Ασκήσεις πάνω στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις

1) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(0)=1$. Υποθέτουμε ότι $f'=f$. Τότε, $f(x)=e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x)=f(x)e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=[f'(x)-f(x)]e^{-x}=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ λόγω της υπόθεσης $f'=f$. Από το ΘΜΤ έπεται ότι $F=$ σταθερή. Άρα $F(x)=F(0)$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x)=f(0)e^{-0}=1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ αφού $f(0)=1$. Άρα, $f(x)e^{-x}=1$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $f''(x)+f(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0)=f'(0)=0$, τότε $f(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Ορίζουμε $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ γιατί η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Έπεται τώρα ότι $F'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, λόγω της υπόθεσης $f+f''=0$. Από το ΘΜΤ συμπεραίνουμε ότι $F=$ σταθερή $\Rightarrow$ $F(x)=F(0)=[f(0)]^2+[f'(0)]^2=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Άρα, $f(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $f''(x)+f(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(i) Αν $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, τότε $f(x)=\sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(ii) Αν $f(0)=1$ και $f'(0)=0$, τότε $f(x)=\cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση: (i) Θέτουμε $g(x)=f(x)-\sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Τότε $g'(x)=f'(x)-\cos(x)$ και $g''(x)=f''(x)+\sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Άρα, $g''(x)+g(x)=f''(x)+f(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, λόγω της υπόθεσης. Επιπλέον έχουμε ότι $g(0)=f(0)-\sin(0)=0$ και $g'(0)=f'(0)-\cos(0)=$
$=1-1=0$. Από την άσκηση (2) $\Rightarrow g(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)=\sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(ii) Θέτουμε $g(x)=f(x)-\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα (i)

4) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \ \forall a,b\in\mathbb{R}$

Λύση: Ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \sin(x+b) - \sin(x)\cos(b) - \cos(x)\sin(b), \ \forall x\in\mathbb{R}$, με $b\in\mathbb{R}$ σταθερό. Έχουμε ότι $f'(x) = \cos(x+b) - \cos(x)\cos(b) + \sin(x)\sin(b)$ και $f''(x) = -\sin(x+b) + \sin(x)\cos(b) + \cos(x)\sin(b), \ \forall x\in\mathbb{R}$. Βλέπουμε εύκολα ότι $f''(x)+f(x) = 0, \ \forall x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, $f(0) = \sin(b) - \underbrace{\sin(0)}_{0}\cos(b) - \underbrace{\cos(0)}_{1}\sin(b) = 0$ και $f'(0) = \cos(b) - \cos(b) = 0$. Άρα, πάλι από την 2) έχουμε ότι $f(x)=0, \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \sin(x+b) = \sin(x)\cos(b) + \cos(x)\sin(b), \ \forall x\in\mathbb{R}, \ \forall b\in\mathbb{R}$.
Θέτοντας $x=a$ έχουμε το ζητούμενο.

5) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

Λύση: Για $b\in\mathbb{R}$ σταθερό ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \cos(x+b) - \cos(x)\cos(b) + \sin(x)\sin(b)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Έχουμε ότι $f'(x) = -\sin(x+b) + \sin(x)\cos(b) + \cos(x)\sin(b) = 0, \ \forall x\in\mathbb{R}$, λόγω της άσκησης 4. Άρα, από ΘΜΤ, έχουμε ότι $f(x) = \text{σταθερό} = f(0) = -\sin(b)+\sin(b) = 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα, $\cos(x+b) = \cos(x)\cos(b) - \sin(x)\sin(b), \ \forall x\in\mathbb{R}, \ \forall b\in\mathbb{R}$.
Για $x=a$ έχουμε τη ζητούμενη σχέση.

Σημείωση: Άλλη λύση της 4) θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι $f''+f=0$ και $f(0)=f'(0)=0$. Μετά κάνουμε χρήση της 2).

Σημείωση: Οι 4) και 5) είναι βέβαια δύο πολύ γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες. Για ειδικές περιπτώσεις των a,b παίρνουμε τις ταυτότητες διπλασιασμού τόξου για sin και cos:

(i) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a), \ \forall a\in\mathbb{R}$. [Θέτουμε $a=b$ στην 4)]

(ii) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a), \ \forall a\in\mathbb{R}$. [— || — στην 5)]

(iii) $\cos(2a) = \cos^2(a) - [1-\cos^2(a)] = 2\cos^2(a) - 1, \ \forall a\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}, \ \forall a\in\mathbb{R}$$

(iv) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a), \ \forall a\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \ \forall a\in\mathbb{R}$$

6) $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Λύση: Αν $f(x)=\sin^2(x)+\cos^2(x), \forall x\in\mathbb{R}$, τότε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x)=2\sin(x)\cos(x)+2\cos(x)[-\sin(x)]=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Άρα $f\equiv$ σταθερή, από το ΘΜΤ και $f(x)=f(0)=\sin^2(0)+\cos^2(0)=0+1=1, \forall x\in\mathbb{R}$

7) Σε κάθε φραγμένο διάστημα (a,b) οι συναρτήσεις $\sin(x)$ και $\cos(x)$ έχουν το πολύ πεπερασμένο πλήθος ριζών. Δηλαδή αν $f(x)=\sin(x), \forall x\in\mathbb{R}$, ή $f(x)=\cos(x), \forall x\in\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος λύσεων στο (a,b).

Λύση: Έστω $f(x)$ μία εκ των συναρτήσεων ημίτονο, ή, συνημίτονο. Έστω $a<b$ πραγματικοί τέτοιοι ώστε να υπάρχουν άπειρες ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (a,b). Θα υπάρχει επομένως μία ακολουθία $(\rho_n)_{n\geq1}^{\infty}$ στοιχείων του (a,b) ώστε $\rho_n\neq\rho_m, \forall n\neq m$ στο $\mathbb{N}$, και $f(\rho_n)=0, \forall n\in\mathbb{N}$. Από γνωστή πρόταση η $(\rho_n)_{n\geq1}^{\infty}$ έχει μονότονη υπακολουθία $(\rho_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$. Αφού οι όροι της $(\rho_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι διάφοροι ανά δύο, η $(\rho_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$ θα είναι γνήσια μονότονη. Ας υποθέσουμε ότι $(\rho_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$ γν. αύξουσα. Αφού $(\rho_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$ είναι και φραγμένη, ~~έχουμε~~ $a<\rho_{k_n}<b, \forall n\in\mathbb{N}$, θα υπάρχει $\rho\in[a,b]$ με $\rho_{k_n}\to\rho$.

Η f είναι συνεχής, άρα $0=f(\rho_{k_n})\to f(\rho) \Rightarrow f(\rho)=0$

Επίσης, $\rho_{k_n}<\rho_{k_{n+1}}, \forall n\in\mathbb{N}$ και $f(\rho_{k_n})=f(\rho_{k_{n+1}})=0, \forall n\in\mathbb{N}$. Από το Θ. Rolle βρίσκουμε $\xi_n\in(\rho_{k_n},\rho_{k_{n+1}})$ με $f'(\xi_n)=0, \forall n\in\mathbb{N}$.

Όμως, $\rho_{k_n}<\xi_n<\rho_{k_{n+1}}, \forall n\in\mathbb{N}$, και $\rho_{k_n}\to\rho$, $\rho_{k_{n+1}}\to\rho$.

Συνεπάγεται, εκ του Θεωρ. Sandwich, ότι $\xi_n\to\rho$. Όμως η f' είναι συνεχής. Άρα, $0=f'(\xi_n)\to f'(\rho)\Rightarrow f'(\rho)=0$. Δηλαδή, $f(\rho)=f'(\rho)=0$. Όμως, $[f(\rho)]^2+[f'(\rho)]^2=1$. Άτοπο. Άρα η f έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος ριζών στο (a,b)

8) $\sin(1)>0$ και γενικότερα, $\sin(x)>0$ όταν $0<x\leq\sqrt{6}$.

<u>Λύση</u>: $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Η σειρά συγκλίνει απόλυτα, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα οι σειρές $\sum_{\substack{n=\text{άρτιος}\\ n\geq 0}}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $\sum_{\substack{n=\text{περιττός}\\ n\geq 1}}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ συγκλίνουν σε πραγματικούς

και $$\sin(x)=\sum_{\substack{n=\text{άρτιος}\\ n\geq 0}}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{\substack{n=\text{περιττός}\\ n\geq 1}}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{x^{2(2n)+1}}{[2(2n)+1]!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^{2(2n+1)+1}}{[2(2n+1)+1]!},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Αν $\sin(x)\leq 0$, για κάποιο $x\in\mathbb{R}$, τότε έχουμε ότι:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}$$

Αν $0<x\leq\sqrt{6}$, τότε $\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}<\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, ενώ

αν $n=0$, τότε $\frac{x^3}{3!}\leq\frac{x}{1!}\iff x^2\leq 3!=6$.

Πράγματι, αν $n\in\mathbb{N}$, τότε η ανισότητα $\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}<\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$ ισοδυναμεί με την $x^2<\frac{(4n+3)!}{(4n+1)!}=(4n+2)(4n+3)$ η οποία αληθεύει αφού $(4n+2)(4n+3)>6\geq x^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in(0,\sqrt{6}]$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}, \ \forall x \in [0,\sqrt{6}]$$ (αφού γνωρίζουμε ότι

αν $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν

σε πραγματικούς, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$).

Επίσης, $\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \leq \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$, αν $n=0$ και $x \in (0,\sqrt{6}]$

Άρα, $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}, \ \forall x \in (0,\sqrt{6}]$$

Συνεπώς, $\sin(x) > 0$, $\forall x \in (0,\sqrt{6}]$. Ειδικότερα, $\sin(1) > 0$

9) $\cos(2) < 0$.

Λύση: $\cos(2) = \cos^2(1) - \sin^2(1) = 1 - 2\sin^2(1)$. Άρα, $\cos(2) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2(1) > 1 \Leftrightarrow \sin(1) > \frac{1}{\sqrt{2}}$, αφού $\sin(1) > 0$ (Άσκηση 8)

Έχουμε τώρα ότι $\sin(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)!}$ (όπως στην Άσκηση 8 με $x=1$)

Άρα, $\sin(1) > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)!} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)!} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Η τελευταία ανισότητα αληθεύει γιατί $\frac{1}{(4n+1)!} > \frac{1}{(4n+3)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

και συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)!} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)!}$. Από την άλλη πλευρά,

$\frac{1}{(4\cdot 0+1)!} = \frac{1}{1!} = 1 > \frac{1}{(4\cdot 0+3)!} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{3!} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{6} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{25}{36} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 50 > 36$, αληθές. Άρα, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)!} >$

$> \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)!} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

10) Η συνάρτηση $y=\cos(x)$ έχει θετικές ρίζες. Ονομάζουμε $\frac{\pi}{2}$ τη μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης $\cos(x)=0$

Λύση: $\cos(0)=1>0$ και $\cos(2)<0$, από την 9). Αφού η cos είναι συνεχής, το Θεωρ. Bolzano μας δίνει την ύπαρξη ριζών της $\cos(x)=0$ στο διάστημα $(0,2)$. Από την 7) έχουμε ότι υπάρχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ριζών της $\cos(x)=0$ στο $(0,2)$. Η μικρότερη από τις ρίζες της $\cos(x)=0$ στο $(0,2)$ είναι αναγκαία και η μικρότερη θετική ρίζα της $\cos(x)=0$.

11) Η συνάρτηση sin είναι γνησίως αύξουσα και θετική στο $(0,\pi/2)$, και γνησίως φθίνουσα και θετική στο $(\pi/2,\pi)$. Επίσης, $\sin(\pi)=0$ και $\sin(\pi/2)=1$. Το πεδίο τιμών της $\sin|[0,\pi]$ είναι το $[0,1]$.
Η συνάρτηση cos είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Επίσης, $\cos(x)>0, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ και $\cos(x)<0, \forall x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. Ακόμα έχουμε ότι $\cos(\pi)=-1$ και το πεδίο τιμών της $\cos|[0,\pi]$ είναι το $[-1,1]$

Λύση: Αφού $\frac{\pi}{2}$ είναι η μικρότερη θετική ρίζα της cos, έχουμε ότι $\cos(x)\neq 0, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Άρα, η cos διατηρεί πρόσημο στο $(0,\frac{\pi}{2})$ επειδή είναι συνεχής. Αναγκαία έχουμε ότι $\cos(x)>0, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ αφού $\cos(0)=1$. Επίσης, $\sin'(x)=\cos(x)>0, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Άρα η sin είναι γν. αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και $\sin(x)>\sin(0)=0, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2}]$.
Παρατηρούμε τώρα ότι αν $0<x<\pi/2$, τότε $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(\frac{\pi}{2})\cos(x)-\sin(\frac{\pi}{2})\sin(x)$, από την άσκηση 5). Όμως $\cos(\frac{\pi}{2})=0$, εξ' ορισμού, ενώ $\sin^2(\frac{\pi}{2})+\cos^2(\frac{\pi}{2})=1 \Rightarrow \sin^2(\frac{\pi}{2})=1$. Αφού $\sin(\pi/2)>0$, έχουμε ότι $\sin(\frac{\pi}{2})=1$. Άρα, $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin(x), \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ και συνεπώς, $\cos(x)<0, \forall x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. Δηλαδή, η sin είναι γν. φθίνουσα στο $(\pi/2,\pi)$

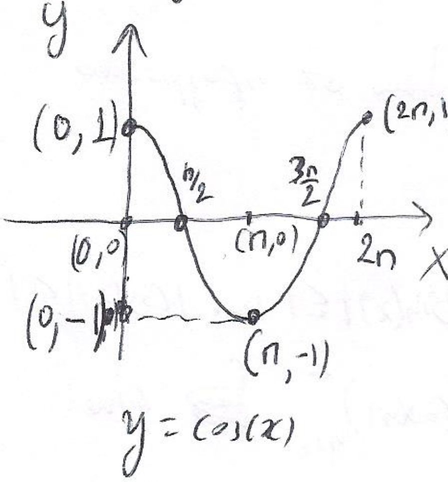
Ακόμα έχουμε ότι $\sin(\pi)=\sin(2\cdot\frac{\pi}{2})=2\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})=0$. Άρα, $\sin(x)>\sin(\pi)=0$, $\forall x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. Δηλαδή, $\sin(x)>0$, $\forall x\in(0,\pi)$.

Αφού $\cos'=-\sin$, έχουμε ότι η $\cos$ είναι γν. φθίνουσα στο $[0,\pi]$, ενώ $\cos^2(\pi)=1-\sin^2(\pi)=1$. Άρα $\cos(\pi)=-1$ αφού $\cos(x)<0$, $\forall x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. Αφού $\cos(0)=1$, $\cos(\pi)=-1$ και $\cos$ γν. φθίνουσα στο $[0,\pi]$, το πεδίο τιμών της $\cos|[0,\pi]$ είναι το $[-1,1]$. Αντίστοιχα, τα πεδία τιμών των $\sin|[0,\pi/2]$ και $\sin|[\frac{\pi}{2},\pi]$ είναι ίσα με ~~το~~ $[0,1]$ και αφού και το πεδίο τιμών της $\sin|[0,\pi]$ είναι το $[0,1]$.

<u>Σημείωση</u>: $\pi/2$ είναι η μικρότερη θετική ρίζα της $\cos(x)=0$ και π είναι η μικρότερη θετική ρίζα της $\sin(x)=0$.

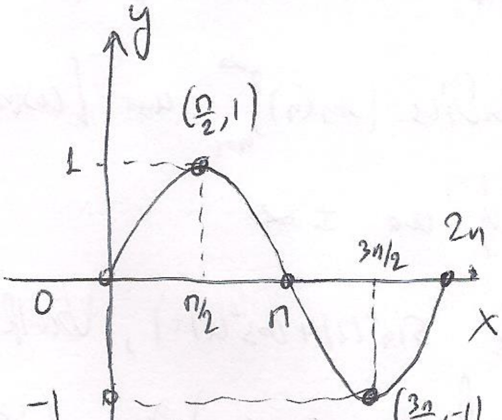
12) Το γράφημα της $y=\cos(x)$, $x\in[\pi,2\pi]$ είναι συμμετρικό με το γράφημα της $y=\cos(x)$, $x\in[0,\pi]$, ως προς την ευθεία $x=\pi$.

Το γράφημα της $y=\sin(x)$, $x\in[\pi,2\pi]$ είναι συμμετρικό με το γράφημα της $y=\sin(x)$, $x\in[0,\pi]$, ως προς το σημείο $(\pi,0)$



$y=\cos(x)$

$0\le x\le 2\pi$



$y=\sin(x)$

$0\le x\le 2\pi$

<u>Λύση</u>: Από την 5) έχουμε $\cos(\pi+x) = \cos(\pi)\cos(x) - \sin(\pi)\sin(x) = -\cos(x)$ και $\cos(\pi-x) = \cos(\pi)\cos(x) - \sin(\pi)\sin(x) = -\cos(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα, $\cos(\pi+x) = \cos(\pi-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Ειδικότερα, $\cos(\pi+x) = \cos(\pi-x)$, $\forall x\in[0,\pi]$ και άρα το γράφημα της $y=\cos(x)$, ($0\leq x\leq 2\pi$) είναι συμμετρικό γύρω από την $x=\pi$.

Πάλι από την 4), $\sin(\pi+x) = \sin(\pi)\cos(x)+\cos(\pi)\sin(x) = -\sin(x)$ ενώ $\sin(\pi-x) = \sin(\pi)\cos(x) - \cos(\pi)\sin(x) = \sin(x)$, άρα $-\sin(\pi+x) = \sin(\pi-x)$, $\forall x\in[0,\pi]$ που σημαίνει ότι το γράφημα της $y=\sin(x)$, $0\leq x\leq 2\pi$, είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $(\pi,0)$

13) Οι συναρτήσεις sin και cos είναι περιοδικές με περίοδο 2π

<u>Λύση</u>: $\sin(x+2\pi) = \sin(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\sin(2\pi) = \sin(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, από 4)
$\cos(x+2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, από 5)

<u>Σημείωση</u>: 1) Λόγω της 12) έχουμε ότι 2π είναι η ελάχιστη περίοδος για τις sin και cos.

2) $\sin(x)=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$
$\cos(x)=0 \Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ με $k\in\mathbb{Z}$.

14) Οι ακολουθίες $(\sin(n))_{n\geq1}^{\infty}$ και $(\cos(n))_{n\geq1}^{\infty}$ δεν συγκλίνουν σε πραγματικό αριθμό ή στο $\pm\infty$.

<u>Λύση</u>: Αφού $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι $|\sin(x)|\leq 1$ και $|\cos(x)|\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα οι ακολουθίες $(\sin(n))_{n\geq1}^{\infty}$ και $(\cos(n))_{n\geq1}^{\infty}$ είναι φραγμένες. Συνεπώς δεν συγκλίνουν στο $\pm\infty$.
Ας υποθέσουμε ότι $\sin(n)\longrightarrow\lambda$, με κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$.

Τότε, έχουμε ότι $\sin(2n) \longrightarrow \lambda$ αφού η $(\sin(2n))_{n\geq 1}$ είναι υπακολουθία της $(\sin(n))_{n\geq 1}$. Άρα, $2\sin(n)\cos(n) \longrightarrow \lambda$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\frac{1}{\sin(n)} \longrightarrow \frac{1}{\lambda}$ και άρα $\cos(n) \longrightarrow 1/2$. Έπεται ότι και η

$\cos(2n) \longrightarrow \frac{1}{2}$. Επιπλέον, $\cos^2(n) - \sin^2(n) \longrightarrow \frac{1}{2}$ και άρα $\frac{1}{4} - \lambda^2 = \frac{1}{2}$. Δηλαδή, $\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$, άτοπο.

Άρα πρέπει $\lambda = 0$, δηλαδή, $\sin(n) \longrightarrow 0$. Έπεται τώρα ότι $\sin(n+1) \longrightarrow 0$, αφού $(\sin(n+1))_{n\geq 1}$ είναι υπακολουθία της $(\sin(n))_{n\geq 1}$. Όμως, $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} \sin(n+1) = \cos(1)\cdot \lim_{n\to\infty} \sin(n) + \lim_{n\to\infty}[\cos(n)\cdot\sin(1)]$

$\Rightarrow 0 = \cos(1)\cdot 0 + \lim_{n\to\infty}[\cos(n)\sin(1)]$. Όμως, $\sin(1) > 0$, από το 8), άρα $\cos(n) \longrightarrow 0$. Αφού $\sin(n) \longrightarrow 0 \Rightarrow$

$1 = \sin^2(n) + \cos^2(n) \longrightarrow 0$, άτοπο. Άρα η $(\sin(n))_{n\geq 1}$ δεν μπορεί να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Ας υποθέσουμε ότι $\cos(n) \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε και $\cos(n+1) \longrightarrow \lambda$. Επίσης, $\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$\sin(n)\sin(1) \longrightarrow \lambda\cdot\cos(1) - \lambda$.

Αφού $\sin(1) > 0$, έπεται ότι $\sin(n) \longrightarrow \frac{\lambda\cos(1) - \lambda}{\sin(1)} \in \mathbb{R}$

άτοπο, όπως δείξαμε προηγουμένως

15) $3 < \pi < 4$

Λύση: Κατ' αρχήν, $\pi > 1$. Διαφορετικά, $0 < \pi \leq 1 < \sqrt{6} \Rightarrow \sin(\pi) > 0$, από 8), άτοπο.
Επίσης, $\pi > 2$. Διαφορετικά, $0 < \frac{\pi}{2} \leq 1$. Αν όμως $0 < x \leq 1$, τότε $\cos(x) > 0$. Πράγματι,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} > 0,$$ αν $0 < x \leq 1$, αφού

$$\frac{x^{4n}}{(4n)!} > \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \Leftrightarrow x^2 < (4n+1)(4n+2), \ \forall n = 0,1,2,\ldots,$$ όταν $0 < x \leq 1$.

Άρα, $0 < \frac{\pi}{2} \leq 1$, τότε $\cos(\frac{\pi}{2}) > 0$, άτοπο. Άρα, $\pi > 2$.

Αν $\pi \leq 3$, τότε, $\pi \leq 3 < 2\pi$ αφού $\pi > 2$. Άρα, $\sin(3) \leq 0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Θα δείξουμε όμως ότι $\sin(3) > 0$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ [αφού $\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) =$
$= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + [\cos^2(x) - \sin^2(x)]\sin(x) = 2\sin(x)[1-\sin^2(x)] + [1-2\sin^2(x)]\sin(x) =$
$= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$], έχουμε ότι $\sin(3) = 3\sin(1) - 4\sin^3(1) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\sin^3(1) < 3\sin(1) \underset{\sin(1)>0}{\Leftrightarrow} \sin^2(1) < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin(1) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Αφού $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $\sin(3) > 0 \Leftrightarrow$

$$\sin(1) < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)!} < \frac{\sqrt{3}}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)!} < \frac{\sqrt{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)!}.$$ Αληθής, αφού

$1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{(4n+1)!} < \frac{1}{(4n-1)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $\sin(3) > 0$ και άρα

$\pi > 3$. Επίσης, $\pi < 4$. Διαφορετικά, $4 \leq \pi \Rightarrow \sin(4) \geq 0$. Όμως,

$\sin(4) = \sin(2 \cdot 2) = 2\sin(2)\cos(2) < 0$ γιατί $0 < 2 < \sqrt{6} \Rightarrow \sin(2) > 0$, άσκηση 8), ενώ $\cos(2) < 0$, άσκηση 9). Άρα, $3 < \pi < 4$.