ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3
Σχετική κίνηση - Συστήματα αναφοράς

1. Μία βάρκα μπορεί να κινείται σε ποταμό πλάτους d με ταχύτητα υ ως προς το νερό. Η βάρκα ξεκινά από τη μία όχθη και προσπαθεί να φτάσει στην άλλη, κινούμενη διαρκώς κάθετα προς τη ροή του ποταμού. Η ταχύτητα του νερού είναι μηδέν στις όχθες και αυξάνεται γραμμικά, φτάνοντας την τιμή v στο κέντρο.
(α) Να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς της βάρκας και να την σχεδιάσετε.
(β) Πόση είναι η οριζόντια μετατόπιση της βάρκας στην απέναντι όχθη;

$$\text{(α)}\ x(y) = \frac{v}{d\upsilon}y^2,\ y \in \left[0, \frac{d}{2}\right] \quad x(y) = \frac{2v}{\upsilon}y - \frac{v}{d\upsilon}y^2 - \frac{vd}{4\upsilon},\ y \in \left(\frac{d}{2}, d\right], \text{(β)}\ S = x(d) = \frac{3vd}{4\upsilon}$$

2. Δύο πολεμικά πλοία έχουν παράλληλες πορείες και ταχύτητες $\upsilon_{1,2}$ με αντίθετες φορές. Όταν βρίσκονται το ένα απέναντι στο άλλο, σε απόσταση D, το ένα από τα δύο βάλλει ένα βλήμα με ταχύτητα υ_0 (ως προς το πλοίο).
(α) Υπό ποια γωνία πρέπει να βληθεί το βλήμα ώστε να πετύχει το δεύτερο πλοίο;
(β) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει το βλήμα στον στόχο του;

$$\text{(α)}\ \cos\theta = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{\upsilon_0},\ \text{(β)}\ t_0 = \frac{D}{\sqrt{\upsilon_0^2 - (\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}}$$

3. Στην ίδια όχθη ενός ποταμού και σε απόσταση L μεταξύ τους βρίσκονται δύο λιμάνια Α και Β. Ένα πλοίο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα κατά τη φορά της ροής του ποταμού πηγαίνει από το Α στο Β σε χρόνο t_1 και επιστρέφει από το Β στο Α σε χρόνο t_2. Να υπολογίσετε
(α) Την ταχύτητα της ροής του ποταμού.
(β) Την ταχύτητα του πλοίου ως προς το νερό.

$$\text{(α)}\ v_{\text{ροής}} = \frac{L}{2}\left(\frac{t_2 - t_1}{t_2 t_1}\right),\ \text{(β)}\ v_{\text{πλοίου}} = \frac{L}{2}\left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 t_1}\right)$$

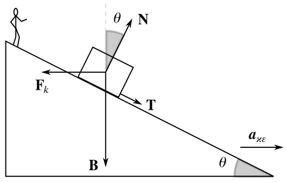
4. Ένας άνθρωπος στέκεται σε απόσταση L από ευθύγραμμο αυτοκινητόδρομο όταν βλέπει να έρχεται λεωφορείο με σταθερή ταχύτητα υ σε οριζόντια απόσταση S. Ο άνθρωπος μπορεί να τρέξει με ταχύτητα $v < \upsilon$. Υπό ποια γωνία φ πρέπει να τρέξει ο άνθρωπος ώστε να φτάσει στον αυτοκινητόδρομο όσο το δυνατόν πιο μπροστά από το λεωφορείο; Πόση θα είναι η μέγιστη απόσταση από το λεωφορείο; Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα του ανθρώπου ώστε να καταφέρει να φτάσει μπροστά από το λεωφορείο;

$$\text{(α)}\ \sin\phi = \frac{v}{\upsilon},\ \text{(β)}\ D_{\max} = S - L\sqrt{\left(\frac{\upsilon}{v}\right)^2 - 1},\ \text{(γ)}\ v > \frac{\upsilon L}{\sqrt{L^2 + S^2}}$$

5. Σκύλος κυνηγά γάτα, η οποία τρέχει κατά μήκος μίας ευθείας με σταθερή ταχύτητα v. Η ταχύτητα του σκύλου έχει μέτρο $\upsilon > v$ και κατευθύνεται διαρκώς προς τη γάτα. Αν για $t = 0$ οι δύο ταχύτητες είναι κάθετες και η απόσταση μεταξύ σκύλου και γάτας είναι L, να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα πιάσει τη γάτα ο σκύλος.

$$t_0 = \frac{\upsilon L}{\upsilon^2 - v^2}$$

6. Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται ακίνητο πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο μάζας M και γωνίας θ. Οι συντελεστές στατικής τριβής (μ_s) και τριβής ολίσθησης (μ) μεταξύ σώματος και επιπέδου θεωρούνται γνωστοί. Ξαφνικά, το επίπεδο αποκτά σταθερή επιτάχυνση a_0. Να βρείτε:
(α) Τη μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης a_0 ώστε το σώμα να παραμείνει ακίνητο σχετικά με το επίπεδο.
(β) Την επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα αν η a_0 γίνει μεγαλύτερη.

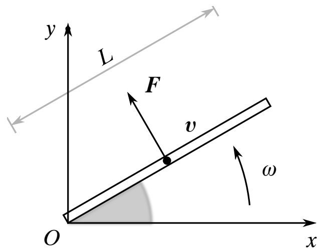


(α) $a_{\max} = g\,\dfrac{\tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s \tan\theta}$, (β) $a = a_0\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right) - g\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right)$

7. Μία σφήνα μάζας M έχει σχήμα κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ και μέγιστου ύψους H και μπορεί να κινείται ελεύθερα πάνω σε λεία επιφάνεια. Από την κορυφή της σφήνας αφήνεται να ολισθήσει ένα σώμα μάζας m και ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και σφήνας είναι μ. Να βρείτε:
(α) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει το σώμα στη βάση της σφήνας.
(β) Τη μετατόπιση της σφήνας όταν θα φτάσει το σώμα στη βάση της.

(α) $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g} \cdot \dfrac{M + m\sin^2\theta}{(M+m)\sin^2\theta}}$, (β) $S = \dfrac{mH}{(m+M)\tan\theta}$

8. Λεπτή ράβδος μήκους L περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Κατά μήκος της ράβδου κυλά, χωρίς τριβή, σφαιρίδιο μάζας m, το οποίο ξεκινά από ένα σημείο που απέχει απόσταση $d < L$ από το σταθερό άκρο της ράβδου, χωρίς αρχική ταχύτητα. Να βρείτε:
(α) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει η μάζα στο άλλο άκρο.
(β) Πόση ταχύτητα θα έχει αποκτήσει η μάζα όταν φτάσει στο άκρο.



(α) $t = \dfrac{1}{\omega}\ln\left(\dfrac{L + \sqrt{L^2 - d^2}}{d}\right)$, (β) $v = \omega\sqrt{L^2 - d^2}$

9. Ένα αντικείμενο αφήνεται να πέσει ελεύθερο από ύψος 400 m πάνω από την επιφάνεια της (περιστρεφόμενης) Γης, κάπου στον ισημερινό. Αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, πόσο μακριά βρίσκεται το σημείο όπου θα κτυπήσει τη Γη από το σημείο που βρίσκεται ακριβώς κάτω από την αρχική θέση;

$\Delta x \approx 16.7\,\mathrm{cm}$