Άσκηση: Υπολογίστε το $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2+3n+1}$.

Λύση: **Α' Τρόπος**: Αν $a_n = \sqrt[n]{2n^2+3n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε έχουμε τις ανισότητες: $1 \le 2n^2+3n+1 \le 2n^2+3n^2+n^2$, αφού $n\ge 1 \Rightarrow n^2\ge n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Άρα, $\sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{2n^2+3n+1} \le \sqrt[n]{6n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow 1 \le a_n \le \sqrt[n]{6}\,\sqrt[n]{n^2} \Rightarrow 1 \le a_n \le \sqrt[n]{6}\,(\sqrt[n]{n})^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Από βασικά όρια έχουμε ότι $\sqrt[n]{6} \to 1$ και $\sqrt[n]{n} \to 1$. Άρα, $\sqrt[n]{6}\,(\sqrt[n]{n})^2 \to 1$. Από Θ. Sandwich παίρνουμε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Β' Τρόπος: $a_n = \sqrt[n]{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt[n]{n^2}\,\sqrt[n]{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Θέτουμε $b_n = 2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε, $b_n \to 2$. Από βασικά όρια γνωρίζουμε ότι $\sqrt[n]{b_n} \to 1$. Επίσης, $\sqrt[n]{n} \to 1$. Άρα, $a_n \to 1$.

Άσκηση: Υπολογίστε το $\lim\limits_{n\to\infty} n^p\theta^n$, όπου $p>0$ και $\theta\in\mathbb{R}$ με $0<|\theta|<1$.

Λύση: $a_n = n^p\theta^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. ($p>0$ σταθερό και $\theta\in\mathbb{R}$, $|\theta|<1$ σταθερό)

~~Τότε,~~ $\cancel{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \cancel{\frac{n^{p+1}\,|\theta|^{n+1}}{n^p\,|\theta|^n}}$

Τότε, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^p\,|\theta|^{n+1}}{n^p\,|\theta|^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p |\theta| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p |\theta| \to (1+0)^p|\theta| = |\theta|$

Άρα, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |\theta| < 1$. Από βασικά όρια έχουμε ότι $a_n \to 0$.

Άσκηση: Αν $a_n = \dfrac{7\cdot 2^n + n^2 + 3}{2^{n+1} + n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Λύση: $a_n = \dfrac{2^n\left[7 + \frac{n^2}{2^n} + \frac{3}{2^n}\right]}{2^{n+1}\left[1 + \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right]}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$a_n = \dfrac{1}{2} \dfrac{7 + \frac{n^2}{2^n} + \frac{3}{2^n}}{1 + \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $\dfrac{1}{2^n} \to 0$, αφού

$\vartheta^n \to 0$ όταν $|\vartheta| < 1$. (Βασικό όριο). Εδώ, $\vartheta = \frac{1}{2}$. Επίσης,

$\dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^n} \to 0$. Ακόμη, από την προηγούμενη άσκηση, έχουμε

ότι $\dfrac{n^2}{2^n} \to 0$ και $\dfrac{n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{n}{2^n} \to 0$. Άρα, $a_n \to \dfrac{7}{2}$.

Άσκηση Η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $x_1 = 1$ και

$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνει

και υπολογίστε το $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Λύση: $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 3 = \frac{1}{2} + 3 > x_1 = 1$. Υποψιαζόμαστε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι αύξουσα.

Το δείχνουμε επαγωγικά: $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (Δηλαδή, $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ γν. αύξ.)

Για $n=1$, $x_1 < x_2$ είναι αληθής αφού $1 < 7/2$.

Υποθέτουμε ότι $x_n < x_{n+1}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι

$x_{n+1} < x_{n+2}$. Ισοδύναμα, λόγω της αναδρομικής σχέσης, αρκεί να

δείξουμε ότι $\frac{1}{2}x_n + 3 < \frac{1}{2}x_{n+1} + 3$. Δηλαδή, $x_n < x_{n+1}$, το οποίο

ισχύει από την επαγωγική υπόθεση. Άρα, $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Για να δείξουμε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει σε πραγμ. αριθμό αρκεί να δείξουμε ακόμα ότι η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένη.

(Αξίωμα Πληρότητας) Αφού $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ αύξουσα έχουμε ότι $1 = x_1 \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αρκεί λοιπόν να βρούμε ένα άνω φράγμα για την $(x_n)_{n\geq 1}$.

Δηλαδή $M>0$ ώστε $x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Για να βρούμε το $M>0$ εργαζόμαστε ως εξής: Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι δείξαμε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι άνω φραγμένη. Τότε $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda \in \mathbb{R}$.

Αφού η $(x_{n+1})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $(x_n)_{n\geq 1}$, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lambda$. Επειδή ισχύει η αναδρομική σχέση $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$, παίρνοντας $n \to \infty$ και στα δύο μέλη, λαμβάνουμε:

$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} x_n + 3$. Άρα, $\lambda = \frac{\lambda}{2} + 3 \Rightarrow \lambda = 6$.

Με άλλα λόγια, αν η $(x_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει σε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε πρέπει $\lambda = 6$. Επειδή $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty} \nearrow$, θα πρέπει $x_n < 6$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε επαγωγικά, ότι $x_n < 6$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, για $n=1$, έχουμε $x_1 = 1 < 6$. Υποθέτουμε ότι $x_n < 6$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ δείχνουμε ότι $x_{n+1} < 6$. Ισοδύναμα, αρκεί να έχουμε,

$\frac{1}{2}x_n + 3 < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_n < 3 \Leftrightarrow x_n < 6$, αληθές λόγω υπόθεσης.

Άρα, $x_n < 6$, $\forall n \in \mathbb{N}$ από την αρχή της επαγωγής.

Συμπερασματικά, δείξαμε: (i) $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ γν. αύξουσα. (ii) $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ φραγμένη. ($1 \leq x_n < 6$, $\forall n \in \mathbb{N}$) Από το αξίωμα πληρότητας

Έχουμε ότι $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Το επιχείρημα της ενδιάμεσης περίπτωσης μας λέει ότι αναγκαία $\ell = 6$. Άρα, $x_n \to 6$

<u>Άσκηση</u>: Η $(x_n)_{n\geq 1}$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = -\sqrt{2-x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τον οποίο να υπολογίσετε.

<u>Λύση</u>: Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $x_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, $x_1 = 0$. Αν $x_n \leq 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε $2 - x_n > 0 \Rightarrow \sqrt{2-x_n} > 0$ $\Rightarrow x_{n+1} = -\sqrt{2-x_n} < 0$. Άρα επαγωγικά έχουμε $x_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Ειδικότερα, η έκφραση $2 - x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα η ρίζα $\sqrt{2-x_n}$ είναι καλά ορισμένη. Με άλλα λόγια, η αναδρομική σχέση $x_{n+1} = -\sqrt{2-x_n}$ έχει νόημα $\forall n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι μονότονη και φραγμένη.

Για τη μονοτονία έχουμε: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2} < 0 = x_1$. Υποψιαζόμαστε ότι $(x_n)_{n\geq 1} \downarrow$. Το ελέγχουμε επαγωγικά. Αν $x_{n+1} < x_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε δείχνουμε ότι $x_{n+2} < x_{n+1}$. Ισοδύναμα, έχουμε

$$-\sqrt{2-x_{n+1}} < -\sqrt{2-x_n} \iff \sqrt{2-x_{n+1}} > \sqrt{2-x_n} \iff 2 - x_{n+1} > 2 - x_n \iff x_{n+1} < x_n$$

Αληθής λόγω επαγ. υπόθεσης. Άρα $(x_n)_{n\geq 1} \downarrow$.

Τώρα πρέπει να επαληθεύσουμε ένα κάτω φράγμα για την $(x_n)_{n\geq 1}$. (Το $0 = x_1$ είναι ένα άνω φράγμα). Το <u>μεγαλύτερο</u> από τα κάτω φράγματα της $(x_n)_{n\geq 1}$ θα είναι το όριο της $(x_n)_{n\geq 1}$

Όπως στην προηγούμενη άσκηση, πρώτα βρίσκουμε το όριο της $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ (με την υπόθεση ότι αυτή συγκλίνει). Μετά δείχνουμε ότι το όριο που βρήκαμε είναι ένα κάτω φράγμα (με επαγωγή)

Πράγματι, αν $x_n \to \lambda$, τότε και $x_{n+1} \to \lambda$. Αφού $x_{n+1} = -\sqrt{2-x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = -\sqrt{2-\lim_{n\to\infty} x_n} \Rightarrow$

$$\lambda = -\sqrt{2-\lambda} \Rightarrow \lambda^2 = 2-\lambda \Rightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = 1$, ή, $\lambda = -2$. Όμως, $\lambda < 0$ (αφού $\lambda = -\sqrt{2-\lambda} \leq 0$)

Άρα, $\lambda = -2$. Δηλαδή, αν η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνει, τότε το όριό της είναι ο -2. Για να δείξουμε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνει, αρκεί να δείξουμε επαγωγικά ότι $x_n > -2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (Αυτό μαζί η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα)

Για $n=1 \Rightarrow x_1 = 0 > -2$. Έστω ότι $x_n > -2$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε ότι $x_{n+1} > -2 \Leftrightarrow -\sqrt{2-x_n} > -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x_n} < 2 \Leftrightarrow 2-x_n < 4 \Leftrightarrow x_n > -2$ Αληθής από την επαγωγική υπόθεση. Άρα, $x_n > -2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Συμπερασματικά έχουμε: (i) $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty} \downarrow$. (ii) $-2 < x_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Δηλαδή, $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ γν. φθίνουσα και φραγμένη. Άρα $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda \in \mathbb{R}$.

Με την προηγούμενη εργασία μας έχουμε ότι αναγκαία $\lambda = -2$. Άρα, $x_n \longrightarrow -2$.

Θεώρημα (Μέθοδος Newton για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας)

Έστω $0<\lambda<1$. Ορίζουμε αναδρομικά την ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ως εξής: $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\lambda}{x_n}\right), \forall n\in\mathbb{N}$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $x_n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(ii) $x_n^2 > \lambda$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(iii) $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα

(iv) $0 < x_n \leq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\lambda}$.

<u>Απόδ</u>: (i) Επαγωγικά: $x_1 = 1 > 0$. Έστω ότι $x_n > 0$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$. Τότε $x_n + \frac{\lambda}{x_n} > 0$, αφού $\lambda>0$. Άρα και

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\lambda}{x_n}\right) > 0$. Συνεπώς, $x_n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(ii) Επαγωγικά: $x_1 = 1 \Rightarrow x_1^2 = 1^2 = 1 > \lambda$. Έστω ότι $x_n^2 > \lambda$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$. Τότε $x_{n+1}^2 > \lambda \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{\lambda}{x_n}\right)^2 > \lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_n^2 + \frac{\lambda^2}{x_n^2} + 2x_n\cdot\frac{\lambda}{x_n} > 4\lambda \Leftrightarrow x_n^2 + \frac{\lambda^2}{x_n^2} - 2\lambda > 0 \Leftrightarrow$

$\left(x_n - \frac{\lambda}{x_n}\right)^2 > 0$ Αληθές αφού $\left(x_n - \frac{\lambda}{x_n}\right)^2 \geq 0$ και

$\left(x_n - \frac{\lambda}{x_n}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_n^2 = \lambda$. Όμως, $x_n^2 > \lambda$ από την επαγωγική υπόθεση.

(iii) $x_{n+1} < x_n \iff \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\lambda}{x_n}\right) < x_n \iff \frac{x_n^2+\lambda}{2x_n} < x_n$

$\overset{x_n>0}{\iff} x_n^2 + \lambda < 2x_n^2 \iff x_n^2 > \lambda, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Αληθές από (ii).

(iv) Από (i) $\Rightarrow x_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Από (iii) έχουμε $x_n \leq x_1 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $0 < x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(v) Από (iii) και (iv) έχουμε ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη. Από το Αξίωμα Πληρότητας έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ και $x \in [0,1]$ αφού $0 < x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Από το (ii), αφού $x_n^2 > \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n^2 \geq \lambda$. Άρα $x^2 \geq \lambda > 0$. Δηλαδή, $x > 0$. Αφού $x_n \to x \Rightarrow x_{n+1} \to x$. Συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{\lambda}{\lim_{n\to\infty} x_n}\right]$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) \Rightarrow 2x = \frac{x^2+\lambda}{x} \Rightarrow 2x^2 = x^2 + \lambda$

$\Rightarrow x^2 = \lambda$. Άρα, $x = \sqrt{\lambda}$.

Παρατήρηση: Το θεώρημα του Newton μας δείχνει ότι υπάρχει η τετραγωνική ρίζα κάθε αριθμού $\lambda \in (0,1)$. Αν $\lambda > 1$, τότε βέβαια βλέπουμε εύκολα ότι

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1/\lambda}}$$

Συνέπειες του Αξιώματος Πληρότητας

__Πρόταση__: Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n > x$.
(Με άλλα λόγια, το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$)

__Απόδ__: Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα της πρότασης είναι εσφαλμένο. Τότε υπάρχει $x > 0$ με $n \leq x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{x} > 0$, Άτοπο.

__Πρόταση__ (Ύπαρξη ακεραίου μέρους πραγματικού) Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq x < m+1$. Ο m καλείται ακέραιο μέρος του x και συμβολίζεται με $[x]$. Άρα, $[x] \leq x < [x]+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

__Απόδ__: Η μοναδικότητα του ακεραίου μέρους είναι συνέπεια του γεγονότος ότι $[m, m+1) \cap [m', m'+1) = \emptyset$, όταν $m \neq m'$ είναι ακέραιοι. Για την ύπαρξη του $[x]$ για $x \in \mathbb{R}$, αρκεί να αποδειχθεί για $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (Αν $x \in \mathbb{Z}$, τότε $x = [x]$)

__Περ.1__: $x > 0$. Αν $0 < x < 1$, τότε βλέπουμε εύκολα ότι $[x] = 0$. Υποθέτουμε ότι $x > 1$. Ορίζουμε $M = \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$. Από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι $M \neq \emptyset$. Άρα υπάρχει $n_0 = \min M \in M$, το ελάχιστο στοιχείο του M. Αφού $x > 1$, έχουμε ότι $n_0 > x > 1$. Θέτουμε $m = n_0 - 1$. Τότε $m \in \mathbb{N}$ και $m < n_0 = \min M$. Άρα, $m \notin M$. Συνεπώς, $m \leq x$. Επίσης, $m+1 = n_0 > x$. Άρα, $m \leq x < m+1$ με $m \in \mathbb{N}$, όταν $x > 1$.

Περ. 2: $x<0$. Τότε $-x>0$. Αν $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $m=[-x]$, τότε $m < -x < m+1$ γιατί $x\notin\mathbb{Z}$. Άρα, $-m-1<x<-m$

Δηλαδή, $[x]=-m-1=-[x]-1$.

Πρόταση: Έστω $k_1<k_2<k_3<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Έστω $a<b$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε υπάρχουν $m\in\mathbb{Z}$ και $n\in\mathbb{N}$ ώστε $a<\frac{m}{k_n}<b$.

Απόδ: Μπορούμε κατ' αρχήν να βρούμε $n\in\mathbb{N}$ με $k_n(b-a)>1$.
Αν δεν υπήρχε τέτοιο $n\in\mathbb{N}$, τότε $k_n\leq\frac{1}{b-a}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα $\frac{1}{k_n}\geq b-a$, $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow 0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\geq b-a>0$, άτοπο.
$\left(\frac{1}{k_n}\to 0\right.$ ως υπακολουθία της $\left.(k_n)_{n\geq1}\right)$.

Θέτουμε $m=[k_n a]+1\in\mathbb{Z}$. Τότε, από ιδιότητα του ακέραιου μέρους, $m=[k_n a]+1>k_n a\Rightarrow a<\frac{m}{k_n}$

Επίσης, $m=[k_n a]+1\leq k_n a+1<k_n b$, αφού $k_n(b-a)>1$ από την επιλογή του $n\in\mathbb{N}$. Άρα, $m<k_n b\Rightarrow\frac{m}{k_n}<b$.

Δηλαδή, $a<\frac{m}{k_n}<b$.

Πόρισμα: Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$, είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.
Δηλαδή σε κάθε ανοιχτό διάστημα (a,b) του $\mathbb{R}$, υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός αριθμός

Πόρισμα: Αν $\mathcal{D}=\left\{\frac{m}{2^n} : m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$ είναι το σύνολο των δυαδικών αριθμών, τότε το $\mathcal{D}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή $\mathcal{D}\cap(a,b)\neq\emptyset$, $\forall\, a<b$ στο $\mathbb{R}$.

Απόδ: (Εφαρμόζουμε την Πρόταση με $k_n=2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$)

Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass

Το Θεώρημα B-W μας βοηθά να κατανοήσουμε τις ακολουθίες που δεν συγκλίνουν.

Θεώρημα (Bolzano-Weierstrass) Έστω $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}$ μία φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}$.

Απόδ: Από προηγούμενη πρόταση, η $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}$ έχει μία μονότονη υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$. Αφού $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}$ φραγμένη, και η $(x_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Δηλαδή η $(x_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$ είναι μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών. Άρα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός: Η πραγματική ακολουθία $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ λέγεται ακολουθία Cauchy όταν <u>για κάθε</u> δύο υπακολουθίες της $(a_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$ και $(a_{\ell_n})_{n\geq1}^{\infty}$ έχουμε ότι $a_{k_n}-a_{\ell_n}\longrightarrow 0$.

Παρατήρηση: 1) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι, αν $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ τότε $a_{k_n} \to \ell$ και $a_{\ell_n} \to \ell$ για κάθε 2 υπακολουθίες $(a_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(a_{\ell_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Άρα, $a_{k_n} - a_{\ell_n} \to \ell - \ell = 0$

2) Η $((-1)^n)_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν είναι Cauchy αφού $(-1)^{2n} = 1 \to 1$ και $(-1)^{2n-1} = -1 \to -1$
Άρα, $(-1)^{2n} - (-1)^{2n-1} \to 2 \neq 0$.

Θεώρημα: Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Απόδειξη: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολ. Cauchy. Θα δείξουμε κατ' αρχήν ότι η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Ας υποθέσουμε ότι η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη. Τότε παρατηρούμε ότι και κάθε υπακολουθία ουρά $(a_{n+k})_{n\geq 1}^{\infty}$, $k\in\mathbb{N}$, δεν είναι φραγμένη. Πράγματι αν υπήρχαν $k\in\mathbb{N}$ και $C>0$ με $|a_{n+k}| \leq C$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $|a_n| \leq \max\{C, |a_1|, \dots, |a_k|\}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή, η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ θα ήταν φραγμένη. Αφού λοιπόν η $(a_{n+1})_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη, θα βρούμε $k_2 > k_1 = 1$, ώστε $|a_{k_2}| > 1 + |a_{k_1}|$.
Αφού η $(a_{n+k_2})_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη, θα βρούμε $k_3 > k_2$ με $|a_{k_3}| > 1 + |a_{k_2}|$. Συνεχίζοντας επαγωγικά βρίσκουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < \dots$ φυσικών αριθμών με $|a_{k_{n+1}}| > 1 + |a_{k_n}|$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Τότε, $|a_{k_{n+1}} - a_{k_n}| \geq |a_{k_{n+1}}| - |a_{k_n}| > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Καταλήγουμε σε άτοπο γιατί $a_{k_{n+1}} - a_{k_n} \longrightarrow 0$ αφού $(a_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(a_{k_{n+1}})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υποακολουθίες της Cauchy ακολουθίας $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$.

Συμπεραίνουμε ότι η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Το Θεώρ. B-W μας λέει ότι υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(a_{m_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Άρα $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ με $a_{m_n} \longrightarrow \lambda$. Αφού η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι Cauchy, έχουμε ότι $a_n - a_{m_n} \longrightarrow 0$. Άρα, $a_n \longrightarrow \lambda$.

<u>Σημείωση</u>: Η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι Cauchy (και άρα συγκλίνουσα) όταν $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $|a_n - a_m| < \epsilon$, $\forall n, m \geq n_0$.

Αν εξασφαλίσουμε ότι μία ακολουθία είναι Cauchy, τότε γνωρίζουμε ότι συγκλίνει σε πραγμ. αριθμό τον οποίο δεν είναι αναγκαίο να ξέρουμε εκ των προτέρων.

<u>Παράδειγμα</u>: Η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \theta^n, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ όπου } 0 < \theta < 1 \text{ είναι σταθερό.}$$

Τότε η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνουσα.

Πράγματι, εφαρμόζοντας την ανισότητα διαδοχικά, για $n, n+1, n+2, \dots$

έχουμε: $\left.\begin{aligned} |a_{n+1}-a_n| &\le \theta^n \\ |a_{n+2}-a_{n+1}| &\le \theta^{n+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |a_{n+1}-a_n| + |a_{n+2}-a_{n+1}| \le \theta^n + \theta^{n+1}$

Από τριγ. ανισ. έχουμε: $|a_{n+2}-a_n| \le |a_{n+2}-a_{n+1}| + |a_{n+1}-a_n| \le \theta^n + \theta^{n+1}$

Περαιτέρω, έχουμε ότι $|a_{n+3}-a_n| \le |a_{n+3}-a_{n+2}| + |a_{n+2}-a_n| \le \theta^n + \theta^{n+1} + \theta^{n+2}$

και γενικότερα, $\forall k \in \mathbb{N}$, έχουμε: $|a_{n+k}-a_n| \le \theta^n + \theta^{n+1} + \dots + \theta^{n+k-1}$

$$\Rightarrow |a_{n+k}-a_n| \le \theta^n(1+\theta+\dots+\theta^{k-1}) = \theta^n \cdot \frac{\theta^k-1}{\theta-1} = \theta^n \cdot \frac{1-\theta^k}{1-\theta}, \ \forall n,k \in \mathbb{N}$$

Άρα, αφού $0<\theta<1$, έχουμε ότι $|a_{n+k}-a_n| \le \frac{1}{1-\theta}\theta^n$, $\forall n,k \in \mathbb{N}$

Αν $m \in \mathbb{N}$ και $m>n$, έχουμε ότι $|a_m-a_n| \le \frac{1}{1-\theta}\theta^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (αφού $m>n \Rightarrow m=n+k$ με $k \in \mathbb{N}$). Αφού $0<\theta<1$, έχουμε ότι $\theta^n \to 0$. Άρα, αν $\epsilon>0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{\theta^n}{1-\theta} < \epsilon$, $\forall n \ge n_0$. Έπεται τώρα ότι $|a_m-a_n| < \epsilon$, $\forall m>n\ge n_0$. Δηλαδή η $(a_n)_{n\ge1}^{\infty}$ είναι Cauchy και συνεπώς το $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς το $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Σύγκλιση ακολουθιών στο $\pm\infty$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(a_n)_{n\ge1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών ώστε $a_n>0$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ όταν $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Ορισμός: Αν $a_n < 0$, σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, και $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Παραδείγματα: 1) $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty$, $\forall p > 0$.

2) Έστω $P(n)$ και $Q(n)$ δύο μη σταθερά πολυώνυμα του $n \in \mathbb{N}$. Αν a είναι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $P(n)$ και b ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $Q(n)$, τότε έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{αν } deg(P) < deg(Q) \\ \frac{a}{b}, & \text{αν } deg(P) = deg(Q) \\ +\infty, & \text{αν } deg(P) > deg(Q) \text{ και } ab > 0 \\ -\infty, & \text{αν } deg(P) > deg(Q) \text{ και } ab < 0 \end{cases}$$

Σημείωση: $deg(P)$ = βαθμός του πολυωνύμου $P(n)$.

Πράξεις με $\pm\infty$: 1) Αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda(+\infty) = +\infty$ και $\lambda(-\infty) = -\infty$.

2) Αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda(+\infty) = -\infty$ και $\lambda(-\infty) = +\infty$.

3) $0 \cdot (\pm\infty)$ δεν ορίζεται λόγω απροσδιοριστίας. Π.χ., $\frac{1}{n} \to 0$ και $n \to +\infty$, αλλά $\frac{1}{n} \cdot n = 1 \to 1$. Ενώ, $\frac{2}{n} \to 0$ και $n \to +\infty$, αλλά $\frac{2}{n} \cdot n = 2 \to 2$. Ακόμα, $\frac{\sin(n)}{n} \to 0$ και $n \to +\infty$, αλλά $\frac{\sin(n)}{n} \cdot n = \sin(n)$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, ή, $\pm\infty$. Τέλος, $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ και $(-n) \to -\infty$ ενώ $\frac{1}{\sqrt{n}}(-n) = -\sqrt{n} \to -\infty$.

Πρόταση: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ μονότονη ακολουθία πραγματικών. Τότε

(i) Αν η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη άνω, έχουμε ότι $a_n \to +\infty$.

(ii) Αν η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη κάτω, έχουμε ότι $a_n \to -\infty$.

Απόδ: (i) Η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν είναι φθίνουσα αφού δεν είναι άνω φραγμένη. Επειδή η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι μονότονη, αναγκαστικά, η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Έπεται ότι $a_n \leq 0$ μόνο για ένα πεπερασμένο πλήθος $n\in\mathbb{N}$. Σε αντίθετη περίπτωση, αφού $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ αύξουσα, θα είχαμε ότι $a_n \leq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άτοπο, αφού $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ όχι άνω φραγμένη. Άρα, $a_n > 0$ για σχεδόν όλα τα $n\in\mathbb{N}$. Επίσης η $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq k}^{\infty}$ είναι φθίνουσα (για $k\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο) ακολουθία θετικών αριθμών. Συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lambda \geq 0$. Αν $\lambda > 0$, τότε η $\frac{1}{a_n} \geq \lambda$, $\forall n\geq k$.

$\Rightarrow a_n \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall n \geq k$. $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ άνω φραγμένη. Άτοπο.

Άρα $\frac{1}{a_n} \to 0$. $\Rightarrow a_n \to +\infty$.

(ii) Προκύπτει από το (i) εφαρμόζοντας στην $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $b_n = -a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Το θεώρημα Newton μας εξασφαλίζει την ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας $x^{1/2}$, για κάθε $x>0$. Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε την ύπαρξη των ριζών κ-τάξης $\sqrt[\kappa]{x} = x^{1/\kappa}$, για κάθε $x>0$ και κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αν $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa \geq 2$, και $1 > x > 0$, ορίζουμε αναδρομικά την ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \left(1-\frac{1}{\kappa}\right)x_n + \frac{x}{\kappa x_n^{\kappa-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Όπως στην περίπτωση $\kappa=2$ (Newton) μπορούμε να δείξουμε ότι $0 < x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n^{\kappa} > x$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γνήσια φθίνουσα. Άρα υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n = b > 0$ και $b^{\kappa} = x$. Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικό $b>0$ με $b^{\kappa} = x$.

Συνεπώς ορίζονται οι δυνάμεις $x^{1/n}$, $\forall x>0$ και $n \in \mathbb{N}$.

Εύκολα επαληθεύονται οι ιδιότητες: $\left(x^{1/n_1}\right)^{1/n_2} = x^{\frac{1}{n_1 n_2}}$, $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ και $(xy)^{1/n} = x^{1/n} y^{1/n}$, $\forall x>0, \forall y>0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε δυνάμεις x^{λ}, $\forall x>0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Επεκτείνοντας τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη: $x^{\kappa+\ell} = x^{\kappa} x^{\ell}$, $(x^{\kappa})^{\ell} = x^{\kappa\ell}$ $\forall x>0, \forall \kappa, \ell \in \mathbb{Z}$.

Πρώτα ορίζουμε τις δυνάμεις x^{ρ} με εκθέτη $\rho \in \mathbb{Q}$ (ρητό).

Αν $\rho \in \mathbb{Q}$, τότε $\rho = \frac{m}{n}$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$x^{\rho} = \left(x^{m}\right)^{1/n}, \quad \forall x>0.$$

Παρατηρούμε ότι $(x^{\frac{1}{n}})^m = (x^m)^{1/n}$, $\forall x>0$, $\forall m\in\mathbb{Z}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε τις παρακάτω ιδιότητες

$$x^{p_1+p_2}=x^{p_1}\cdot x^{p_2}, \quad (x^{p_1})^{p_2}=x^{p_1 p_2}, \quad \forall x>0, \forall p_1,p_2\in\mathbb{Q}$$

$(xy)^p = x^p y^p$, $\forall p\in\mathbb{Q}$, $\forall x>0, y>0$.

Επίσης, αν $x>1$ και $p\in\mathbb{Q}$ με $p>0$, τότε $x^p>1$. Έπεται από αυτό ότι αν $x>1$, τότε $p_1<p_2$ στο $\mathbb{Q} \Rightarrow x^{p_1}<x^{p_2}$

Ενώ αν $0<x<1$ και $p_1<p_2$ στο $\mathbb{Q} \Rightarrow x^{p_1}>x^{p_2}$.

Για να ορίσουμε δυνάμεις x^λ με $x>0$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, θα προσεγγίσουμε το λ ως όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών $(p_n)_{n\geq 1}$ $(p_n\to\lambda)$. Θα ορίσουμε $x^\lambda=\lim\limits_{n\to\infty} x^{p_n}$. Πρέπει όμως να εξασφαλίσουμε δύο πράγματα: Πρώτα την ύπαρξη του ορίου $\lim\limits_{n\to\infty} x^{p_n}$ όταν $p_n\to\lambda$. Δεύτερον, την ανεξαρτησία του ορίου $\lim\limits_{n\to\infty} x^{p_n}$ από την ακολουθία των ρητών $(p_n)_{n\geq 1}$ που συγκλίνει στο λ. Αν δηλαδή $(p_n')_{n\geq 1}$ είναι μια δεύτερη ακολουθία ρητών με $p_n'\to\lambda$, πρέπει να δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x^{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{p_n'}$. Για να τα πετύχουμε αυτά

χρειαζόμαστε τα παρακάτω.

Πρόταση 1: Αν $x>0$ και $(\rho_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ρητών με $\rho_n \to 0$, τότε $x^{\rho_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Απόδ: Έστω $\epsilon>0$. Αφού $x^{1/k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ και $x^{-1/k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

μπορούμε να βρούμε $k\in\mathbb{N}$ ώστε $|x^{1/k}-1|<\epsilon$ και $|x^{-1/k}-1|<\epsilon$

Επίσης, $\rho_n \to 0$. Ο ορισμός με "ϵ" $=\frac{1}{k}$ μας δίνει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|\rho_n|<\frac{1}{k}$, $\forall n\geq n_0$. Άρα, $-\frac{1}{k}<\rho_n<\frac{1}{k}$, $\forall n\geq n_0$

Ας υποθέσουμε ότι $x>1$. Τότε $x^{-1/k}<x^{\rho_n}<x^{1/k}$, $\forall n\geq n_0$

Από την επιλογή του $k\in\mathbb{N}$ έχουμε $|x^{-1/k}-1|<\epsilon \Rightarrow x^{-1/k}>1-\epsilon$ και $|x^{1/k}-1|<\epsilon \Rightarrow x^{1/k}<1+\epsilon$. Συνεπώς έχουμε ότι

$$1-\epsilon<x^{-1/k}<x^{\rho_n}<x^{1/k}<1+\epsilon, \quad \forall n\geq n_0 \Rightarrow$$

$|x^{\rho_n}-1|<\epsilon$, $\forall n\geq n_0$. Άρα, $x^{\rho_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, αν $x>1$

Όταν $0<x<1$, έχουμε $\frac{1}{x}>1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow \frac{1}{x^{\rho_n}}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\Rightarrow x^{\rho_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Πρόταση 2: Αν $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ακολουθία ρητών $(\rho_n)_{n\geq 1}$ με $\rho_n\to\lambda$.

Απόδ: Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, μπορούμε να επιλέξουμε $\rho_n\in\mathbb{Q}\cap(\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n})$. Τότε, $|\lambda-\rho_n|<\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Από Sandwich, $\rho_n\to\lambda$.

<u>Πρόταση 3</u>: Έστω $(\rho_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνουσα ακολουθία ρητών αριθμών και $x>0$. Τότε η ακολουθία $(x^{\rho_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα.

<u>Απόδ</u>: Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $x>1$. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $(x^{\rho_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι Cauchy.

Αφού η $(\rho_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα, γνωρίζουμε ότι είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει $M\in\mathbb{N}$ με $\rho_n\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Έστω $(\rho_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(\rho_{\ell_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ δύο τυχαίες υπακολουθίες της $(\rho_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Τότε, $\rho_{k_n}-\rho_{\ell_n}\longrightarrow 0$ αφού $(\rho_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνουσα.

Θα δείξουμε ότι $x^{\rho_{k_n}}-x^{\rho_{\ell_n}}\to 0$. Άρα η $(x^{\rho_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ θα είναι Cauchy. Πράγματι, $x^{\rho_{k_n}}-x^{\rho_{\ell_n}}=x^{\rho_{\ell_n}}\left(x^{\rho_{k_n}-\rho_{\ell_n}}-1\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Άρα, $\left|x^{\rho_{k_n}}-x^{\rho_{\ell_n}}\right|=x^{\rho_{\ell_n}}\left|x^{\rho_{k_n}-\rho_{\ell_n}}-1\right|\leq x^{M}\left|x^{\rho_{k_n}-\rho_{\ell_n}}-1\right|$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Όμως, από Πρόταση 1, έχουμε $\rho_{k_n}-\rho_{\ell_n}\to 0 \Rightarrow x^{\rho_{k_n}-\rho_{\ell_n}}\longrightarrow 1$

Από Θ. Sandwich έχουμε ότι $x^{\rho_{k_n}}-x^{\rho_{\ell_n}}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow (x^{\rho_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ ακ. Cauchy $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x^{\rho_n}\in\mathbb{R}^{+}$.

Αν $0<x<1$ τότε $\frac{1}{x}>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_n}>0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^{\rho_n}>0$

αφού η $\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\rho_n}\right)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένη.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $x>0$ και $\lambda\in\mathbb{R}$. Επιλέγουμε, από την Πρόταση 2, ακολουθία ρητών $(\rho_n)_{n\geq1}^{\infty}$ με $\rho_n\to\lambda$. Ορίζουμε $x^{\lambda}=\lim\limits_{n\to\infty}x^{\rho_n}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα λόγω της Πρότασης 3. Αφού $\rho_n\to\lambda$, η ακολουθία $(x^{\rho_n})_{n\geq1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα σε κάποιο θετικό πραγματικό που συμβολίζουμε x^{λ}. Επίσης, ο x^{λ} είναι ανεξάρτητος της ακολουθίας των ρητών $(\rho_n)_{n\geq1}^{\infty}$ που συγκλίνει στο λ. Πράγματι, αν $(\rho_n')_{n\geq1}^{\infty}$ είναι μια άλλη ακολουθία ρητών με $\rho_n'\to\lambda$, τότε $\rho_n-\rho_n'\to0$. Η Πρόταση 1 μας δίνει ότι $x^{\rho_n-\rho_n'}\to1$.

Άρα, $\dfrac{x^{\rho_n}}{x^{\rho_n'}}\to1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x^{\rho_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x^{\rho_n'}$.

<u>Πρόταση</u>: Αν $x>0$ και $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ τότε
$$x^{\lambda_1+\lambda_2}=x^{\lambda_1}x^{\lambda_2} \quad \text{και} \quad (x^{\lambda_1})^{\lambda_2}=x^{\lambda_1\lambda_2}.$$
Επίσης, αν $y>0$, τότε $(xy)^{\lambda}=x^{\lambda}y^{\lambda}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.
Αν $x>1$ και $\lambda_1<\lambda_2$, τότε $x^{\lambda_1}<x^{\lambda_2}$.
Αν $0<x<1$ και $\lambda_1<\lambda_2$, τότε $x^{\lambda_1}>x^{\lambda_2}$.

<u>Απόδ</u>: Π.χ., αν $\rho_n\to\lambda_1$ και $\rho_n'\to\lambda_2$ με $\rho_n\in\mathbb{Q}$, $\rho_n'\in\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε
$$x^{\lambda_1+\lambda_2}=\lim_{n\to\infty}x^{\rho_n+\rho_n'}=\lim_{n\to\infty}x^{\rho_n}x^{\rho_n'}=\Big(\lim_{n\to\infty}x^{\rho_n}\Big)\Big(\lim_{n\to\infty}x^{\rho_n'}\Big)=x^{\lambda_1}x^{\lambda_2}$$
Αν $\lambda>0$ και $x>1$, τότε $x^{\lambda}>1$. Γιατί αν $(\rho_n)_{n\geq1}^{\infty}$ με $\rho_n\in\mathbb{Q}$, $\rho_n\to\lambda$,

Επιλέγουμε $\rho \in \mathbb{Q}$ με $0<\rho<\lambda$. Αφού $\rho_n \to \lambda$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\rho_n > \rho$, $\forall n \geq n_0$. Άρα, $x^{\rho_n} > x^{\rho} > 1$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$$x^{\lambda} = \lim_{n\to\infty} x^{\rho_n} \geq x^{\rho} > 1.$$

Έπεται τώρα ότι αν $x>1$ και $\lambda_1 < \lambda_2$, τότε $x^{\lambda_2-\lambda_1} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{\lambda_2} > x^{\lambda_1}$! Οι υπόλοιπες ιδιότητες προκύπτουν με παρόμοια επιχειρήματα.

<u>Πόρισμα</u>: Αν $x>0$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda_n \to \lambda$, τότε
$$x^{\lambda_n} \to x^{\lambda}.$$

<u>Απόδ</u>: Αν $\lambda=0$, επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα στην απόδειξη της Πρότασης 1. Γενικά, αν $\lambda_n \to \lambda$, τότε $\lambda_n - \lambda \to 0$

Άρα, $x^{\lambda_n-\lambda} \to 1 \Rightarrow \dfrac{x^{\lambda_n}}{x^{\lambda}} \to 1 \Rightarrow x^{\lambda_n} \to x^{\lambda}$.