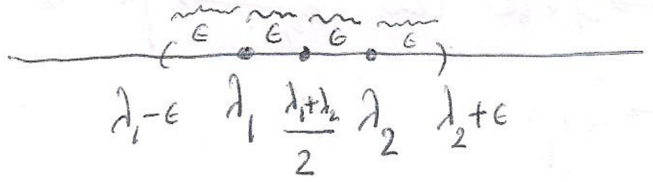
Ιδιότητες Συγκλινουσών Ακολουθιών

1) Το όριο μίας συγκλίνουσας ακολουθίας πραγματικών αριθμών είναι μοναδικό.

Αποδ: Έστω ότι $a_n \to \lambda_1 \in \mathbb{R}$ και $a_n \to \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2$. Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ας υποθέσουμε ότι $\lambda_1 < \lambda_2$.



Θέτουμε $\epsilon = \dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2} > 0$

Θεωρούμε τα διαστήματα $I_1 = (\lambda_1-\epsilon, \lambda_1+\epsilon)$ και $I_2 = (\lambda_2-\epsilon, \lambda_2+\epsilon)$. Παρατηρούμε ότι $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Έχουμε, αφού $a_n \to \lambda_1$, ότι σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ανήκουν στο I_1. Για τον ίδιο λόγο, αφού $a_n \to \lambda_2$, σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ανήκουν στο I_2. Βλέπουμε τώρα εύκολα ότι σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ πρέπει να ανήκουν στην τομή $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. ΑΤΟΠΟ. Άρα, $\lambda_1 = \lambda_2$.

2) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Αποδ: Έστω $a_n \to \lambda \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε $\epsilon = 1$. Με βάση τον ορισμό του ορίου έχουμε ότι σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ανήκουν στο διάστημα $(\lambda-1, \lambda+1)$. Αυτό σημαίνει ότι μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος όρων της ακολουθίας είναι εκτός του $(\lambda-1, \lambda+1)$. Έστω $a_{k_1}, \dots, a_{k_p}$ οι όροι της ακολουθίας εκτός του $(\lambda-1, \lambda+1)$. Υποθέτουμε ότι a_{k_1} είναι ο μικρότερος και a_{k_p} είναι ο μεγαλύτερος από τους $a_{k_1}, \dots, a_{k_p}$. Επιλέγουμε $A < \min\{a_{k_1}, \lambda-1\}$

και $B > \max\{a_{k_p}, \lambda+1\}$. Τότε όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ανήκουν στο φραγμένο διάστημα (A, B). Δηλαδή η $(a_n)_{n\geq 1}$ είναι φραγμένη.

3) <u>Αλγεβρικές Ιδιότητες</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθίες πραγματικών με $a_n \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ και $b_n \longrightarrow \mu \in \mathbb{R}$.

Τότε: (i) $a_n + b_n \longrightarrow \lambda + \mu$.

(ii) $a_n b_n \longrightarrow \lambda\mu$.

<u>Απόδ</u>: (i) $a_n \to \lambda$. Αν $\epsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$: $|a_n - \lambda| < \epsilon/2$, $\forall n \geq n_1$.
$b_n \to \mu$. Αν $\epsilon > 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$: $|b_n - \mu| < \epsilon/2$, $\forall n \geq n_2$.

Παίρνοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε ότι $\forall n \geq n_0$, οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν ταυτόχρονα. Προσθέτοντάς τις κατά μέλη έχουμε:

$$|(a_n + b_n) - (\lambda + \mu)| = |(a_n - \lambda) + (b_n - \mu)| \underset{\text{Ανισ.}}{\overset{\text{Τριγ.}}{\leq}} |a_n - \lambda| + |b_n - \mu| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\forall n \geq n_0$. Το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν. Άρα επαληθεύσαμε τον ορισμό του ορίου και $a_n + b_n \longrightarrow \lambda + \mu$.

(ii) Κατ' αρχήν έχουμε: $|a_n b_n - \lambda\mu| = |a_n b_n - \lambda b_n + \lambda b_n - \lambda\mu| =$

$$= |(a_n - \lambda) b_n + \lambda(b_n - \mu)| \underset{\text{Ανισ.}}{\overset{\text{Τριγ.}}{\leq}} |a_n - \lambda||b_n| + |\lambda||b_n - \mu|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Αφού $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνουσα, δείξαμε παραπάνω, ότι η $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|b_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $(*)$

Έστω $\epsilon>0$ τυχόν. Αφού $a_n \to \lambda$ έχουμε, από τον ορισμό του ορίου, ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n-\lambda|<\dfrac{\epsilon}{2M}$, $\forall n \geq n_1$ (**)

Επίσης, $b_n \to \mu$. Άρα, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ με $|b_n-\mu|<\dfrac{\epsilon}{2(|\lambda|+1)}$, $\forall n \geq n_2$ (***) Επιστρέφοντας στην αρχική ανισότητα και εφαρμόζοντας τις (*), (**), (***) παίρνουμε ότι για κάθε $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ ~~έχ~~ ισχύει:

$$|a_nb_n-\lambda\mu| \leq |a_n-\lambda||b_n| + |\lambda||b_n-\mu| \leq |a_n-\lambda|M + |\lambda||b_n-\mu| \leq$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2M}\cdot M + |\lambda|\frac{\epsilon}{2(|\lambda|+1)} < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Δηλαδή, $a_nb_n \to \lambda\mu$.

4) <u>Όρια και διάταξη</u>. Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ πραγματικές ακολουθίες με $a_n \to \lambda$ και $b_n \to \mu$.

(i) Αν $\lambda>0$, τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{\lambda}{2} < a_n < \dfrac{3\lambda}{2}$, $\forall n \geq n_0$.

(ii) Αν $\lambda<0$, τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{3\lambda}{2} < a_n < \dfrac{\lambda}{2}$, $\forall n \geq n_0$

(iii) Αν σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μη αρνητικοί, τότε $\lambda \geq 0$. Αν δηλαδή $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \geq 0$, $\forall n \geq n_1$, τότε $\lambda \geq 0$.
(<u>Προσοχή</u>: μπορεί $a_n>0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

(iv) Αν σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μικρότεροι, ή ίσοι, του 0 τότε $\lambda \leq 0$. [Πάλι, μπορεί $a_n<0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $a_n \to 0$]

(V) Αν $a_n \le b_n$, $\forall n \ge n_2$ (όπου $n_2 \in \mathbb{N}$), τότε $\lambda \le \mu$.

Απόδειξη: (i) Έχουμε ότι $a_n \to \lambda > 0$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για $\epsilon = \frac{\lambda}{2} > 0$. Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$|a_n - \lambda| < \frac{\lambda}{2}$, $\forall n \ge n_0 \Rightarrow -\frac{\lambda}{2} < a_n - \lambda < \frac{\lambda}{2}$, $\forall n \ge n_0$

$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} < a_n < \frac{3\lambda}{2}$, $\forall n \ge n_0$.

(ii) Παρόμοια.

(iii) Αν $\lambda < 0$, τότε από (ii) έχουμε ότι σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n \ge 1}^{\infty}$ είναι μικρότεροι του $\frac{\lambda}{2} < 0$. Άτοπο αφού υποθέσαμε ότι σχεδόν όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί

(iv) Παρόμοια.

(V) Αφού $b_n - a_n \ge 0$, $\forall n \ge n_2$, και $b_n - a_n \to \mu - \lambda$, έχουμε από (iii) ότι $\mu - \lambda \ge 0 \Rightarrow \lambda \le \mu$.

5) Αν $a_n \to \lambda$, τότε $|a_n| \to |\lambda|$. Το αντίστροφο δεν ισχύει εκτός κι αν $\lambda = 0$. Αν δηλαδή $|a_n| \to 0$, τότε και $a_n \to 0$

Απόδ: Τριγωνική Ανισότητα: $\big||a_n| - |\lambda|\big| \le |a_n - \lambda| < \epsilon$, $\forall n \ge n_0$

Δηλαδή για δοθέν $\epsilon > 0$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|a_n - \lambda| < \epsilon$, $\forall n \ge n_0$.
Από Τριγωνική παίρνουμε $\big||a_n| - |\lambda|\big| \le |a_n - \lambda| < \epsilon$, $\forall n \ge n_0$
Άρα, $|a_n| \to |\lambda|$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού αν $a_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $|a_n| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $|a_n| \to 1$ ενώ η $((-1)^n)_{n \ge 1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει

Αν $\lambda=0$ και $|a_n|\to 0$, έστω $\epsilon>0$ τυχόν.
Τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$ με $||a_n||<\epsilon$, $\forall n\geq n_0$. Άρα, $|a_n|<\epsilon$, $\forall n\geq n_0$
$\Rightarrow a_n\to 0$.

<u>Σημείωση</u>: Προκύπτει άμεσα από το (3 ii) (αλγ. ιδιότητες) ότι αν $a_n\to\lambda\in\mathbb{R}$ και $\rho\in\mathbb{R}$, τότε $\rho a_n\to\rho\lambda$. Επίσης, αν $k\in\mathbb{N}$, τότε $a_n^k\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda^k$.

6) <u>Θεωρήματα Sandwich</u>

(i) (Μικρό Sandwich): Αν $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}$ και $(y_n)_{n\geq1}^{\infty}$ πραγματικές ακολουθίες με $|y_n|\leq|x_n|$, $\forall n\geq n_1$ (όπου $n_1\in\mathbb{N}$), και $x_n\to 0$, τότε και $y_n\to 0$.

Πράγματι, αν $\epsilon>0$, τότε αφού $x_n\to 0$, υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ με $|x_n|<\epsilon$, $\forall n\geq n_2$. Αν $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ τότε έχουμε ότι
$|y_n|\leq|x_n|<\epsilon$, $\forall n\geq n_0$. Άρα $y_n\to 0$ γιατί $\epsilon>0$ τυχόν.

(ii) (Μεγάλο Sandwich): Αν $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}$, $(y_n)_{n\geq1}^{\infty}$, $(z_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι ~~πρα~~ πραγματικές ακολουθίες και $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$y_n\leq z_n\leq x_n,\quad\forall n\geq n_0$$

και επιπλέον, $\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda\in\mathbb{R}$, τότε

έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}z_n=\lambda$.

Προφανώς, από την υπόθεση έχουμε ότι $0 \leq z_n - y_n \leq x_n - y_n$, $\forall n \geq n_0$, και $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lambda - \lambda = 0$. Το (i) μας δίνει ότι

$z_n - y_n \to 0$. Άρα, $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(z_n - y_n) + \lim_{n\to\infty} y_n = 0 + \lambda = \lambda$

Άσκηση: Αν $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $a_n \to \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\sqrt{a_n} \to \sqrt{\lambda}$.

Λύση: Από τις ιδιότητες διάταξης των ορίων έχουμε ότι, αφού $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περ. 1: $\lambda = 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $a_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq a_n = |a_n| < \epsilon^2$, $\forall n \geq n_0$. Άρα, $0 \leq \sqrt{a_n} = |\sqrt{a_n}| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Επαληθεύσαμε τον ορισμό του ορίου για $\sqrt{a_n} \to 0$.

Περ. 2: $\lambda > 0$. Έχουμε τώρα ότι:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{\lambda}| = \frac{|a_n - \lambda|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}|a_n - \lambda|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αφού $a_n - \lambda \to \lambda - \lambda = 0$, το Θ. Sandwich δίνει $\sqrt{a_n} \to \sqrt{\lambda}$.

7) Υποθέτουμε ότι $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και ότι $a_n \to \lambda \neq 0$. Τότε $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{\lambda}$.

Απόδ: Γνωρίζουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία περιορισμένη είναι φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Έχουμε τώρα ότι $\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\lambda}\right| = \frac{|\lambda - a_n|}{|\lambda||a_n|} \leq \frac{1}{M|\lambda|}|a_n-\lambda|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αφού $a_n - \lambda \to 0 \Rightarrow |a_n-\lambda| \to 0 \Rightarrow \frac{1}{M|\lambda|}|a_n-\lambda| \to 0$,

το Θ. Sandwich μας δίνει ότι $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{\lambda}$.

8) Γενικότερα, αν $a_n \to \lambda \in \mathbb{R}$ και $b_n \to \mu \in \mathbb{R}$, και $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $\mu \neq 0$, τότε, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\lambda}{\mu}$.

Απόδ: Έπεται από το 7) ότι $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{\mu}$. Από τον κανόνα για το γινόμενο ορίων έχουμε ότι $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to \frac{\lambda}{\mu}$.

$\longmapsto$

<u>Σύγκλιση Υπακολουθιών</u>

Πρόταση: Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ πραγματική ακολουθία με $a_n \to \lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ μία υπακολουθία της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Τότε $a_{k_n} \to \lambda$.

Απόδ: Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν. Αφού $a_n \to \lambda$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - \lambda| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Παρατηρούμε ότι επειδή το σύνολο δεικτών $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ είναι άπειρο θα υπάρχει κάποιο $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $k_{n_1} \geq n_0$. Άρα, $k_n \geq n_0$, $\forall n \geq n_1$. (γιατί $n \geq n_1 \Rightarrow k_n \geq k_{n_1}$)

Συνεπώς, αφού $k_n \geq n_0, \forall n \geq n_1$, έχουμε ότι

$|a_{k_n} - \lambda| < \epsilon$, $\forall n \geq n_1$. Το $\epsilon > 0$ τυχόν, άρα $a_{k_n} \longrightarrow \lambda$.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Το αντίστροφο της πρότασης δεν ισχύει.

Π.χ., αν $a_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, γνωρίζουμε ότι η $(a_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Όμως, οι υπακολουθίες $(a_{2n-1})_{n \geq 1}^{\infty}$ και $(a_{2n})_{n \geq 1}^{\infty}$ της $(a_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ συγκλίνουν στους -1 και 1 αντίστοιχα.

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι αν για μία πραγματική ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $a_{2n-1} \longrightarrow \lambda$ και $a_{2n} \longrightarrow \lambda$, τότε

$a_n \longrightarrow \lambda$.

<u>Σημείωση</u>: Για να δείξουμε ότι μία ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}$ <u>δεν</u> συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξής μέθοδο: Να βρούμε 2 υπακολουθίες της $(a_{k_n})_{n \geq 1}^{\infty}$ και $(a_{\ell_n})_{n \geq 1}^{\infty}$ οι οποίες συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια. Δηλαδή, $a_{k_n} \to x$ και $a_{\ell_n} \longrightarrow y$ με $x \neq y$.

Τότε, η $(a_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ δεν μπορεί να συγκλίνει σε πραγματικό.

Άσκηση: Αν $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ακολουθία πραγματικών και $\lambda\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \iff \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lambda.$$

Λύση: "$\Rightarrow$". Έστω ότι $a_n \to \lambda$. Τότε η ακολουθία $(a_{n+1})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Συνεπώς $a_{n+1} \longrightarrow \lambda$.

"$\Leftarrow$". Υποθέτουμε ότι $a_{n+1} \to \lambda$. Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_{n+1}-\lambda|<\epsilon$, $\forall n\geq n_0$. Θέτουμε $n_1 = n_0+1$. Τότε

$$\forall n\geq n_1 \Rightarrow n\geq n_0+1 \Rightarrow n-1\geq n_0 \Rightarrow |a_{(n-1)+1}-\lambda|<\epsilon.$$

$$\Rightarrow |a_n-\lambda|<\epsilon, \ \forall n\geq n_1. \text{ Άρα } \lim_{n\to\infty} a_n = \lambda.$$

Σημείωση: Ανάλογα δείχνουμε ότι $a_n\to\lambda \iff a_{n+2}\longrightarrow\lambda$.

Γενικότερα, αν $m\in\mathbb{N}$ σταθερό, τότε $a_n\to\lambda \iff a_{n+m}\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda$.

Μια υπακολουθία της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, της μορφής $(a_{n+m})_{n\geq 1}^{\infty}$, για κάποιο $m\in\mathbb{N}$ σταθερό, λέγεται υπακολουθία ουρά της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ διότι προκύπτει από την $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με ~~αφ~~ παράλειψη των m πρώτων όρων $a_1,\dots,a_m$ της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Πράγματι, οι όροι της $(a_{n+m})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι οι $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \dots, a_{m+n}, a_{m+n+1}, \dots$

Η παραπάνω άσκηση μας δείχνει ότι η σύγκλιση μιας ακολουθίας $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση μιας υπακολουθίας ουράς της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Οι υπακολουθίες ουράς της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι οι μόνες υπακολουθίες που έχουν αυτή την ιδιότητα ισοδύναμης σύγκλισης.

Το Αξίωμα Πληρότητας του $\mathbb{R}$

Έως τώρα έχουμε δεί διάφορες ιδιότητες που έχουν οι συγκλίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δεν έχουμε δεί όμως αρκετά παραδείγματα συγκλινουσών ακολουθιών. Τα μόνα παραδείγματα που έχουμε είναι των σταθερών ακολουθιών και των τελικά σταθερών ακολουθιών. Η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι τελικά σταθερή όταν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ και $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$a_n = c \;,\; \forall n \geq n_0 . \quad \text{Τότε βέβαια, } \lim_{n\to\infty} a_n = c .$$

Η πραγματικότητα είναι ότι με τα μέσα που έχουμε αυτά είναι και τα μόνα παραδείγματα συγκλινουσών ακολουθιών που μπορούμε να κατασκευάσουμε. Για να διευρύνουμε την κλάση των συγκλινουσών ακολουθιών ώστε να περιλαμβάνει μή τετριμμένα μέλη, χρειαζόμαστε την ιδιότητα της πληρότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Η ιδιότητα αυτή απορρέει από τον τρόπο κατασκευής του $\mathbb{R}$ η οποία δεν θα μας απασχολήσει. Θα τη διατυπώσουμε λοιπόν σαν αξίωμα.

<u>Αξίωμα Πληρότητας</u>: Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Αν στη διατύπωση του αξιώματος αντικαταστήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς με τους ρητούς, τότε το αξίωμα παύει να ισχύει.

Παρατηρήσεις: 1) Αν η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία πραγματικών $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$, τότε για να είναι η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ φραγμένη αρκεί να είναι άνω φραγμένη. Αρκεί δηλαδή να υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ο M λέγεται ένα άνω φράγμα της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ έχει πολλά άνω φράγματα. Π.χ., κάθε $M' > M$ είναι επίσης ένα άνω φράγμα της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Όταν η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και φραγμένη, τότε από το Αξίωμα Πληρότητας, θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $a_n \to \lambda$. Αν $M \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, δηλαδή $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\lambda \leq M$. Δηλαδή το όριο της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι μικρότερο, ή ίσο, από κάθε άνω φράγμα της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Επειδή η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι αύξουσα, το όριό της λ θα είναι επίσης ένα άνω φράγμα της. Πράγματι, θα δείξουμε ότι $a_n \leq \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Σε αντίθετη περίπτωση, θα υπήρχε κάποιο $m \in \mathbb{N}$ με $a_m > \lambda$. Τότε $a_n \geq a_m$, $\forall n \geq m$, γιατί η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} a_n \geq a_m > \lambda$, άτοπο.

Επίσης, το λ θα είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Δηλαδή, αν $\lambda' < \lambda$ τότε ο λ' δεν είναι άνω φράγμα της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Πράγματι, θέτουμε $\epsilon = \lambda - \lambda' > 0$. Αφού $a_n \to \lambda$ θα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_k - \lambda| < \epsilon$. Άρα, $a_k > \lambda - \epsilon = \lambda'$. Δηλαδή ο λ' δεν είναι άνω φράγμα της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$

Συμπέρασμα: Όταν η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και φραγμένη τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $a_n \to \lambda$. Επιπλέον, $a_n \leq \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και ο λ είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα της $(a_n)_{n\geq 1}$.

2) Αν η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $a_n \to \lambda$. Επιπλέον, $a_n \geq \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και ο λ είναι το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$.

3) Αν η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη και $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, τότε $a_n < \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αντίστοιχα, αν η $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα και φραγμένη και $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, τότε $b_n > \mu$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Πόρισμα: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Απόδ: Αφού $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι η $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα η $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Συμπεραίνουμε από το ΑΞ. Πληρότητας ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι $\lambda=0$. Θέτουμε $a_n=\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και $a_n\to\lambda$, γνωρίζουμε ότι $\lambda\geq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda>0$. Τότε, από τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων, έχουμε ότι $\frac{1}{a_n}\to\frac{1}{\lambda}$. Επίσης, $\frac{1}{a_{n+1}}\to\frac{1}{\lambda}$ γιατί η $\left(\frac{1}{a_{n+1}}\right)_{n\geq 1}$ είναι υπακολουθία της $\left(\frac{1}{a_n}\right)$. Συνεπώς, $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\to\lambda-\lambda=0$.

Όμως, $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=(n+1)-n=1\to 1$. Από τη μοναδικότητα του ορίου συμπεραίνουμε ότι $1=0$, άτοπο. Άρα, $\lambda=0$ και $\frac{1}{n}\to 0$.

<u>Παρατήρηση</u>: $\frac{1}{n^k}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Επίσης, $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$.

(Προκύπτει από τις ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών)

<u>Άσκηση</u>: $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n-2}{7n^2+5n+1}=\frac{5}{7}.$$

<u>Λύση</u>: $$a_n=\frac{5n^2+3n-2}{7n^2+5n+1}=\frac{5}{7}\,\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}\to\frac{5}{7}\,\frac{1+3\cdot 0-2\cdot 0}{1+5\cdot 0+0}=\frac{5}{7}$$

αφού $\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{1}{n^2}\to 0$, και ισχύουν οι αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων.

Σημαντικά Όρια

1) Αν $a>0$, τότε $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. (Δηλαδή, $\forall a>0$, $\sqrt[n]{a} \to 1$)

<u>Απόδ</u>: <u>Περίπτωση 1</u>, $a>1$. Τότε, $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι $\sqrt[n]{a}>1$. Θέτουμε $\delta_n = \sqrt[n]{a} - 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\delta_n \to 0$. Αυτό θα επιτευχθεί μέσω της ανισότητας Bernoulli και το Θ. Sandwich.

Πράγματι, $1+\delta_n = \sqrt[n]{a}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow a = (1+\delta_n)^n \geq 1+n\delta_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, λόγω της ανισότητας Bernoulli αφού $\delta_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Συνεπώς, $0<n\delta_n<1+n\delta_n \leq (1+\delta_n)^n = a \Rightarrow 0<\delta_n<\frac{a}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Όμως $\frac{1}{n}\to 0 \Rightarrow \frac{a}{n} = a\cdot\frac{1}{n} \to a\cdot 0 = 0$. Εφαρμόζοντας το Θ. Sandwich έχουμε ότι $\delta_n \to 0$. Άρα, $\sqrt[n]{a}-1\to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}\to 1$.

<u>Περίπτωση 2</u>: $0<a<1$. Τότε, $\frac{1}{a}>1$. Από την περίπτωση 1 έχουμε ότι $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a}\to 1$, από τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων.

2) Αν $\theta\in\mathbb{R}$ και $|\theta|<1$, τότε $\lim_{n\to\infty}\theta^n = 0$.

Απόδ.: Αν $\theta=0$, τότε φυσικά $\theta^n=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και το συμπέρασμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι $\theta\neq 0$.

Αφού $|\theta|<1$, έχουμε ότι $\frac{1}{|\theta|}>1$. Θέτουμε $\delta=\frac{1}{|\theta|}-1>0$.

Έχουμε ότι $\frac{1}{|\theta|}=1+\delta \Rightarrow \frac{1}{|\theta|^n}=(1+\delta)^n \geq 1+n\delta$, λόγω της ανισότητας Bernoulli. Άρα, $0<n\delta<1+n\delta\leq(1+\delta)^n=\frac{1}{|\theta|^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς, $0<|\theta|^n<\frac{1}{n\delta}=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Αφού $\frac{1}{n}\to 0 \Rightarrow \frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{n}\to 0$, το Θ. Sandwich μας δίνει ότι $|\theta|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Από γνωστή ιδιότητα των συγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι και $\theta^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Απόδ.: (Bernoulli's trick). Έχουμε ότι $\sqrt[2n]{n}\geq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Θέτουμε $\delta_n=\sqrt[2n]{n}-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε, $\delta_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Έχουμε ότι $\sqrt[2n]{n}=1+\delta_n \Rightarrow \left(\sqrt[2n]{n}\right)^n=(1+\delta_n)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt{n}=(1+\delta_n)^n\geq 1+n\delta_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, από την ανισότητα Bernoulli αφού $\delta_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$0\leq n\delta_n<1+n\delta_n\leq(1+\delta_n)^n=\sqrt{n} \Rightarrow 0\leq\delta_n<\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Αφού $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, το Θ. Sandwitch μας δίνει ότι $\delta_n \to 0$.

Άρα, $\sqrt[2n]{n} - 1 \to 0 \Rightarrow \sqrt[2n]{n} \to 1 \Rightarrow \left(\sqrt[2n]{n}\right)^2 \to 1^2 = 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n} \to 1.$

4) Αν $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $a_n \to \lambda$ με $\lambda > 0$, τότε

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1.$

<u>Απόδ</u>: Από τη σχέση οριακής τιμής και διάταξης γνωρίζουμε ότι αφού $a_n \to \lambda > 0$, τότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{\lambda}{2} < a_n < \frac{3\lambda}{2}$, $\forall n \geq n_0$.

$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{\lambda}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3\lambda}{2}}$, $\forall n \geq n_0$.

Όμως $\lambda > 0$. Άρα από 1) γνωρίζουμε ότι $\sqrt[n]{\frac{\lambda}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ και $\sqrt[n]{\frac{3\lambda}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Από το Θ. Sandwitch συμπεραίνουμε ότι $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1.$

5) Αν $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, τότε

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Απόδ: Ας θέσουμε $\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Επιλέγουμε $\theta \in \mathbb{R}$ με

$\lambda < \theta < 1$. Θέτουμε $\epsilon = \theta - \lambda > 0$. Από τον ορισμό του

ορίου $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \lambda$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \lambda\right| < \epsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Άρα, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \lambda + \epsilon = \theta$, $\forall n \geq n_0$. Εφαρμόζουμε διαδοχικά

τις ανισότητες για $n = n_0, n = n_0+1, n = n_0+2, \dots,$ και

παίρνουμε $\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| < \theta \Rightarrow |a_{n_0+1}| < \theta|a_{n_0}|$.

$$\left|\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\right| < \theta \Rightarrow |a_{n_0+2}| < \theta|a_{n_0+1}| < \theta^2|a_{n_0}|.$$

$$\left|\frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}}\right| < \theta \Rightarrow |a_{n_0+3}| < \theta|a_{n_0+2}| < \theta^3|a_{n_0}|$$

Συνεχίζοντας, επαγωγικά, παίρνουμε ότι $|a_{n_0+n}| < \theta^n \cdot |a_{n_0}|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αφού $0 \leq \lambda < \theta < 1$, το 2) μας δίνει ότι $\theta^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Άρα

$\theta^n |a_{n_0}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Εφαρμόζοντας το Θ. Sandwich παίρνουμε

ότι $\lim_{n\to\infty} a_{n_0+n} = 0$. Αφού η $(a_{n_0+n})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία

ουρά της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Παραδείγματα: 1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} = 7$.

Λύση: $\cancel{7^n} < 3^n+5^n+7^n < 3\cdot 7^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Άρα, $\sqrt[n]{\cancel{7^n}} < \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} < \sqrt[n]{3\cdot 7^n} \Rightarrow \cancel{7} < \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} < 7\cdot\sqrt[n]{3}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Αφού $\sqrt[n]{3}\to 1$, το Θ. Sandwitch μας δίνει $\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}\to 7$.

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n} = 0$. Πράγματι, θέτουμε $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$ και εφαρμόζουμε το (5): $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{n^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot(1+0)^2 = \frac{1}{2} < 1$. Άρα $a_n\to 0$, λόγω (5)

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2^n}{2n^2+7\cdot 2^n} = \frac{1}{7}$, αφού $\frac{n^2+2^n}{2n^2+7\cdot 2^n} =$

$= 2^n\frac{\frac{n^2}{2^n}+1}{\left(2\frac{n^2}{2^n}+7\right)\cdot 2^n} = \frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{7+2\cdot\frac{n^2}{2^n}} \to \frac{1}{7}$ γιατί $\frac{n^2}{2^n}\to 0$

4) $\sqrt[n]{n^2+3^n} \longrightarrow 3$. Πράγματι, $\sqrt[n]{n^2+3^n} = \sqrt[n]{3^n\left(\frac{n^2}{3^n}+1\right)} =$

$= 3\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{3^n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Θέτουμε $a_n = 1+\frac{n^2}{3^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $\frac{n^2}{3^n}\to 0$ (όπως το παράδειγμα 2), έχουμε ότι $a_n\to 1$.

Από βασικό όριο (4) $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n}\to 1$. Αφού $\sqrt[n]{n^2+3^n} = 3\sqrt[n]{a_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n^2+3^n}\to 3$