ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός α τέτοιος ώστε $\alpha^2 = 3$.

Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m, n (μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον 1) τέτοιοι ώστε

$$\frac{m^2}{n^2} = 3.$$

Τότε $m^2 = 3n^2$, δηλαδή ο m^2 είναι πολλαπλάσιο του 3. Ισχυριζόμαστε ότι τότε και ο m είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν αυτό δεν συμβαίνει τότε ο m θα είναι της μορφής $3k+1$ ή $3k+2$. Τότε όμως $(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$ ή $(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$ αντίστοιχα. Δηλαδή ο m^2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, άτοπο.

Επομένως $m = 3k$, για κάποιον φυσικό k, απ' όπου έπεται ότι $3n^2 = m^2 = 9k^2$. Τότε $n^2 = 3k^2 \longrightarrow$ ο n^2 άρα και ο n θα είναι πολλαπλάσια του 3. Αυτό είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n είναι ο 1. $\square$

Ασκηση 2. (α) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{6}$ είναι άρρητος.

(β) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

Υπόδειξη: (α) Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m, n (μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον 1) τέτοιοι ώστε

$$\frac{m}{n} = \sqrt{6}.$$

Τότε $m^2 = 6n^2$, δηλαδή ο m^2 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Τότε ο m είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Έπεται ότι $m = 6k$ για κάποιον φυσικό $k \Longrightarrow m^2 = 36k^2$. Συνεπώς, $n^2 = 6k^2 \Longrightarrow$ ο n^2 άρα και ο n θα είναι πολλαπλάσια του 6. Αυτό είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι m, n έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον 1.

(β) Αν υποθέσουμε ότι ο $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι ρητός, τότε και το τετράγωνό του θα είναι ρητός. Δηλαδή $2+3+2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί τότε $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Ασκηση 3. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει η ταυτότητα

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Υπόδειξη: Για $n = 1$ η ζητούμενη ταυτότητα ισχύει: ελέγχουμε ότι

$$1\cdot 2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3}.$$

Έστω ότι η ταυτότητα

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ισχύει για τον φυσικό n. Θα δείξουμε ότι ισχύει για τον $n+1$, δηλαδή ότι

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n\cdot(n+1) + (n+1)\cdot(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned}1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)+(n+1)\cdot(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)\\ &=(n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right)\\ &=(n+1)(n+2)\cdot\frac{n+3}{3}\\ &=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής συμπεραίνουμε ότι η ταυτότητα ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Ασκηση 4. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύουν οι ανισότητες

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$$

και

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Υπόδειξη: (α) Για $n=1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $1<2\sqrt{1}$, δηλαδή $1<2$ που ισχύει.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k\geq 1$ έχουμε $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$ και θα δείξουμε ότι

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})>\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Όμως, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τη συζυγή παράσταση βλέπουμε ότι

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

(β) Για $n=1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{4}}$, η οποία ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k\geq 1$ έχουμε $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\leq\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ και θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leq\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leq\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leq\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $1+\frac{3}{3k+1}=\frac{3k+4}{3k+1}\leq\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^2=\frac{4k^2+8k+4}{4k^2+4k+1}=1+\frac{4k+3}{4k^2+4k+1}$. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $3(4k^2+4k+1)\leq(3k+1)(4k+3)$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $12k^2+12k+3<12k^2+13k+3$, η οποία ισχύει αφού $k>0$. $\square$

Ασκηση 5. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό x και για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει η ανισότητα

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|\,.$$

Υπόδειξη: Για $n = 1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για n. Θα δείξουμε ότι ισχύει για την τιμή $n+1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} |\sin(n+1)x| &= |\sin(nx+x)| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \\ &\leq |\sin nx||\cos x| + |\cos nx||\sin x| \\ &\leq |\sin nx| + |\sin x| \\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| \\ &= (n+1)|\sin x|. \end{aligned}$$

□

Ασκηση 6. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι ίσο με 2^n.

Υπόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η πρόταση

$\Pi(n)$: Αν το S έχει n στοιχεία τότε το S έχει ακριβώς 2^n υποσύνολα.

Αν $n = 1$ τότε το S είναι μονοσύνολο και έχει ακριβώς δύο υποσύνολα, το $\varnothing$ και το S. Συνεπώς, η $\Pi(1)$ αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η $\Pi(k)$ αληθεύει. Έστω $S = \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ ένα σύνολο με $(k+1)$ στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο

$$T = S \setminus \{x_{k+1}\} = \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Το T έχει k στοιχεία, οπότε έχει 2^k υποσύνολα. Τώρα, κάθε υποσύνολο του S θα περιέχει ή δεν θα περιέχει το x_{k+1}. Τα υποσύνολα του S που δεν περιέχουν το x_{k+1} είναι ακριβώς τα υποσύνολα του T, δηλαδή το πλήθος τους είναι 2^k. Από την άλλη πλευρά, κάθε υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του T με την προσθήκη του x_{k+1} (αντίστροφα, κάθε υποσύνολο του T προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} με την αφαίρεση του x_{k+1}). Δηλαδή, το πλήθος των υποσυνόλων του S που περιέχουν το x_{k+1} είναι 2^k (όσα είναι τα υποσύνολα του T). Έπεται ότι το συνολικό πλήθος των υποσυνόλων του S είναι

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Δηλαδή, η $\Pi(k+1)$ αληθεύει.

Συνεπώς, η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Ασκηση 7. Ένας φυσικός αριθμός $p > 1$ λέγεται *πρώτος* αν οι μόνοι φυσικοί αριθμοί που διαιρούν τον p είναι ο 1 και ο p. Αποδείξτε με επαγωγή ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων, δηλαδή υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και (όχι απαραίτητα διακεκριμένοι) πρώτοι $p_1, \ldots, p_k$ τέτοιοι ώστε $n = p_1 p_2 \cdots p_k$.

Υπόδειξη: Αρχικά, να σημειώσουμε ότι κάθε πρώτος θεωρείται γινόμενο πρώτων (με έναν όρο). Θεωρούμε την πρόταση $P(n)$: «ο n γράφεται ως γινόμενο πρώτων». Δείχνουμε με την ισχυρή μορφή της επαγωγής ότι η $P(n)$ ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq 2$.

Για την $P(2)$ παρατηρούμε ότι ο 2 είναι πρώτος (άρα, γινόμενο πρώτων με έναν όρο). Συνεπώς, η $P(2)$ ισχύει.

Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $2 \leq k \leq n$ ισχύει η $P(k)$, δηλαδή ότι κάθε $2 \leq k \leq n$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων, και θα δείξουμε ότι ο $n+1$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων (δηλαδή, ισχύει η $P(n+1)$). Αν ο $n+1$ είναι πρώτος, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν ο $n+1$ δεν είναι πρώτος, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $2 \leq k_1, k_2 \leq n$ και $n+1 = k_1 k_2$. Από την επαγωγική υπόθεση, καθένας από τους k_1, k_2 γράφεται ως γινόμενο πρώτων, οπότε το ίδιο ισχύει και για τον $n+1 = k_1 k_2$. Πράγματι, αν $k_1 = p_1 \cdots p_s$ και $k_2 = q_1 \cdots q_m$, όπου οι p_i, q_j είναι πρώτοι, τότε $n+1 = p_1 \cdots p_s q_1 \cdots q_m$ που είναι γινόμενο πρώτων.