. Αφού $x_n \to +\infty \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : x_n > e^{1/\epsilon}$, $\forall n \geq n_0$. Άρα, $\ln(x_n) > \ln(e^{1/\epsilon}) = 1/\epsilon$, $\forall n \geq n_0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln(x_n)} < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$ και $\ln(x_n) > 0$, $\forall n \geq n_0$.

$\Rightarrow \frac{1}{\ln(x_n)} \to 0$ και $\ln(x_n) > 0$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \ln(x_n) \to +\infty$.

3) Αν $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $x_n \to 0$, τότε $\frac{1}{x_n} \to +\infty$. Άρα $\ln\left(\frac{1}{x_n}\right) \to +\infty$ από 2). Έπεται τώρα ότι $-\ln(x_n) \to +\infty$

$\Rightarrow \ln(x_n) \to -\infty$.

<u>Πρόταση 2</u>: 1) $e^x \geq 1+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2) $\ln(x) \leq x-1$, $\forall x>0$

3) $a>1$ και $x_n\to+\infty \Rightarrow a^{x_n}\to+\infty$

4) $a>1$ και $x_n\to-\infty \Rightarrow a^{x_n}\to 0$

<u>Απόδ</u>: 1) Αν $x>0$, γνωρίζουμε ότι η ακολουθία $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n\geq1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα με όριο το e^x. Άρα, $1+x \leq e^x$.

Όταν $x\leq -1$, τότε $1+x\leq 0 < e^x$. Όταν $-1<x\leq 0$, τότε γνωρίζουμε ότι η $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n\geq1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα με όριο το e^x. Άρα, πάλι, $1+x<e^x$. Συνεπώς, $e^x>1+x$, $\forall x\neq 0$.

2) Από (1), αφού η $\ln$ είναι γν. αύξουσα, έχουμε $\ln(1+x)\leq x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ με $x>-1$. Αν $x>0$, τότε $x=(x-1)+1$ με $x-1>-1$. Άρα $\ln(1+x-1)\leq x-1 \Rightarrow \ln(x)\leq x-1$, $\forall x>0$.

3) $a^{x_n}=e^{x_n\ln(a)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $a>1$, έχουμε ότι $\ln(a)>0$. Άρα $x_n\ln(a)\to+\infty$. Όμως, $e^{x_n\ln(a)}\geq x_n\ln(a)+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $a^{x_n}\to+\infty$.

4) $a^{x_n}>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\frac{1}{a^{x_n}}=a^{-x_n}\to+\infty$ αφού $a>1$ και $-x_n\to+\infty$.

Άρα, $a^{x_n}\to 0$.

<u>Πρόταση 3</u>: 1) Αν $x_n\to x$ με $x\in\mathbb{R}$, $x>0$, και $\lambda_n\to\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $x_n^{\lambda_n}\to x^{\lambda}$.

2) Αν $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\to 0$, και $\lambda_n\to\lambda$ με $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$, τότε $x_n^{\lambda_n}\to 0$

3) Αν $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\to 0$, και $\lambda_n\to\lambda$ με $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda<0$ τότε $x_n^{\lambda_n}\to+\infty$.

4) Αν $x_n \to +\infty$ και $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$, τότε $x_n^{\lambda_n} \to +\infty$.

5) Αν $x_n \to +\infty$ και $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda < 0$, τότε $x_n^{\lambda_n} \to 0$

6) Αν $x_n \to +\infty$ και $\lambda_n \to +\infty$, τότε $x_n^{\lambda_n} \to +\infty$

7) Αν $x_n \to +\infty$ και $\lambda_n \to -\infty$, τότε $x_n^{\lambda_n} \to 0$.

8) Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, και $\lambda_n \to +\infty$, τότε $x_n^{\lambda_n} \to +\infty$

9) Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$, και $\lambda_n \to +\infty$, τότε $x_n^{\lambda_n} \to 0$

Η απόδειξη των 1-9 προκύπτει από τις Προτάσεις 1 και 2 και την ταυτότητα $x^\lambda = e^{\lambda \ln(x)}$, $\forall x > 0$

Π.χ., η 1): $x_n^{\lambda_n} = e^{\lambda_n \ln(x_n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού $x_n \to x > 0 \Rightarrow$ $\ln(x_n) \to \ln(x)$ και $\lambda_n \ln(x_n) \to \lambda \ln(x) \Rightarrow e^{\lambda_n \ln(x_n)} \to e^{\lambda \ln(x)}$

$\Rightarrow x_n^{\lambda_n} \to x^\lambda$.

Η 2): $x_n^{\lambda_n} = e^{\lambda_n \ln(x_n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $\lambda_n \ln(x_n) \to \lambda(-\infty) = -\infty$

$\Rightarrow e^{\lambda_n \ln(x_n)} \to 0 \Rightarrow x_n^{\lambda_n} \to 0$, αφού $e > 1$.

Παρόμοια, αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες.

Πρόταση 4: Αν $a > 0$ και $x_n \to 0$, τότε $\dfrac{a^{x_n} - 1}{x_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln(a)$

Απόδ: $\dfrac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \dfrac{e^{x_n \ln(a)} - 1}{x_n \ln(a)} \ln(a) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \cdot \ln(a) = \ln(a)$

αφού $y_n = x_n \ln(a) \to 0$ και $\dfrac{e^{y_n} - 1}{y_n} \to 1$.