

Λύσεις Σειράς Ασκήσεων 2

1. **Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο:** Υπολογίστε την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την επιφάνεια του χαλκού, όταν αυτή φωτίζεται με ακτινοβολία μήκους κύματος 210.0 nm. Δίνεται ότι η οριακή συχνότητα του χαλκού είναι $\nu_0 = 1.076 \times 10^{15}$ Hz.

Λύση

Αρχικά, υπολογίζουμε τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας σύμφωνα με την Εξίσωση $c = \lambda\nu$:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{2.9979 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}{210.0 \times 10^{-9} \text{ m}} = 1.428 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση $E_k = h\nu - h\nu_0$, έχουμε:

$$E_k = h\nu - h\nu_0 = h(\nu - \nu_0)$$

Και αντικαθιστώντας:

$$E_k = (6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(1.428 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} - 1.076 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}) = 2.33 \times 10^{-19} \text{ J} = 0.233 \text{ aJ}$$

2. **Ενέργεια φωτονίων:** Μια οδοντιατρική συσκευή παραγωγής Ακτίνων Χ παράγει Ακτίνες Χ με μήκος κύματος 1.54 Å, όπου 1 Å (σύμβολο Å) ισούται με 10^{-10} m και αποτελεί μονάδα που χρησιμοποιείται συχνά στη φασματοσκοπία. Υπολογίστε την ενέργεια $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ τέτοιων φωτονίων Ακτίνων Χ σε joule.

Λύση

Η ενέργεια ενός μεμονωμένου φωτονίου δίνεται από

$$E_{\text{photon}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{1.54 \times 10^{-10} \text{ m}} = 1.29 \times 10^{-15} \text{ J}\cdot\text{photon}^{-1}$$

Η ενέργεια 6.022×10^{23} τέτοιων φωτονίων είναι:

$$E = (1.29 \times 10^{-15} \text{ J}\cdot\text{photon}^{-1})(6.022 \times 10^{23} \text{ photons}) = 7.77 \times 10^8 \text{ J}.$$

3. **Ατομικό Μοντέλο Bohr – Μεταβάσεις ηλεκτρονιακών καταστάσεων και εκπεμπόμενη ακτινοβολία:** (α) Υπολογίστε τη συχνότητα και το μήκος κύματος της ατομικής μετάβασης ενός ηλεκτρονίου από την στάθμη $n = 3$ στη $n = 1$ στο άτομο του υδρογόνου.

Λύση

Η ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου δίνεται από την Εξίσωση:

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{ke^2}{2a_0h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

όπου, n_f η τελική ενεργειακή κατάσταση, n_i η αρχική ενεργειακή κατάσταση, k η σταθερά Coulomb, e το φορτίο του ηλεκτρονίου, a_0 η ακτίνα Bohr και h η σταθερά του Planck.

Μετά από πράξεις ο όρος $ke^2/2a_0h = 2.1799 \text{ aJ}$ και συνεπώς έχουμε:

$$E_{\text{photon}} = (2.1799 \text{ aJ}) \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1.9377 \text{ aJ} = 1.9377 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση $E = h\nu$, η συχνότητα του φωτονίου είναι:

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{1.9377 \times 10^{-18} \text{ J}}{6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} = 2.924 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

Αντίστοιχα, από τη σχέση $E = hc/\lambda$, το μήκος κύματος του εκπεμπόμενου φωτονίου είναι:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(2.9979 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{1.9377 \times 10^{-18} \text{ J}} = 1.025 \times 10^{-7} \text{ m} = 102.5 \text{ nm}$$

(β) Όταν ένα ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου βρίσκεται στην στάθμη $n = 3$, βρίσκεται κατά μέσο όρο πιο κοντά ή πιο μακριά από τον πυρήνα σε σύγκριση με τη θεμελιώδη κατάσταση; Απαιτείται περισσότερη ή λιγότερη ενέργεια για να ιονίσετε ένα άτομο υδρογόνου στην στάθμη $n = 3$ από ό,τι όταν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση; Να αιτιολογήσετε.

Λύση

Πιο μακριά, γιατί ως θεμελιώδης κατάσταση στο μοντέλο Bohr ορίζεται η χαμηλότερη στάσιμη τροχιά, δηλαδή αυτή που βρίσκεται σε μικρότερη απόσταση από τον πυρήνα. Όλες οι υπόλοιπες ενεργειακές στάθμες βρίσκονται σε μεγαλύτερη απόσταση. Ακολούθως, απαιτείται μικρότερη ενέργεια για να ιονίσετε το άτομο του υδρογόνου στη στάθμη $n = 3$, επειδή το ηλεκτρόνιο έχει ήδη απορροφήσει ενέργεια για να ανέλθει από τη θεμελιώδη κατάσταση στη διεγερμένη αυτή στάθμη (διεγερμένη κατάσταση).

4. **Υλικά κύματα De Broglie:** (α) Μια συγκεκριμένη σφαίρα τουφεκιού έχει μάζα 5,00 g. Υπολογίστε το μήκος κύματος de Broglie της σφαίρας όταν αυτή κινείται με ταχύτητα 1250 μίλια ανά ώρα (mph). Να θεωρήσετε ότι 1 μίλι = 1.609 km.

Λύση

Αρχικά, μετατρέπουμε την ταχύτητα από μίλια ανά ώρα σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο:

$$v = (1250 \text{ mile} \cdot \text{h}^{-1}) \left(\frac{1.609 \text{ km}}{1 \text{ mile}} \right) \left(\frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) = 559 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Το μήκος κύματος de Broglie δίνεται από την εξίσωση $\lambda = h/mv$:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(5.00 \times 10^{-3} \text{ kg})(559 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})} = 2.37 \times 10^{-34} \text{ m}$$

Πρόκειται για ένα μήκος κύματος εξαιρετικά μικρό, ώστε να μην είναι ανιχνεύσιμο πειραματικά.

(β) Θεωρώντας ότι το μικρότερο μετρήσιμο μήκος κύματος σε ένα πείραμα είναι 0.10 fm, ποια είναι η μέγιστη μάζα ενός αντικειμένου που κινείται με ταχύτητα $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, για την οποία το μήκος κύματος de Broglie είναι παρατηρήσιμο;

Λύση

Λύνουμε την εξίσωση $\lambda = h/mv$ ως προς m :

$$m = \frac{h}{\lambda v} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(0.10 \times 10^{-15} \text{ m})(100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})} = 6.6 \times 10^{-20} \text{ kg}$$

Πρόκειται για τη μέγιστη μάζα, καθώς έχει υπολογιστεί για το μικρότερο μετρήσιμο μήκος κύματος.

5. **Αρχή της Απροσδιοριστίας:** Υποθέστε ότι θέλετε να προσδιορίσετε τη θέση ενός ηλεκτρονίου με ακρίβεια $5 \times 10^{-11} \text{ m}$, δηλαδή μέσα σε λίγα ποσοστά του μεγέθους ενός ατόμου. Εκτιμήστε την αβεβαιότητα στην ταχύτητα του ηλεκτρονίου σύμφωνα με την αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg. Αν το ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα $5,0 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, ποιο κλάσμα της ταχύτητας αυτής αντιστοιχεί στην αβεβαιότητα που υπολογίσατε νωρίτερα;

Λύση

Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση της Αρχής της Απροσδιοριστίας για να εκτιμήσουμε την αβεβαιότητα Δp . Είναι αρχικά:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{1}{2} \hbar \Rightarrow \Delta p \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}$$

Και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$(\Delta p) \geq \frac{h}{4\pi(\Delta x)} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{4\pi(5 \times 10^{-11} \text{ m})} = 1 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $1\text{J} = 1\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$. Επειδή η μάζα του ηλεκτρονίου είναι $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, η αβεβαιότητα στην ταχύτητά του δίνεται από:

$$\Delta v \geq \frac{\Delta p}{m} = \frac{1 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 1 \times 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Το αποτέλεσμα αυτό αντιστοιχεί σε εξαιρετικά μεγάλη αβεβαιότητα στην ταχύτητα, περίπου **0.4 % της ταχύτητας του φωτός ή 20 % της δοθείσας ταχύτητας** του ηλεκτρονίου. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι αυτές είναι οι **ελάχιστες δυνατές αβεβαιότητες** — στην πράξη, οι πραγματικές μπορεί να είναι ακόμη μεγαλύτερες. Τα μεγέθη αυτά αντιπροσωπεύουν τις καλύτερες μετρήσεις που μπορούν να επιτευχθούν υπό τις δεδομένες συνθήκες.