

Φοιτητικό Απομνημόνιο #5.

1) Έστω I, J διαστήματα του \mathbb{R} . Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $y_0 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το x_0 είναι είτε άκρο του I , είτε εσωτερικό του I , και το y_0 είναι είτε άκρο του J , είτε εσωτερικό του J . Έστω $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow J \setminus \{y_0\}$ και $g: J \setminus \{y_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ και $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \lambda$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \lambda$.

Εξέταση: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$

2) Εξετάστε αν οι παρακάτω όρια υπάρχουν, και γιατί υποθέστε τα.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)^x - x^x], \quad \forall a > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)]^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]^{\frac{1}{1 - \cos(x)}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, \quad \forall a > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[\cos(2x)]}{\ln[\cos(3x)]}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^{2x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{\operatorname{Arcsin}(x) - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x)}{e^x + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos(x)}$$