

Φυλλάδιο Ασκήσεων # 4

1) Βρείτε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}}$    (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n}}$    (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+4)^n}{5^n(2n+3)}$    (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x+1)^n$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+4}$    (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{5^n \sqrt{n}}$    (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^{3n}}{n 2^n}$

(h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7x+12)^{n^2}}{5^n + 6^n}$    (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n)} x^n$

2) Υπολογίστε τα παρακάτω άθροισμα :

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 5^n}{7^n}$    (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$

Υπόδειξη: Θεωρήστε παραγωγιστές δυναμοσειρών. Για το (ii) παραγωγίστε δύο φορές κατάλληλη δυναμοσειρά.

3) Κάνοντας χρήση των ανακαταστάσεων των συναρτήσεων  $\sin, \cos, \exp$  με δυναμοσειρές και το θεώρημα παραγωγιστών δυναμοσειρών, βρείτε τα όρια (χωρίς De' L'Hospital)

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$    (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$    (iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \frac{1}{2}x^2 - x}{x^3}$    (v)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x + x^3/6}{x^5}$