ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 0
Μαθηματική Εισαγωγή

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A} = 2\hat{x} - 3\hat{y} + 7\hat{z}$ και $\vec{B} = 5\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$. Να βρείτε τις ποσότητες $\vec{A} \pm \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{B}$.

   Απ. $(7, -2, 9), (-3, -4, 5), 21, (-13, 31, 17)$

2. Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ και $\vec{B} = -2\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$.

   Απ. -0.492

3. Να δείξετε ότι $\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \left|\vec{A} + \vec{B}\right| \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}, \vec{A}, \vec{B} \neq \vec{0}$

4. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$. Να βρείτε: α) το μέτρο του διανύσματος, β) την προβολή του στο επίπεδο (x, y), γ) ένα διάνυσμα $\vec{B}$ στο επίπεδο (x, y) κάθετο στο $\vec{A}$.

   Απ. α) $\sqrt{14}$, β) $(3, 1, 0)$, γ) $(1, -3, 0)$

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A} = 2\hat{x} - \hat{y} + 4\hat{z}$ και $\vec{B} = 5\hat{x} + 2\hat{y} - 2\hat{z}$. α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, β) να βρείτε ένα τρίτο διάνυσμα που να είναι ταυτόχρονα κάθετο και στα δύο.

   Απ. α) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, β) $(-6, 24, 9)$

6. Αν $\vec{A} \times \vec{B} = 8\hat{x} - 14\hat{y} + \hat{z}$ και $\vec{A} + \vec{B} = 5\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$ να βρείτε τα διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$.

   Απ. $\vec{A} = (7 + 5k, 4 + 3k, 2k)$, $\vec{B} = (-2 - 5k, -1 - 3k, 2 - 2k)$, $k \in \mathscr{R}$

7. Να βρεθούν οι πρώτοι παράγωγοι των συναρτήσεων: α) $f(x) = x^2 + \sin x$, β) $f(x) = e^x \cos x$, γ) $f(x) = \sin(x^2)$.

   Απ. α) $2x + \cos x$, β) $e^x(\cos x - \sin x)$, γ) $2x \sin(x^2)$

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα: α) $\int \ln x \, dx$, β) $\int a^x \, dx$, γ) $\int \sin^3 x \cos x dx$, δ) $\int (ax + b)^n \, dx$.

   Απ. α) $x \ln x - x + C$, β) $\dfrac{a^x}{\ln a} + C$, γ) $\dfrac{1}{4} \sin^4 x + C$,
   δ) $\dfrac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, n \neq -1$, $\dfrac{1}{a} \ln|ax + b| + C, n = -1$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα: α) $\int_0^1 x \, dx$, β) $\int_0^\pi \sin x \, dx$, γ) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$.

   Απ. α) 0.5, β) 2, γ) 1

10. Υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες προσεγγιστικά με πολυωνυμικό ανάπτυγμα Taylor πρώτου βαθμού γύρω από κατάλληλο σημείο x_0: α) $\sqrt{1.1}$, β) $\cos(30.5^o)$, γ) $e^{0.12}$, δ) $\ln(1.05)$.

    Απ. α) $x_0 = 1, \sqrt{1.1} \approx 1.05$, β) $x_0 = \dfrac{\pi}{6}, \cos(30.5^0) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{360}\right) \approx 0.862$,
    γ) $x_0 = 0, e^{0.12} \approx 1.12$, δ) $x_0 = 1, \ln(1.05) \approx 0.05$

11. Να γράψετε τους τρεις πρώτους, μη μηδενικούς, όρους των σειρών Taylor για τις παρακάτω συναρτήσεις, με κέντρο το σημείο x_0: α) $f(x)=\frac{1}{x}, x_0=1$, β) $f(x)=\sin(2x), x_0=-\pi/2$.

Απ. α) $f(x) \approx 1-(x-1)+(x-1)^2$, β) $f(x) \approx -2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{3}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{4}{15}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^5$

12. Αν $\vec{r}=\left(t^3+2t\right)\hat{x}-3e^{-2t}\hat{y}+2\sin(5t)\hat{z}$ να βρείτε τα: α) $\frac{d\vec{r}}{dt}$, β) $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$, γ) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, δ) $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$ για t=0.

Απ. α) (2, 6, 10), β) $\sqrt{140}$, γ) (0, − 12, 0), δ) 12

13. Αν $\vec{F}(t)=\left(3t^2-1\right)\hat{x}+(2t-3)\hat{y}+\left(6t^2-4t\right)\hat{z}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \vec{F}(t)dt$.

Απ. $6\hat{x}+8\hat{z}=(6, 0, 8)$

14. Ένας κύλινδρος έχει ύψος h =2m και ακτίνα βάσης r = 1m. Να βρείτε την ποσοστιαία μεταβολή του όγκου του αν η ακτίνα αυξηθεί κατά 1% και το ύψος μειωθεί ταυτόχρονα κατά 0.5%.

Απ. +1.5 %

15. Έστω μία χρονικά μεταβαλλόμενη κυλινδρική επιφάνεια, ακτίνας $r(t)=r_0e^{at}$ και ύψους $h(t)=h_0-\beta t$. Να βρείτε πως μεταβάλλεται με το χρόνο το εμβαδόν της επιφάνειας.

Απ. $S(t)=2\pi r_0 e^{at}(h_0-\beta t)$

16. Αν $\vec{A}(x,y,z)=xz\hat{x}+\left(2x^2-y\right)\hat{y}-yz^2\hat{z}$ και $\varphi(x,y,z)=3x^2y+y^2z^3$ να βρείτε τα: α) $\vec{\nabla}\varphi$, β) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, γ) $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ στο σημείο $(3,-1,2)$.

Απ. α) (−18, 11, 12), β) 5, γ) (−4, 3, 12)

17. Αν $\vec{A}(x,y,z)=\left(2xy+z^3\right)\hat{x}+\left(x^2+2y\right)\hat{y}+\left(3xz^2-2\right)\hat{z}$ να δείξετε ότι $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{0}$. Στη συνέχεια να βρείτε μία βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(x,y,z)$ ώστε $\vec{A}=\vec{\nabla}\varphi$.

Απ. $\phi(x,y,z)=x^2y+z^3x+y^2-2z+C$

18. Να βρείτε τη γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων: α) $x'(t)=4t\sqrt{x}$, β) $\frac{dy}{dx}=2x+y$, γ) $xy'+y^2=0$, δ) $y'+y^2e^x=0, y(0)=1$, ε) $xy'=1-y^2, y(1)=0$

Απ. α) $x(t)=\left(t^2+c\right)^2$, β) $y(x)=ce^x-2x-2$, γ) $y(x)=\frac{1}{\ln x+c}$, δ) $y(x)=e^{-x}$, ε) $y(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$